باسمه تعالی

روش مطالعه آمار، روش CTS (روش مطالعه ۳ مرحله‌ای) می‌باشد که یک روش بسیار مدرن و پیشرفته برای دروس ریاضی-بنیان است.

توضیحات این روش در صفحه بعد آمده است. لطفاً با دقت ملاحظه فرمایید.

در این فایل کل باکسCTS (مربوط به کلیه فصول ۱ تا ۱۸) پک آمار تقدیم شده است تا بتوانید مباحث پوشش داده شده در هر سرفصل را ملاحظه فرمایید.

سمپل تقدیمی بخشی از فصل سوم پک آمار DLM می‌باشد. از فلش‌کارت ۱۶۰ تا ۳۰۲ که از روز دوازدهم تا بیستم براساس جدول زمان‌بندی مطالعه می‌شود. (کل فصل ۳ تا فلش‌کارت ۴۶۷ ادامه دارد.)

برای مطالعه سمپل آمار فقط لازم است صفحات ۹ تا ۱۲ باکس CTS (از شروع فصل ۳ تا فلش‌کارت ۳۰۲) را پرینت بگیرید. (می‌شود page ۱۱ تا ۱۴ این فایل)

فلش‌کارت‌ها نیز از page ۸۱ تا آخر این فایل قرار دارند که در وسط صفحات A۴ جایگذاری شده‌اند تا با هر پرینتری امکان چاپ آنها فراهم باشد. بایستی دستور پرینت را طوری تعیین کنید که صفحات، پشت و روی یکدیگر چاپ شوند. (صفحات فرد، روی فلش‌کارتها و صفحات زوج، پشت فلش‌کارت‌ها نظیر به نظیر قرار گیرند.)

اگر حوصله پرینت و برش فلش‌کارت‌ها را ندارید، می‌توانید نمونه رایگان آمار را به صورت چاپ شده و آماده دریافت فرمایید.

بدین منظور یا به دفتر پخش ما به نشانی تهران/ خیابان جمهوری/ خیابان گلشن جنوبی/کوچه آزاد/پلاک۲ مراجعه کنید و یا با شماره تلفن‌های ۶۶۹۰۳۵۴۷ -۰۲۱ ، ۲۲۳۶۰۶۰۶ -۰۲۱ تماس حاصل نمایید.

بدون شک جامع‌ترین منبع حالِ حاضر بازار نشر ایران برای آمار ۱ DLM است. این را پس از مطالعه پک درخواهید یافت.

منابعی که پک آمار DLM پوشش می‌دهد:

۱. **آمار و احتمال، آموزشگاه پارسه، محسن طوراني**
۲. **آمار و احتمالات، آموزشگاه مدرسان شریف**
۳. **آمار و احتمال، هادي رنجبران**
٤. **آمار کاربردي ۱، عالِم تبریز، انتشارات پوران پژوهش**
٥. **آمار و کاربرد آن در مدیریت ۱، مسعود نیکوکار**
٦. **آمار و کاربرد آن در مدیریت، عادل آذر و منصور مؤمني**
۷. **آزمون‌های تألیفي آمار کاربردي، وحید انصاري**
۸. **آمار و کاربرد آن در مدیریت، انتشارات قلم چي**
۹. **آمار، آموزشگاه ماهان**
۱۰. **آمار، آموزشگاه علوي**

سایر منابع مورداستفاده:

۱. آمار: روش‌ها و کاربردها، حمیدی زاده
۲. آمار و کاربرد آن در مدیریت، صفاری
۳. جزوه آمار، مهرداد پرچ، جهاد دانشگاهی دانشگاه تهران و مطالبی از وبسایت ایشان
٤. اصول، مبانی و مفاهیم علم آمار، علی بشارت
٥. آمار کاربردی، علی عمیدی
٦. مفاهیم و روش‌های آماری، شهرآشوب
۷. اصول و روش‌های آماری، فرشاد فر
۸. روش‌های آماري، پرویز تاجداري
۹. کاربرد آمار در مدیریت ترافیک
۱۰. (مجموعه سؤالات آمار و روش تحقیق، صمدی
۱۱. ۱۰۰۰ مسئله حل‌شده در آمار و احتمالات مهندسی، اکبری و تراب زاده
۱۲. جبر و احتمال، پرسمان گاج
۱۳. ریاضیات گسسته، ۱۰ استاد
۱٤. ریاضیات گسسته، ۸ کتاب ریاضی گاج
۱٥. ریاضیات گسسته، گاچ

روش مطالعه ۳ مرحله ای (CTS)

Dynamic Learning Method

توضیح: فلش کارت های آمار شامل دو دسته «**حفظ کردنی**» و «**حل کردنی**» می‌باشند. «حفظ کردنی» مانند تعاریف و مفاهیم و «حل کردنی» مانند مثال ها و تست ها.

(تعریف مطالعه مقدماتی، مطالعه نیم چاشت و مطالعه نهایی)

مطالعه اول (مقدماتی)	۱- کل فلش‌کارت ها را یک دور مطالعه می‌کنیم؛ شامل فلش‌کارت‌های حفظی(مانند تعاریف) و فلش کارت های حل کردنی (مانند مثال ها و تست ها) ۲- جواب مسئله ها و تست ها را نگاه می کنیم (در این مرحله هنوز لازم نیست خودتان آنها را بر روی کاغذ سفید حل کنید؛ کافی است روش حل را کاملا درک کنید.) **نکته:** در این مرحله مهم این است که یاد بگیرید داده های مساله چگونه در فرمول جایگذاری شده‌اند (یا چگونه از آنها استفاده شده است.)
مطالعه دوم (نیم چاشت)	۳- حالا مجددا از نو، فلش کارت ها را با دقت بیشتری مطالعه می کنیم. *حفظی* ها را کافیست یکبار دیگر از رو بخوانید و مفهوم آنها را با زبان خودتان برای خود بازگو کنید. در مورد فلش کارت های *حل کردنی* باید سعی کنید راه حل مسئله‌ها، مثال‌ها و تست‌ها را کاملا یاد بگیرید؛ یعنی صورت مساله را بخوانید. قلم دست بگیرید و بر روی کاغذ سفید حل شان کنید. در این مرحله، هر وقت لازم شد می‌توانید به راه حل نگاه کنید. (مثلا حل مثال را آغاز می کنید و تا اواسط فرایند حل پیش می‌روید. ناگهان در این مرحله یک چیزی را فراموش می کنید. به فلش کارت مراجعه می کنید، آن قسمتش را نگاه می کنید، برایتان یادآوری می شود و دوباره حلتان را ادامه می دهید و اگر دوباره به جایی رسیدید که لازم شد به حل فلش کارت مراجعه کنید، این کار را انجام می دهید.)
مطالعه سوم (نهایی)	۴- به **باکس CTS** (در صفحه بعدی این راهنما) مراجعه کنید. مفاهیم مهم، فرمول‌ها و مسئله‌هایی که باید یاد بگیرید، در باکس CTS استخراج شده‌اند. * **مسئله‌ها**یی را که شماره فلش‌کارت آنها را مشخص کرده‌ایم بر روی کاغذ سفید حل می‌کنید. (اینبار بدون نگاه کردن به فلش‌کارت) * **فرمول**ها را در جاهایی که بدین منظور پیش‌بینی شده وارد می‌کنید. (در این مرحله بهتر است فرمول‌ها را ابتدا به خاطر بسپارید و از حفظ وارد باکس CTS کنید و یکبار هم با فلش‌کارتی که آن فرمول در آن فلش‌کارت قرار دارد مطابقت دهید که مطمئن شوید فرمول کاملاً درست و دقیق وارد باکس CTS شده است.) * **مفاهیم** را به زبان خودتان در محل‌های تعیین شده وارد نمایید. * **جاهای خالی(نقطه‌چین)**ها را پُر کنید. (اگر مرحله قبلی (مطالعه نیم‌چاشت) را به درستی انجام داده باشید برای پُر کردن *جای خالی‌ها*، *مفاهیم*، *فرمول‌ها* و نیز حل *مسئله‌ها و مثال‌ها* نیازی به مراجعه به فلش‌کارت‌ها نخواهید داشت. اگر هم احیاناً نیاز شد مراجعه کنید، اشکالی ندارد. در ادامه مطالب آنقدر مرور و تکرار خواهند شد که خود به خود در ذهن شما جای بگیرند. اما اصل روش این است که باکس CTS را *از حفظ* پُر کنید.)

- **باکس CTS چیست؟**

همانطوریکه احتمالاً تاکنون متوجه شده‌اید «باکس CTS» در واقع مفاهیم، نکات، فرمول‌ها، مثال‌ها و تست‌هایی است که پس از هر روز مطالعه (مطابق با جدول زمان‌بندی) باید یاد گرفته باشید. در پایان مطالعه پک، یک کتابچه منحصربفرد در اختیار خواهید داشت (جدول CTS) که تمامی مطالب آمار۱ را در بر می‌گیرد و هر وقت لازم بود می‌توانید بدان مراجعه نمایید.

به این ترتیب فرمول‌ها و مفاهیم **همه یکجا جمع‌بندی** شده‌اند و هر وقت نیاز داشته باشید آنها را مرور کنید لازم نیست بروید سراغ فلش‌کارت‌ها و کلی وقت صرف پیدا کردن فرمول، تعریف یا مثال مورد نظرتان کنید.

ضمن اینکه چون مفاهیم را از حفظ و به زبان خودتان وارد باکس CTS می‌کنید، گویی دارید آنها را به شخص دیگری آموزش می‌دهید که این امر به معنای این است که مطلب را درک کرده‌اید. تست‌ها و مسئله‌ها را هم که باید بدون نگاه به فلش‌کارت‌ها بر روی کاغذ سفید حل کنید. خوب، چاره‌ای ندارید جز اینکه آنها را یاد گرفته باشید.

همچنین در مرورها نیازی به رجوع به فلش‌کارت‌ها (بجز در مواردی که مطالب را احیاناً فراموش کرده باشید و نیز در مورد مسائل و تست‌ها به منظور خواندن صورت مساله از روی فلش‌کارت) نخواهید داشت و **مستقیماً به باکس CTS رجوع خواهید کرد**. این کار صرفه‌جویی زمانی چشمگیری در پی خواهد داشت بدون آنکه حتی یک نکته را از دست بدهید.

- روش CTS با در نظر گرفتن مهم‌ترین مولفه‌های یادگیری منجمله «یادگیری فعال (Active Learning)» و در ادامه روش۵Thicks براساس مطالعه نیازها و نظرات داوطلبان و جهت‌گیری TQM توسط گروه DLM ابداع شده است.

این یک مخصوص رشته‌های مدیریت، حسابداری و اقتصاد (ارشد و دکترا) با لحاظ کردن تفاوتهای اندکی که در سوالات آمار این سه رشته وجود دارد طراحی گردیده اما سایر رشته‌ها نیز می‌توانند آنرا مطالعه کنند *(منابع پوشش داده شده را ببینید)*

به ضرس قاطع یک آمار DLM با فاصله زیادی نسبت به سایر منابع **جامع‌ترین** منبع فارسی (و حتی لاتین) آموزش « آمار ۱ » در بازار نشر ایران است. این را پس از مطالعه یک، تصدیق خواهید فرمود.

در کنکور ارشد و دکترا سوالی از آمار ۱ مطرح نخواهد شد که با مطالعه DLM نتوانید به آن پاسخ دهید. رشته‌ها و مقاطعی که آمار۲ را هم باید مطالعه کنند، ابتدا باید آمار ۱ را کاملاً مسلط باشند تا بتوانند آمار۲ را به خوبی درک کنند. پس مطالعه **«آمار DLM»** برای همه رشته‌ها و همه مقاطع توصیه می‌شود.

برای ارشد مدیریت، حسابداری و اقتصاد از مباحث آمار ۲ فقط یک یا دو سوال مطرح می‌شود. پس مطالعه آمار ۲ که حجمی تقریبا معادل آمار ۱ دارد اصلا منطقی نیست.

(کسانی که مایلند پس از مطالعه یک DLM آمار ۲ را هم بخوانند می‌توانند کتاب آمار ۲ دکتر عادل آذر(*زبان ساده‌تر*) و آمار۲ محسن طورانی[پارسه](*مطالب جامع تر*) را مطالعه کنند.)

ما زمان لازم برای مطالعه یک «آمار» را ۸۳ روز اعلام می‌کنیم. جدول CTS ۱۶۵ را نشان می‌دهد. این، بدان دلیل است که مطالعه هر دو روز از جدول CTS در یک روز کاملاً روتین و منطقی است. اما ما جدول CTS را بر مبنای یک مطالعه آرام، ملایم و عمیق طراحی کرده‌ایم. آمار و ریاضی را می‌شود ***با لذت*** *خواند. "چه کاریه اگر وقت دارید عجله کنید! بذارید همون ۱۶۵ روز طول بکشه!"*
اما اگر یک را دیر تهیه کرده‌اید و زمان کمتری تا کنکور باقیست، دو روز (یا ۳ روز) را هم به راحتی می‌توانید در یک روز بخوانید.

روز	**باکس CTS (فصل ۱):** « **جمع بندی خلاصه نکات ، فرمول‌ها و روابط مهم هر سرفصل**»	شماره فلش کارت(ها)
اول	تعریف «جامعه» : تعریف«نمونه آماری»:	۴
	اگر شاخصی با جمع‌آوری اطلاعات از **همهٔ** *عناصر جامعه به‌دست بیاد (یعنی از طریق .....(۱).....)، اون وقت به اون شاخص،.....(۲)..... می‌گیم (یه مثال بزنین).* *ولی اگر شاخصی با جمع‌آوری اطلاعات از* **بخشی از** *جامعه به‌دست بیاد (یعنی از طریق.....(۳).....)، اون‌وقت به این شاخص،.....(٤)..... می‌گیم، مثل: .....(۵).....*	۸

علائم مربوط به پارامتر و آماره:

شاخص	پارامتر (جامعه)	آماره (نمونه)
میانگین		
انحراف معیار		
واریانس		
نسبت		
همبستگی		
تعداد مشاهدات		

۹/۱

گروه	نوع آمارگیری	حوزه علم آمار	شاخص بدست آمده	مشخصات شاخص
جامعه				
نمونه				

۹/۳

متغیر تصادفی: همون..... تو تحقیقات آماریه که بسته به نوع تحقیق، می‌تونه ..... **یا** ..... باشه. ۹/۵

آمار توصیفی:

موضوع	هدف	نوع آمارگیری	گروه

۹/۸

آمار استنباطی:

موضوع	هدف	نوع آمارگیری	گروه

۹/۱۰

آمار پارامتریک و ناپارامتریک:

فرض اساسی تو آمار **پارامتریک**..... است، درحالی‌که تو فنون **ناپارامتریک** ۱۱

تو **آمار پارامتریک** متغیرها دارای مقیاس..... (از نوع .....)اند و مشاهدات از **توزیع** ..... تبعیت می‌کنن.

اما تو **آمار ناپارامتریک**بیشترِ متغیرها دارای مقیاس .....(از نوع .....) اند و چون این متغیرها **دقیقاً قابل اندازه‌گیری نیستن**، بنابراین ..... ، به همین دلیل به **آمار ناپارامتریک**، .....می‌گیم. ۱۲

۱۳

حوزهٔ علم آمار	موضوع (متغیر مورد بررسی)	مشخصاتِ متغیر مورد بررسی
آمار پارامتریک (توصیفی و استنباطی)		
آمار ناپارامتریک		

روز۱ **حل فیشهای: ۹ -۹/۴ – ۹/۵ – ۱۴ – ۱۵**

روز ۲	انواع صفت (Attribute) در جوامع آماری: **۱) صفت مشترک (مشخصه یا ثابت):** **۲) صفت متغیر:** **صفت** { **مشترک (مشخصه = ثابت)←متمایزکنندهٔ**..... **متغیر←متمایزکنندهٔ**.....	۱۶ ۱۷
روز۲	**انواع متغیرها (انواع صفات متغیر):** **۱- کمی** { *۱. کمی*.....**(قابل** .....**)**، مثل: ..... *۲. کمی* .....**(قابل** .....**)**، مثل: ..... **۲- کیفی:** *غیرقابل اندازه‌گیری یا شمارش* { *۱. کیفی* .....، مثل:..... *۲. کیفی* .....مثل:	۲۰
روز۲	**نکته** :یه روش سریع و **تستی برای تشخیص متغیرهای کمی گسسته:** متغیرهای **گسسته** غالباً با کلمه «.....» همراه‌اند مثل:	۲۴
روز۲	**نکته خیلی مهم:** اگرچه متغیرهای **کیفی**(از نوع: اسمی یا ترتیبی) رو نمی تونیم به‌صورت یه **عدد** بیان کنیم (چون **غیر**قابل اندازه‌گیری اند) ولی باید توجه کنیم که معمولاً برای نشون دادن این متغیرها (یعنی متغیرهای **کیفی**) از روش .....استفاده می‌کنیم. *ولی نکته مهم اینه که***این** اعداد (کدها)، **اعداد واقعی (اعداد ریاضی)** .....و فقط کُد و نما (سمبلی) برای متغیرها هستن، بنابراین ما..... **چهار عمل اصلی (+، − ، × و ÷) و سایر اعمال جبری رو روی متغیرهای کیفی (اسمی و ترتیبی) انجام بدیم.**	۲۶ ۲۶
روز۲	**حل تستهای:** ۱۸-۲۱-۳۰	
روز ۳	متغیرهای ..... به دلیل **قابلیت اندازه‌گیری** از دقت**بیشتری** نسبت به متغیرهای ..... برخوردار بوده و در نتیجه، نتایج حاصل از **متغیرهای** ..... ،**قابل تعمیم به جامعه** است.	۳۱
روز ۳	**نکته مهم**: از روش **کدگذاری** فقط برای متغیرهایی با **مقیاس** ..... (.....**و**.....) استفاده میشه.	۴۴
روز۳	**حل فیشهای :** ۴۳-۴۴	
روز ۴	**انواع مقیاس‌های اندازه‌گیری صفات:** **متغیرهای کمی** ≪ **متغیرهای کیفی** **مقیاس** ..... ≪ مقیاس..... ≪ **مقیاس** ..... **قوی‌ترین و کامل‌ترین مقیاس** — **ضعیفترین و ساده‌ترین مقیاس**	۵۴
روز ۴	مراتب / مقیاس: **ترتیب** — **فواصل** — **مبدأ صفر قراردادی** — **مبدأ صفر مطلق** **اسمی (طبقه‌ای)** **ترتیبی (رتبه‌ای)** **فاصله‌ای** **نسبی (نسبتی)**	۶۲
روز ۴	**نسبی (نسبتی)** — **فاصله‌ای** — **ترتیبی (رتبه‌ای)** — **اسمی (طبقه‌ای)** مقیاس / عملیات: +، −، ×، ÷	۶۲

روز ۴	**۱)** تو آمار **ناپارامتریک** میشه جوامع آماری‌ای که از توزیع ..... برخوردار **نیستن** رو هم بررسی کرد. **۲)** تو آمار **ناپارامتریک** میشه داده‌های ..... (یعنی .....) رو هم بررسی کرد. **۳)** تو آمار **ناپارامتریک** میشه نمونه‌های ..... رو هم بررسی کرد.	۶۴
روز ۴	مراحل انجام تحقیقات علمی (۴ مرحله):	۶۶
روز۴	**حل فیشهای : ۵۸-۵۹-۶۰-۶۱-۶۶**	
روز ۵	عناصر اصلی در تحقیقات مدیریتی(۲ مورد):	۶۷
روز ۵	**متغیرهای لازم برای تحقیق (با مثال):** ۱. متغیر خصیصه: ۲. متغیر مستقل: ۳. متغیر وابسته: ۴. متغیر تعدیل کننده (واسطه‌ای یا میانجی): ۵. متغیر کنترل: ۶. فرق متغیر کنترل و تعدیل کننده(با مثال): ۷. شباهت متغیر تعدیل کننده و مستقل(با مثال) : ۸. فرق متغیر تعدیل کننده و مستقل(با مثال) :	۶۸ ۶۹ ۷۱ ۷۱ ۷۳ ۷۴
روز ۵	متغیرهای .....← تأثیر این متغیرها *همیشه مورد بررسی قرار می‌گیره.* متغیرهای .....← لازمه تأثیرشون تو مطالعه *از بین بره و خنثی بشه.*	۷۵
روز ۵	فرق فرضیه های توصیفی و استنباطی:	۷۷
روز ۵	قرق فرضیه های همبستگی با فرضیه های تجربی (آزمایشی): **۱) همبستگی** ۱) ما بر متغیرهای تحقیق **کنترل**..... ۲) از هر فرد *دست‌کم درباره* .....اطلاعاتی بدست میاد، بدون اینکه اونا دستکاری یا کنترل بشن. **۲) تجربی (آزمایشی)** ۱) برمتغیرهای تحقیق **کنترل** ..... ۲) از **روش** ..... متغیرها رو کنترل و دستکاری می‌کنیم. **نکته :** تو مطالعه .....، از هر فرد ***دست کم (حداقل) درباره دو متغیر*** اطلاعات جمع‌آوری میشه.	۸۱ ۸۰
روز ۵	منظور از گروه شاهد و گروه آزمایش (با مثال): **نکته مهم: اعضای دو گروه آزمایش و گواه .....، یعنی اعضای گروه آزمایش و گواه .....**	۸۳ ۸۳

روز ۵	مفهوم فرضیه با گروه های جورشده و فرضیه با گروه های مستقل (با مثال):	۸۶-۸۵
روز ۵	**فرضیه‌های پارامتریک در مقابل فرضیه‌های ناپارامتریک**: فرضیه: ۱) پارامتریک ← اگر متغیر ..... (مقیاس **.....و .....**) و دارای توزیع **.....** باشه. فرضیه: ۲) ناپارامتریک: متغیر ..... (مقیاس **.....** و **.....**) و **فاقد توزیع .....** فرضیه: ۲) ناپارامتریک: متغیر .....**..** (مقیاس **.....** و **.....**) و **فاقد توزیعِ**	۸۷
روز ۵	**نکته مهم:** باتوجه به جدول بالامی‌تونیم بگیم که:	۸۹

نوع متغیر	مقیاس	توزیع داده‌ها	آزمون فرضیه از طریق	نوع فرضیه
کیفی				
کمی				

فنون آماری **پارامتریک** به شدت تحت تأثیر ۲ چیزه:

۱. **۲.**

چون فقط موقعی می‌تونیم از فنون آماری **پارامتریک** *استفاده کنیم که:* ۸۹

اولاً: مقیاس متغیرها از نوع .....باشه (یعنی متغیرها **..... باشن**)

ثانیاً: توزیع آماری جامعه یا نمونه، **.....**باشه.

روز۵	**حل فیشهای : ۶۶ و ۷۵ و ۸۲ و ۸۴**	
	این باکس متعلق به شماست. اگر احساس می‌کنید از فصل ۱ مطلبی وجود دارد که مایل هستید برای خود یادداشت کنید. DLM	

روز	باکس CTS (فصل ۲): « جمع بندی خلاصه نکات ، فرمول‌ها و روابط مهم هر سرفصل»	فلش کارت
روز ۷	*نخستین قدم در مواجه شدن با تعداد زیادی از* **مشاهدات** ..... *است.*	۹۲
روز ۷	*انواع روشهای طبقه بندی داده ها:* ۱. *داده های با حجم کم:* ..... ۲. **داده‌های با حجم زیاد و تنوع کم: روش طبقه بندی** ..... ۳. **داده‌های با حجم زیاد و تنوع زیاد**: روش طبقه‌بندی.....	۹۹
روز ۷	**نحوه طبقه بندی داده های نوع سوم (۴ مرحله):** ۱.مرحله اول: ۲.مرحله دوم: ۳.مرحله سوم: **توجه ۱:** در این مرحله اگر مقدار k عددی **اعشاری** بدست بیاد، (چه این اعشار کمتر از ۰/۵ هم باشد و چه بیشتر از آن)، بایستی آن را به **..... (به سمت عدد صحیح .....) گرد کنیم.** ۴.مرحله چهارم: در این مرحله حد پایین طبقه اول را ..... قرار می‌دیم و بدین ترتیب، حد پائین طبقات بعدی، با **افزودن** ..... **به** ..... بدست می‌آید. حد بالای سایر طبقات نیز، **با افزودن** ..... **به** ..... بدست می‌آید.	۱۰۵ ۱۰۵ ۱۰۶
روز ۷	**حل فیش : ۱۰۲**	
روز ۸	**طبقات گسسته و پیوسته:** در یک جدول توزیع فراوانی، اگه .....، در این صورت طبقات ما **پیوسته** هستند و در غیر این صورت، یعنی اگر .....، طبقات ما **گسسته**خواهد بود.	۱۱۵
	نحوه پیوسته کردن طبقات گسسته: *برای پیوسته کردن طبقات گسسته، کافی است که*	۱۱۶
روز ۸	نحوه محاسبه فاصله طبقات، طول طبقات و عرض طبقات (در مثال زیر): : فاصله طبقات : طول طبقات : عرض طبقات **طبقات گسسته:** ۸ — ۱۰ و ۱۱ — ۱۳ **طبقات پیوسته :** ۴ — ۷ و ۷ — ۱۰	۱۱۷
	۱) همیشه..... طبقات = ... طبقات است. این قاعده هم برای طبقات گسسته و هم برای طبقات پیوسته صادق است. **۲)** اگر طبقات **پیوسته** باشد: ..... طبقات = ... طبقات = ... طبقات **۳)** در طبقات **گسسته**، همیشه: .....طبقات= .....طبقات > ..... طبقات	۱۱۷
روز ۸	فرمول محاسبه مرکز طبقات: **مرکز طبقه i ام =** **روشی سریع برای پیداکردن مرکز یه طبقه:** روش سریع برای محاسبه مرکز طبقات متوالی:	۱۲۰ ۱۲۱ ۱۲۲
روز ۸	**حل فیشهای : ۱۱۳-۱۱۴-۱۱۸-۱۲۳-۱۲۷**	
روز ۹	**نکته مهم:** برای محاسبه $(\sum x)^2$اول باید ..... و بعد، ..... اما برای محاسبه $\sum x^2$، ابتدا باید .....و سپس	۱۳۲

	نکته: هروقت دو تا سیگما کنار هم قرار گرفتند ($\Sigma\Sigma$) می‌تونیم ..... $\sum_{i}\sum_{j} x_i z_j =$	۱۳۲
روز ۹	خواص سیگما: ۱) $\boxed{\sum_{i=1}^{N} a =}$ ۲) $\boxed{\sum_{i=1}^{N} b\, x_i =}$ ۳) $\sum_{i=1}^{N}(x_i \pm a) =$ ۴) $\sum_{i=1}^{N}(b x_i \pm a) =$ ۵) $\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i}{b} =$ ۷) $\sum_{i=1}^{N}(x_i \pm y_i) =$ ۹) $\sum_{i=1}^{N}(x_i + a)^2$ ۱۰) $\sum_{i=1}^{N}(x_i - a)^2$ ۱۱) $\sum_{i=1}^{N} i =$: جمع اعداد طبیعی از ۱ تا n $\sum_{i=1}^{N} i =$ = مجموع اعداد از a تا b $\sum_{i=1}^{N} i^2$:مجموع مجذور اعداد طبیعی از ۱ تا N **نکته ظریف**: رابطه $\sum_{i=1}^{N} i = \frac{n(n+1)}{2}$ زمانی صادق است که **کران پایین Σ برابر ..... باشد.**	۱۳۴ ۱۳۵ ۱۳۶ ۱۳۷ ۱۳۷ ۱۳۸ ۱۳۷
روز ۹	نحوه محاسبه انواع فراوانی داده ها: ۱.فراوانی نسبی $f_i =$ ۲.درصد فراوانی نسبی $P_i =$ ۳. فراوانی تجمعی (۲ روش): $F_{c_i} =$ ۴. فراوانی نسبی تجمعی(۲ روش) $f_{c_i} =$ ۵. درصد فراوانی نسبی تجمعی: $P_{c_i} =$ مجموع ..... برابر با **حجم کل جامعه (N)** است. **نکته ۱**: مجموع فراوانی های نسبی داده‌ها یا طبقات **برابر .....** است. **نکته ۲**: فراوانی ..... طبقه ..... برابر با **حجم کل جامعه (N)** است. فراوانی نسبی تجمعی آخرین طبقه، **برابر ..... است.** **نکته ۶)** فراوانی **تجمعی** طبقه i ام، به مفهوم تعداد داده‌هایی است که **.....** حد ..... طبقه i ام هستن. فراوانی نسبی همواره عددی..... است و فراوانی مطلق نیز همواره عددی **.....** است. تفاضل فراوانی تجمعی دو طبقه متوالی برابر با فراوانی ..... طبقه **.....**: $\ldots\ldots = F_{c_i} - F_{c_{i-1}}$ تفاضل فراوانی تجمعی نسبی دو طبقه متوالی برابر با فراوانی ..... طبقه **.....**: $\ldots\ldots = f_{c_i} - f_{c_{i-1}}$	۱۴۰ ۱۴۱ ۱۴۲ ۱۴۳ ۱۴۴ ۱۴۴ ۱۴۲ ۱۴۳ ۱۴۴ ۱۴۶
روز ۹	**حل فیشهای : ۱۳۴-۱۳۹**	
روز ۱۰	**مفهوم چگالی**: ..... ۱.چگالی فراوانی مطلق: ..... $d_i =$ ۲.چگالی فراوانی نسبی: ..... $d_i =$	۱۵۸ ۱۵۸ ۱۵۹
روز ۱۰	**حل فیشهای: ۱۵۲ و ۱۵۳ و ۱۵۴ و ۱۵۷ و ۱۵۸**	

روز	**باکس CTS (فصل ۳):** « **جمع بندی خلاصه نکات ، فرمول‌ها و روابط مهم هر سرفصل**»	فلش کارت
روز ۱۲	**نکته ۱:** شاخص مرکزی مُد (نما) **منحصر بفرد** .....،یعنی ..... اگر دو یا چند داده (**نه همه داده‌ها**) بیشترین تکرار را داشته باشند، اون‌وقت..... را به عنوان مد مشاهدات در نظر می‌گیریم. اگر **تمامی** داده‌ها (x_i ها) به یک اندازه تکرار شده باشند (یعنی **فراوانی مطلق یا نسبی یکسانی** داشته باشند)، آنگاه مد جامعه ..... است.	۱۷۲ ۱۷۲
روز ۱۲	**خاصیت مهم مد (با مثال):** اگر از **مد** به عنوان نماینده(برای تخمین مقدار عددی تک تک مشاهدات) استفاده کنیم، آنگاه ..... **حداقل خواهد بود.**	۱۷۶
روز۱۲	**حل فیشهای : ۱۷۱-۱۷۳-۱۷۴-۱۷۶**	
روز ۱۳	مراحل محاسبه مد در داده های نوع سوم (۳ مرحله): الف) ب) ج) d_1 : ..... : $\boxed{d_1 = ...}$ یا $\boxed{d_1 = ...}$ d_2 : ..... : $\boxed{d_2 = ...}$ یا $\boxed{d_2 = ...}$ مقدار مدی که از فرمول فوق بدست می‌آوریم، **باید حتماً** ..... **قرار داشته باشد.** **نکته ۳)** اگر **طبقه اول** جدول، طبقه مد دار باشد: $d_1 = ...$ و اگر **طبقه آخر**، طبقه مد دار باشد: $d_2 = ...$	۱۷۷ ۱۷۸ ۱۷۸ ۱۸۱ ۱۸۲
روز ۱۳	**روش تستی برای محاسبه مد**: *روش معمولی و کم دقت برای محاسبه مد در جداول طبقه‌بندی شده (که به صورت (L-Uهستن) اینه که* ..... *رو به عنوان مد مشاهدات در نظر بگیریم.اما مقدار واقعی و دقیق مد، بلکه* **به سمت طبقهٔ مجاوری که** .....**متمایل میشه.**	۱۸۴
روز۱۳	**حل فیشهای : ۱۷۸-۱۸۲-۱۸۶**	
روز ۱۴	*در رسم نمودار پافت نگار:* *پر روی محور افقی،* .... **قرار می گیره.** *و پر روی محور عمودی هم،* ..... **قرار می گیره.** **پراکندگی و تغییرپذیری مد ..... است** و در نتیجه **پایداری و ثبات آن .....**است، به همین علت **مد را** ..... **شاخص مرکزی**قلمداد می‌کنند.	۱۹۶ ۲۰۱
روز ۱۴	**کاربرد مد (نما):**هر گاه در یک جامعه، ..... معیار سنجش و انتخاب ما با شه (مثلاً هنگام .....) اون وقت باید از شاخص مرکزی **مد (نما)** استفاده کنیم. **نکته بسیار مهم:***در بیان میانه، فقط می‌توان از عبارت زیر استفاده کرد:* **۱**- ۵۰ درصد مشاهدات..... **یا مساوی**میانه هستند (یعنی ۵۰ درصد مشاهدات، ..... برابر میانه هستند). **۲**- ۵۰ درصد مشاهدات ..... **از** میانه هستند. **نکته بسیار مهم:** شاخص میانه (**Md**) جزء ۵۰ درصد **مشاهدات ..... از خودش** است، بنابراین موقع تفسیر میانه، بجای علامت ..... باید حتماً از علامت..... استفاده کنیم.	۲۰۳ ۲۰۵ ۲۰۵
روز ۱۴	نحوه محاسبه میانه در داده های نوع اول: ..... = محل میانه ⟵ اگه N**فرد**باشه ..... = محل میانه ⟵ اگه N**زوج**باشه	۲۰۸
روز۱۴	**حل فیشهای : ۱۹۹-۲۰۳-۲۰۴**	
روز ۱۵	**نحوه محاسبه میانه در داده های نوع دوم با داشتن فراوانی مطلق (در ۴ گام):** **الف)**مرتب کردن x_i ها (طبقات جدول) به صورت ..... **ب)**یافتن **محل** میانه: $C_{Md} = ...$:**محل میانه** **ج)**محاسبه فراوانی **تجمعی** طبقات F_{C_i}: $F_{C_i} = ...$	۲۱۱

	یادآوری: برای محاسبه فراوانی **تجمعی** هر طبقه (F_{C_i})، فراوانی ..... آن طبقه را با فراوانی .....جمع می‌کنیم. **د)یافتن طبقه میانه دار:** *اولین طبقه جدول از چپ به راست ، که در آن.....باشد.*	
روز ۱۵	**نحوه محاسبه میانه در داده های نوع دوم با داشتن فراوانی نسبی (در ۳ گام):**	۲۲۱
	گام ۱) مرتب کردن طبقات (x_iها) به صورت	
	گام ۲) محاسبه فراوانی **تجمعی نسبی** طبقات (f_{C_i}): f_{C_i} = ...	
	گام ۳) یافتن طبقه میانه دار:اولین طبقه‌ای که فراوانی تجمعی نسبی آن ..... باشد.	
روز ۱۵	**نحوه محاسبه میانه در داده های نوع سوم با داشتن فراوانی مطلق (در ۳ گام):**	۲۲۳
	گام ۱)محاسبه فراوانی **تجمعی** طبقات: ..... = F_{C_i}	
	گام ۲)یافتن **محل میانه (طبقه میانه دار)**:اولین طبقه‌ای از چپ به راست که فراوانی **تجمعی**اش ..... باشد.	
	گام ۳)یافتن **مقدار** میانه از رابطه : = **میانه**	
	تذکر: اگر طبقات **گسسته** باشند، بعد از یافتن طبقه میانه دار، باید آن را ..... کنیم. یعنی باید حدود ..... طبقه میانه دار را بدست بیاریم و سپس گام (۳) را انجام بدیم.	۲۲۴
روز۱۵	**حل فیشهای : ۲۱۱-۲۱۳-۲۱۵-۲۱۷-۲۲۳**	
روز ۱۶	**نحوه محاسبه میانه در داده های نوع سوم با داشتن فراوانی نسبی (در ۳ گام):**	۲۳۱
	گام۱) محاسبه **فراوانی تجمعی نسبی** طبقات: f_{c_i} = ...	
	گام۲) یافتن محل میانه (طبقه میانه‌دار): اولین طبقه‌ای که در آن ..... است.	
	گام ۳)یافتن **مقدار** میانه از رابطه : = **میانه**	۲۳۱ ۲۳۲
	تذکر مهم:*در صورت گسسته بودن طبقات، قبل از انجام گام۳، اول باید طبقه میانه‌دار را ..... کنیم، یعنی باید حدود..... طبقه میانه‌دار را بدست آوریم.*	
	نکته: قبلاً در مورد مد گفتیم که مقدار مد باید حتماً بین ..... قرار داشته باشد. در مورد میانه هم می‌تونیم بگیم که مقدار میانه هم باید حتماً بین ..... باشد.	
	نکته تستی:*اگر در سطر فراوانی نسبی تجمعی، مستقیماً ..... رو ببینیم، اون وقت تنها کافیه که ..... رو به عنوان* **میانه** *در نظر بگیریم.*	۲۳۳
	خواص میانه: $\xrightarrow{y_i = ax_i} Md_y$ = ...	۲۳۶
	$\xrightarrow{y_i = x_i \pm b}$ Md_y = ... $\xrightarrow{y_i = ax_i \pm b}$ Md_y = ...	۲۳۷
روز۱۶	**حل فیشهای : ۲۲۵-۲۲۷-۲۳۱**	
روز ۱۷	**خاصیت مهم میانه:** مجموع ..... *انحرافات (تفاضلات) داده‌ها از میانه، ..... است:* $\sum_{i=1}^{k}$ .....=	۲۴۰
	نکته بسیار مهم در تست‌ها: باید توجه داشت که این خاصیت مهم میانه، همواره باید به صورت ..... بیان شود.	۲۴۲
روز ۱۷	**فاصله**گاراژ iاُم تا پمپ بنزین: .....=	۲۴۵
روز ۱۷	کاربردهای میانه (۳مورد):	۲۵۵
روز۱۷	**حل فیشهای : ۲۴۴-۲۴۵-۲۴۸-۲۵۳-۲۵۵**	

روز ۱۸	**انواع چندکها (۳ مورد):** مفهوم چارک اول: مقداری که $\frac{۱}{۴}$ = ۲۵٪ مشاهدات ..... آن هستند و $\frac{۳}{۴}$ = ۷۵٪ مشاهدات .....از آن هستند. مفهوم چارک سوم: مقداری که $\frac{۳}{۴}$ = ۷۵٪ مشاهدات ..... آن هستند و $\frac{۱}{۴}$ = ۲۵٪ مشاهدات .....از آن هستند.	۲۵۷ ۲۵۸
روز ۱۸	**دهک**: اگر دامنهٔ داده‌های جامعه آماری را به ..... تقسیم کنیم، به طوری که هر یک از این قسمت‌ها ..... **یا** .....از کل فراوانی‌ها را دربرداشته باشند، آنگاه دهک‌های ..... **تا** ..... بوجود می‌آیند. دهک اول: مقداری که $\frac{۱}{۱۰}$ = ۱۰٪ مشاهدات ..... آن هستند و $\frac{۹}{۱۰}$ = ۹۰٪ مشاهدات .....از آن هستند.	۲۶۱ ۲۶۲
روز ۱۸	**صدک**:اگر دامنه داده‌های جامعه آماری را به ..... تقسیم کنیم، به طوری که هر یک از این قسمت‌ها، ..... از کل فراوانی‌ها را در برداشته باشد، آنگاه صدک‌های ..... **تا** .....بوجود میان.	۲۶۴
روز ۱۸	تطبیق چندکها با میانه: صدک .....= دهک .....= چارک .....= میانه	۲۶۶
روز ۱۸	**نحوه محاسبه چندکها در داده های خام (۳ گام):** **گام ۱)** مرتب کردن داده‌ها به صورت .....و کدگذاری اونا از ۱ تا N **گام۲)** یافتن **محل چندک** (چارک، دهک و صدک) مورد نظر از رابطه: **: محل چارک a ام** **: محل دهک a ام** **: محل صدک a ام** **گام۳)** یافتن **مقدار چندک:**	۲۶۸
روز ۱۸	**نکته**: برای یافتن مقدار ۸/۳اُمین داده باید اول دادهٔ .....رو در نظر بگیریم و بعد ۰/۳ فاصله بین ..... رو به دادهٔ ..... اضافه کنیم: $x_{۸/۳}$ = ...+	۲۶۹
روز ۱۸	**نحوه محاسبه چندکها در داده های نوع دوم با داشتن فراوانی مطلق (۳ گام):** **گام ۱)** .....کردن طبقات و محاسبه ..... طبقات. **گام۲) یافتن محل چندک** از رابطه: **محل چارک a ام** $= C_{Q_a}$ = **محل دهکa ام** $= C_{D_a}$ = **محل صدک a ام** $= C_{P_a}$ = **گام۳) یافتن مقدار چندک:** از چپ به راست اولین طبقه (x_i)ای را انتخاب می‌کنیم که: ۱) برای چارکها: $F_{C_i} \geq$ ..... ۲) برای دهکها : $F_{C_i} \geq$ ..... ۳) برای صدکها : $F_{C_i} \geq$	۲۷۱
روز۱۸	**حل فیشهای : ۲۵۹-۲۶۰-۲۶۳-۲۶۸-۲۷۰**	
روز ۱۹	$x_{۱۴/۹}$ = ...+	۲۷۵
	نحوه محاسبه چندکها در داده های نوع دوم با داشتن فراوانی نسبی (۲ گام): **گام ۱)** ..... کردن طبقات و محاسبهٔ .....طبقات **گام ۲)** یافتن محل چندک:اولین طبقه(x_i)ای که: ۱) برای **چارک a ام** ..... $\geq f_{C_i}$ باشه. **مثال**: برای چارک سوم باید ..... $\geq f_{C_i}$ باشد. ۲) برای **دهک a ام** ..... $\geq f_{C_i}$ باشه.**مثال**: برای دهک ششم ($a = ۶$)، باید: ..... $\geq f_{C_i}$ ۳) برای **صدک a ام** ..... $\geq f_{C_i}$ باشه.**مثال**: برای صدک بیستم ($a = ۲۰$)، باید: ..... $\geq f_{C_i}$	۲۷۶

روز ۱۹	**نحوه محاسبه چندکها در داده های نوع سوم با داشتن فراوانی مطلق (۴ گام):** **گام ۱) محاسبه فراوانی .....** طبقات: **گام ۲) یافتن محل چندک (طبقه چندک دار):اولین** طبقه ای که فراوانی ..... بیشتر یا مساوی..... یا ..... یا ..... باشد،یعنی: (..... و ..... و ..... $\geq F_{C_i}$) **گام۳)..... کردن** طبقه **چندک دار** در صورت ..... بودن. **گام۴) یافتن مقدار تقریبی چندک** از روابط زیر: **چارک aام** $Q_a \approx$ ..... ؛ $a = ۱,۲,۳$ **دهک a ام** $D_a \approx$ ..... ؛ $a = ۱,۲,...,۹$ **صدک aام** $P_a \approx$ ..... ؛ $a = ۱,۲,...,۹۹$ **نکته:** *تمام محاسبات مربوط به پارامترهای مرکزی (مد، میانه، میانگین و چندک‌ها) با فرض ..... بودن حدود طبقات انجام می‌شوند، یعنی قبل از محاسبه این شاخصها، اول باید طبقات مون رو ..... کنیم.*	۲۷۸ ۲۷۹ ۲۸۲
روز۱۹	**حل فیشهای : ۲۷۳-۲۷۶-۲۸۱-۲۸۵**	
روز ۲۰	**نکته** *برای رسیدن به حد پائین طبقه چهارم، فقط کافیه به اندازهٔ .....به ..... اضافه کنیم:* $L_۴ = ... + ...$	۲۹۰
روز ۲۰	**نکته مهم:**اگر محل چندک **دقیقاً در ستون فراوانی تجمعی دیده شود**، در این شرایط می‌توان طبقهٔ .....یا طبقه ..... را به عنوان طبقه چندک‌دار در نظر گرفت و نتیجه هر دو حالت، یکسان خواهد بود. **نکته تستی**: اگه محل چندک (یعنی $\frac{aN}{۴}$ ، $\frac{aN}{۱۰}$ یا $\frac{aN}{۱۰۰}$) **رو دقیقاً تو بین مقادیر فراوانی تجمعی ببینیم، آنگاه بدون نیاز به هیچ محاسبه‌ای** می‌تونیم بگیم: **چندک مورد نظر ما برابر با ..... است.** اما یادمون باشه که: **فقط موقعی می‌تونیم از این راه حل تستی استفاده کنیم که**	۲۹۵ ۲۹۵ ۲۹۶
روز ۲۰	**نحوه محاسبه چندکها در داده های نوع سوم با داشتن فراوانی نسبی (۴ گام):** **گام ۱)** محاسبهٔ فراوانی .....طبقات **گام ۲)** یافتن محل چندک:اولین طبقه(x_i)ای که: ۱) برای **چارک aام** ..... $\geq f_{C_i}$ باشه. **مثال**: برای چارک سوم باید ..... $\geq f_{C_i}$ باشد. ۲) برای **دهک aام** ..... $\geq f_{C_i}$ باشه.**مثال**: برای دهک ششم ($a = ۶$)، باید: ..... $\geq f_{C_i}$ ۳) برای **صدک aام** ..... $\geq f_{C_i}$ باشه.**مثال**: برای صدک بیستم ($a = ۲۰$)، باید: ..... $\geq f_{C_i}$ **گام ۳)..... کردن**طبقات در صورت ..... بودن. **گام ۴) یافتن مقدار تقریبی چندک aام** (a: شماره چندک) از روابط زیر: **چارک aام** $Q_a \approx$ ..... ؛ $a = ۱,۲,۳$ **دهک a ام** $D_a \approx$ ..... ؛ $a = ۱,۲,...,۹$ **صدک aام** $P_a \approx$ ..... ؛ $a = ۱,۲,...,۹۹$ **نکته تستی**:*اگه طبقات ما* **از همون اول، ..... باشن،** *و محل چندک ما دقیقاً توسط فراوانی تجمعی نسبی وجود داشته باشد، تو این حالت:* چندک مورد نظر ما =.....	۲۹۷ ۲۹۹
روز۲۰	**حل فیشهای : ۲۸۹-۲۹۴-۲۹۷-۳۰۰**	
روز ۲۱	رابطه بین انواع میانگین: میانگین ..... ≤ میانگین ..... ≤میانگین ..... اگر ....., هر سه میانگین فوق با هم برابر میشن.	۳۰۴

روز ۲۱	**روش تستی برای محاسبه میانگین حسابی:** اگر داده‌ها نسبت به مرکز شون **فاصله‌های متقارن** داشته باشند، بعد از مرتب کردن داده‌ها بصورت صعودی: **الف)** اگر تعداد داده‌ها **فرد** باشد ⟵.....، میانگین حسابی داده‌ها است. **ب)** اگر تعداد داده‌ها **زوج** باشد ⟵.....، میانگین حسابی است. **مقایسه جالب:** دقیقاً مثل همون چیزی که قبلاً در مورد محاسبه **میانه** در داده‌های **خام** یاد گرفته بودیم که: اگر تعداد داده‌ها **فرد** باشد ⟵ میانه، ..... است. اگر تعداد داده‌ها **زوج** باشد ⟵ میانه برابر با ..... است.	۳۰۹
روز ۲۱	**رابطه بین میانگین حسابی و تصاعد حسابی:** = مجموع جملات یک تصاعد حسابی **: میانگین حسابی یک تصاعد حسابی**	۳۱۲
روز۲۱	**حل فیشهای : ۳۰۷-۳۰۸-۳۰۹-۳۱۵**	
روز ۲۲	فرمول محاسبه میانگین حسابی در داده های نوع دوم: الف) با داشتن فراوانی مطلق: ب) با داشتن فراوانی نسبی: ج) میانگین موزون (وزنی):	۳۱۷ ۳۱۹ ۳۲۲
روز ۲۲	نکته **تستی**: **در جدول فراوانی، اگر فراوانی همه طبقات یکسان باشد، می‌توان تمام فراوانی‌ها را ..... در نظر گرفت.** **نتیجه مهم:هرگاه تمامی فراوانی‌ها را بر یک عدد ثابت تقسیم کنیم، میانگین این داده‌ها .....**	۳۲۴ ۳۲۵
روز ۲۲	**معایب میانگین:** **الف)** در توزیع‌های ..... میانگین شاخص مرکزی مناسبی **نیست**، زیرا در مرکز توزیع مشاهدات قرار نمی‌گیرد و بنابراین بجای آن باید از ..... استفاده کرد. **ب)** در توزیع‌هایی که دارای تعداد ..... مشاهده ..... در ابتدا و انتها هستند، مقدار میانگین، غیر واقعی خواهد بود، بنابراین در این توزیع‌ها بهتر است از ..... استفاده شود. **ج)** در جداول فراوانی با حدود .....، نمی‌توان میانگین را حساب کرد.	۳۳۰
روز۲۲	**حل فیشهای : ۳۱۹-۳۲۱-۳۲۴-۳۲۶-۳۲۸**	
روز ۲۳	**۲ خاصیت مهم میانگین حسابی:** ۱. مجموع انحرافات (تفاضلات) داده‌ها از **میانگین**..... است: $\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)=\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})=.....$ ۲. مجموع **مجذور (توان دو)** انحرافات (تفاضلات) داده‌ها از **میانگین**، ..... است: $\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2=\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2=.....$ **نکته مهم**: خواص مهم میانگین حسابی (۲ خاصیت بالا)، تنها بایستی بصورت **..... و بدون .....** بیان شود،ولی خاصیت مهم میانه بایستی بصورت **..... و بدون .....**بیان شود.	۳۳۱ ۳۳۲ ۳۳۴
روز ۲۳	فرمول محاسبه میانگین کل: μ_T : **میانگین کل (مرکب)** =	۳۳۸
روز ۲۳	**حالات خاص در محاسبه میانگین مرکب:** ۱) اگر میانگین جوامع باهم برابر باشند: اگر: $\mu_1=\mu=...=\mu_k=\mu \Rightarrow$ **میانگین کل** : $\mu_T=.....$ ۲) اگر تعداد عضوهای جوامع باهم برابر باشند: اگر: $N_1=N_2=...=N_k=N \Rightarrow \mu_T=.....$	۳۴۰ ۳۴۱
روز۲۳	**حل فیشهای : ۳۳۵-۳۳۶-۳۳۸-۳۴۳-۳۴۵**	
روز ۲۴	**نکته تستی برای محاسبه میانگین حسابی:** اگه توزیع داده ها به شکل **متقارن (قرینه)** باشه، اون وقت میانگین حسابی، برابر با .....خواهد بود.	۳۵۲

روز ۲۴	**خواص میانگین حسابی:** $y_i = x_i \pm a \rightarrow \mu_y = ...$ $y_i = (x_i \pm a) \times b \rightarrow \mu_y = ...$ $y_i = \frac{1}{b} x_i \rightarrow \mu_y = ...$ $y_i = b x_i \rightarrow \mu_y = ...$ $y_i = b x_i \pm a \rightarrow \mu_y = ...$ $y_i = \frac{(x_i \pm a)}{b} \rightarrow \mu_y = ...$	۳۵۷ ۳۵۹ ۳۶۱ ۳۶۵
روز۲۴	**حل فیشهای : ۳۴۸-۳۵۰-۳۵۲**	
روز ۲۵	**روش کوتاه یا کدگذاری برای محاسبه میانگین حسابی:** ابتدا مرکز تمام طبقات را از .....کم کرده و سپس اونو بر ..... تقسیم می‌کنیم و با این کار، متغیر U_i را به صورت $U_i = ...$ تشکیل می‌دهیم. **توجه:** بعد از محاسبه میانگینِ U_iها (یعنی $\bar{U}$)، برای محاسبه میانگین x_iها (یعنی $\bar{x}$) بایستی ابتدا $\bar{U}$ را در .....ضرب و سپس مقدار ..... را به آن اضافه کنیم: $\bar{x} = \bar{U} \times ..... + ...$: *میانگین داده‌های اصلی* **تذکر:** موقع استفاده از روش **کدگذاری** اگه تعداد طبقات ما **زوج** باشه، اون وقت بجای ۱ طبقه، ۲ طبقه در وسط قرار می‌گیرن. تو چنین حالتی دیگه فرق نمی‌کنه که مرکز کدوم یک از این ۲ طبقه وسطی رو به عنوان ..... در نظر بگیریم.	۳۶۲
روز ۲۵	**یادآوری:** برای محاسبه فراوانی **مطلق** هر طبقه، کافیه که فراوانی ..... رو منهای فراوانی ..... کنیم، یعنی: $F_i = ... - .....$	۳۷۲
روز ۲۵	**نتیجه کاربردی:** پس از محاسبه سریع‌تر y_iها در روش کدگذاری، فقط کافیه ..... رو حساب کنیم و سپس این مقادیر رو ..... کنیم و در طرف مقابل بنویسیم.	۳۷۶
روز۲۵	**حل فیشهای : ۳۶۶-۳۶۹-۳۷۰-۳۷۲-۳۷۴-۳۷۷**	
روز ۲۶	**نحوه محاسبه میانگین پیراسته (۳ گام):** **گام ۱)** داده‌ها را به صورت .....مرتب می‌کنیم. **گام ۲)** از ابتدا و انتهای داده‌ها به موقعیت .....رفته و آنگاه ..... **گام ۳)** میانگین **حسابی**..... را محاسبه می‌کنیم: $\frac{\text{مجموع} .....}{\text{تعداد} .....}$ = *میانگین حسابی پیراسته* **نکته:** زمانی که $LN = ۲۵٪$ باشد. در این حالت، حاصل $LN \times N$٪ در واقع نشان‌دهندهٔ ..... خواهد بود. **نکته: در گام ۲ اگر حاصل $LN \times N$٪ ، یک عدداعشاری شود، آن را به ..... گرد می‌کنیم.** **نکته مهم:** اگه تو تست‌ها یا مسائل، به ما مقدار LN درصد، رو نداده باشن، به طور پیش فرض اونو ..... در نظر می‌گیریم.	۳۷۹ ۳۸۰ ۳۸۱ ۳۸۱
روز ۲۶	**نحوه محاسبه میانگین وینزوری (۳ گام):** **گام ۱)** داده‌ها را به صورت ..... مرتب می‌کنیم. **گام ۲)** از ابتدای داده‌ها به موقعیت $LN \times N$٪ رفته و ..... سپس از انتهای **داده‌ها به سمت عقب و به موقعیت** $LN \times N$٪ رفته و ..... **گام ۳)** میانگین حسابی..... را محاسبه می‌کنیم. **تذکر:** در صورتی که حاصل $LN \times N$٪ عددی اعشاری باشد، آن را به سمت .....گرد می‌کنیم. **توجه:** در محاسبه میانگین وینزوری تعداد داده‌ها در مخرج کسرِ $\frac{\sum x}{N}$ تغییر .....، ولی در میانگین پیراسته، تعداد داده‌ها در مخرج کسر، ..... از قبل میشه.	۳۸۸ ۳۸۹
روز ۲۶	**تفاوت میانگین پیراسته و وینزوری:** ۱) تو میانگین .....، **حذف** داده‌ها رو داریم ولی تو میانگین ..... حذف داده‌هارو نداریم، بلکه فقط **جایگزینی** داده‌ها رو داریم. ۲) تو میانگین .....، فقط میانگین داده‌های **باقیمونده (حذف نشده)** رو حساب می‌کنیم ولی تو میانگین .....، میانگین **همه**داده‌ها رو حساب می‌کنیم.	۳۹۰

روز ۲۶	**«کاربرد میانگین پیراسته و وینزوری»** **۱.** در توزیع‌های ..... میانگین پیراسته و وینزوری **تقریباً به خوبی میانگین حسابی** است. **۲.** در توزیع‌های .....، میانگین پیراسته و وینزوری **بهتر از میانگین حسابی** بوده و بجای آن به عنوان شاخص مرکزی بکار می‌روند.	۳۹۳ ۳۹۴
روز۲۶	**حل فیشهای : ۳۷۹-۳۸۲-۳۸۴-۳۸۶-۳۸۸**	
روز ۲۷	**مقایسه شاخص های مرکزی از نظر ثبات و پایداری:** **.....>.....>.....**	۳۹۵
	مقایسه امکان پذیری محاسبه شاخص های مرکزی در مقیاس های کمی و کیفی: مقیاس‌های **کیفی**: **اسمی (طبقه‌ای)**، **رتبه‌ای (ترتیبی)** مقیاس‌های **کمّی**: **فاصله‌ای**، **نسبی** شاخص مرکزی / مقیاس: **میانگین**، **میانه**، **مد**	۳۹۹
روز ۲۷	مقایسه ویژگیهای مهم شاخص های مرکزی: ویژگی مهم مد:**حداقل**..... در شاخص **مد** ویژگی مهم میانه:**حداقل** ..... در شاخص **میانه** ویژگی مهم میانگین: **حداقل**..... در شاخص **میانگین**	۴۰۰
روز ۲۷	**فرمول محاسبه میانگین هارمونیک در داده‌های نوع اول:**	۴۰۱
روز ۲۷	**فرمول محاسبه میانگین هارمونیک در داده‌های نوع دوم:** **۱) با داشتن** F_i: ۱) $\bar{X}_H$ یا $\mu_H =$ ..... **۲)با داشتن** f_i: ۲) $\bar{X}_H$ یا $\mu_H =$	۴۰۳
روز ۲۷	**نکته**: با پیوسته کردن طبقات، مرکز طبقات تغییر ..... پس برای محاسبه میانگین هارمونیک در طبقات فاصله‌ای، نیازی به پیوسته کردن طبقات	۴۰۸
روز۲۷	**حل فیشهای : ۴۰۱-۴۰۳-۴۰۶-۴۰۷**	
روز۲۸	**حل فیشهای : ۴۱۴-۴۱۸-۴۲۰-۴۲۳-۴۲۵-۴۲۷**	
روز ۲۹	**فرمول محاسبه میانگین هندسی در داده‌های نوع اول:** میانگین **هندسی** داده‌ها برابر است با: **ریشه** ..... **آن داده‌ها**	۴۳۰
روز ۲۹	**نحوه محاسبه میانگین هندسی در داده‌های نوع دوم (میانگین هندسی موزون):** **۱) اگر وزن، فراوانی مطلق باشد:** $w_i = F_i \Rightarrow \bar{X}_G =$ ..... **۲) اگر وزن، فراوانی نسبی باشد:** $\xrightarrow{w_i = f_i} \bar{X}_G =$	۴۳۵
روز۲۹	**حل فیشهای : ۴۳۱-۴۳۳-۴۳۷-۴۴۰**	
روز ۳۰	**نحوه محاسبه میانگین هندسی در یک تصاعد هندسی:** میانگین هندسی یک تصاعد هندسی برابر ..... خواهد بود.	۴۴۴
روز ۳۰	**موارد کاربرد میانگین هندسی (۵ مورد):**	۴۴۶

روز ۳۰	**نتیجه مهم:** اگه داده‌های ما به صورت **درصد** باشن، اول باید اونا رو به صورت ..... بنویسیم تا بعدش بتونیم اونا رو تو فرمول میانگین هندسی قرار بدیم: x_i ها باید به صورت ..... باشن $\Rightarrow \bar{X}_G = \sqrt[N]{x_1 \times x_2 \times ... \times x_N}$	۴۴۸
	نحوهٔ تبدیل داده‌های برحسب درصد رشد (نرخ رشد) به داده‌های برحسب «چند برابر»:	
	گام ۱) اول میاییم مقدار سال قبل (سال پایه) رو مساوی ..... در نظر می‌گیریم.	۴۵۲
	گام ۲) ..... رو به این ..... اضافه می‌کنیم.	
روز ۳۰	**شیوه اول (اگه سال پایه رو ۱۰۰٪ در نظر بگیریم) :** (برابر) ... = درصد .....+ درصد	
	شیوه دوم (اگه مقدار سال پایه رو (در نظر بگیریم): (برابر) ... = مقدار ..... + مقدار	۴۵۳
	نتیجه: شیوهٔ دوم خیلی راحت‌تر از شیوهٔ اوله. فقط موقع استفاده از این شیوه باید یادمون باشه که اول باید درصد رشد رو از حالت ..... خارج کنیم تا بتونیم اونو با مقدار ..... که حالت غیردرصدی داره، جمع کنیم.	
روز ۳۰	**نکته مهم:** **تو مسائل میانگین هندسی اگه دیدیم گزینه‌هامون برحسب** درصد **هستن، باید بعد از محاسبه** $\bar{X}_G$ **، اونو ..... کنیم و بعد** .....**کنیم تا برحسب** درصد **بدست بیاد:** ..... **:** *متوسط رشد (برحسب درصد)*	۴۵۵
روز ۳۰	**حل فیشهای : ۴۴۷-۴۴۹-۴۵۱-۴۵۶**	
روز ۳۱	**نحوهٔ تبدیل داده‌های غیرنسبی (واحد دار) به داده‌های نسبی (بدون واحد=چند برابر):**	
	بایدهر داده رو به دادهٔ ..... تقسیم کنیم تا به چندتا نسبت (کسر) برسیم که در واقع این نسبت‌ها (کسرها) همون داده‌های نسبی ما محسوب میشن.	۴۵۹
	توجه: کار تقسیم کردن رو باید از ..... داده شروع کنیم، نه از ..... داده،چون.....	۴۶۰
	نکته: **تعداد داده‌های نسبی (تعداد کسرها) به اندازهٔ ..... از تعداد داده‌های غیرنسبی.....**	۴۶۱
	فرمول محاسبه میانگین هندسی در مسائل **نوع سوم:**	
	نکته مهم: **در همه مسائلِ میانگین هندسی (نوع اول، دوم یا سوم)، یادمون باشه اون چیزی که از فرمول** μ_G **به عنوان میانگین داده‌ها به دست میاریم، همیشه دارای مفهوم** ..... **مثلاً اگه** $\bar{X}_G = ۲$ **بدست بیاد، به مفهوم**	
	بنابراین اگه تو تست‌ها دیدیم که گزینه‌های ما به صورت «چند برابر» نیستن، بلکه برحسب **درصد** بیان شده‌اند، اون وقت اول باید $\bar{X}_G$ رو ..... کنیم و سپس اونو ..... کنیم تا بر حسب **درصد** بدست بیاد: **برحسب درصد** **«چند برابر»** $\bar{X}_G \Rightarrow$	
روز ۳۱	**نکته:** اگر مسئله بجای اینکه مقدار داده‌ها رو در تمام سال‌ها به ما بده، فقط بیاد مقدار سال اول و سال آخر رو بده، اون وقت باید شصت‌مون خبردار بشه که مسئله ما از **نوع** ..... مسائل **هندسی** است.چون فقط تو مسائل نوع ..... که ما می‌تونیم میانگین **هندسی** رو فقط با استفاده از ۲ دادهٔ اول و آخر، از رابطهٔ روبرو بدست بیاریم: $\bar{X}_G = \sqrt[N-۱]{\frac{\text{دادهٔ .....}}{\text{دادهٔ .....}}}$	۴۶۴
	$\sqrt[۲]{۲/۲۵} = ...$, $\sqrt[۲]{۱/۴۴} = ...$, $\sqrt[۲]{۱/۲۱} = ...$	۴۶۵
روز ۳۱	**ارتباط بین میانگین هندسی و چولگی توزیع:**	
	۱) اگر میانگین هندسی.....باشد ← چولگی **منفی (به چپ)** است.	۴۶۶
	۲) اما اگر میانگین هندسی..... باشد ← چولگی **مثبت (به راست)** است.	۴۶۷
روز ۳۱	**حل فیشهای: ۴۵۹-۴۶۴-۴۶۶**	
	DLM	

روز	باکس CTS (فصل ۴): « جمع بندی خلاصه نکات ، فرمول‌ها و روابط مهم هرسرفصل»	فلش کارت
روز ۳۳	**تفاوت شاخص‌های پراکندگی مطلق و نسبی:** شاخص‌های پراکندگی ..... دارای مقیاس (واحد یا بُعدِ) اندازه‌گیری داده‌ها هستند، اما شاخص‌های پراکندگی ....., بدون مقیاس (بُعد یا واحدِ) اندازه‌گیری هستند. **توضیح**: شاخص‌های پراکندگی نسبی از تقسیم یه شاخص ..... بر یه شاخص ..... بدست میان.	۴۷۳
روز ۳۳	**فرمول محاسبه دامنه تغییرات:** برای داده‌های **گسسته** → $R =$ ..... : دامنهٔ تغییرات **ناافراگیر** برای داده های **پیوسته** → $R =$ ..... دامنهٔ تغییرات **فراگیر** **نکته مهم**:اصولاً در مباحث مالی، شاخص‌های **پراکندگی** بیانگر ..... هستند.	۴۷۵ ۴۸۳
روز ۳۴	**ویژگی‌های دامنهٔ تغییرات:** $R = \ldots\ldots \overset{\text{دوطرفه}}{\Longleftrightarrow} x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ $\xrightarrow{y_i = x_i + a} \boxed{R_{(y)} = \ldots\ldots}$ $\xrightarrow{y_i = x_i - a} \boxed{R_{(y)} = \ldots\ldots}$ $\boxed{y_i = \alpha x_i \Rightarrow R_y = R_{(ax)} = \ldots\ldots}$ $\boxed{y_i = \frac{x_i}{a} \Rightarrow R_{(y)} = R_{(\frac{x}{a})} = \ldots\ldots}$ $y_i = ax_i \pm b \longrightarrow \boxed{R_{(y)} = \ldots\ldots}$ **نتیجه**:از این به بعد موقع محاسبهٔ دامنهٔ تغییرات، هر وقت دیدیم داده‌های ما با عددی **جمع** یا **منها** شده‌اند ..... $\begin{cases} \text{اگر}: y_i = \frac{x_i \pm a}{b} \longrightarrow \boxed{R_{(y)} = R_{(\frac{x}{b})} =} \\ \text{اگر}: y_i = (x_i \pm a)b \longrightarrow \boxed{R_{(y)} = R_{(bx)} =} \end{cases}$	۴۸۵ ۴۸۷ ۴۸۸ ۴۸۹ ۴۹۰ ۴۹۰
روز ۳۴	فرمول محاسبه نیم دامنه (دامنه میان چارکی): $\boxed{IQR = \ldots\ldots}$ فرمول محاسبه انحراف چارکی: اگر تمام داده‌ها از چارک اول تا چارک سوم با هم برابر باشن، اون وقت «دامنه میان چارکی» برابر ..... می‌شود و در نتیجه «انحراف چارکی یا نیمه میان چارکی» ..... می شه.	۴۹۱ ۴۹۳ ۴۹۵
روز۳۴	**حل فیش: ۴۹۶**	
روز ۳۵	موارد استفاده از انحراف چارکی به عنوان شاخص پراکندگی (۳ مورد):	۵۰۲
روز ۳۵	خواص نیم دامنه و انحراف چارکی: $\begin{cases} IQR_{(\frac{x}{a})} = \\ SIQR_{(\frac{x}{a})} = \end{cases}$ $\begin{cases} IQR_{(ax)} = \ldots\ldots \\ SIQR_{(ax)} = \ldots\ldots \end{cases}$ $\begin{cases} IQR_{(x \pm a)} = \ldots\ldots \\ SIQR_{(x \pm a)} = \ldots\ldots \end{cases}$ **تذکر مهم**: مقدار تمام شاخص‌های پراکندگی از جمله «دامنهٔ تغییرات R»، «نیم دامنه» و «انحراف چارکی» همواره عددی..... است.	۵۰۷ ۵۰۸ ۵۰۹ ۵۰۹
روز ۳۵	فرمول محاسبه انحراف متوسط از میانگین: الف) داده های بدونْ فراوانی: $A.D_\mu =$ ب) داده های با فراوانی: $\begin{cases} \text{با فراوانی مطلق}: AD_\mu = \\ \text{با فراوانی نسبی}: AD_\mu = \end{cases}$	۵۱۲

روز۳۵	**حل فیشهای: ۴۹۸- ۵۰۰-۵۰۵**	
روز ۳۶	**خواص انحراف متوسط از میانگین و سایر شاخصهای مطلق پراکندگی:** $x_1=x_2=...=x_n \overset{\text{دو طرفه}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} R=..... \ , \ IQR=..... \ \text{و} \ SIQR=..... \\ AD_\mu=..... \ \text{و} \ \delta=..... \ \text{انحراف معیار} \ \delta^2=..... \ \text{واریانس:} \end{cases}$ $R_{(x\pm a)}=.....$, $IQR_{(x\pm a)}=.....$, $SIQR_{(x\pm a)}=.....$ $AD_{\mu(x\pm a)}=.....$, $\delta^2_{(x\pm a)}=.....$, $\delta_{(x\pm a)}=.....$ $R_{(ax)}=.....$, $IQR_{(ax)}=.....$, $SIQR_{(ax)}=.....$ $AD_{\mu(ax)}=.....$, $\delta_{(ax)}=.....$ $R_{(\frac{x}{a})}=.....$, $IQR_{(\frac{x}{\lvert a\rvert})}=.....$, $SIQR_{(\frac{x}{a})}=.....$ $AD_{(\frac{x}{a})}=.....$, $\delta_{(\frac{x}{a})}=.....$, $\delta^2_{(\frac{x}{a})}=.....$ انحراف متوسط اعداد ثابت ..... است.	۵۲۳ ۵۲۳ ۵۲۵
روز۳۶	**حل فیشهای: ۵۱۸-۵۲۰-۵۲۱**	
روز ۳۷	**۱)** جامعه‌ای که واریانس یا انحراف معیار ***کمتری*** داشته باشه، **پراکندگی** ..... داره و از **دقت** .....برخورداره. **۲)** جامعه‌ای که واریانس یا انحراف معیار ***بیشتری*** داشته باشه، **پراکندگی** ..... هم داره و **دقت اندازه‌گیری** .....***کمتره.***	۵۳۸
روز ۳۷	**فرمول محاسبه واریانس و انحراف معیار در داده‌های خام (۲فرمول):** **نکته**: شاخص ..... ، ***مهمترین*** شاخص ***پراکندگی*** است و شاخص ..... ***مهمترین شاخص مرکزی*** است.	۵۴۰ ۵۴۲
روز۳۷	**حل فیشهای: ۵۲۹-۵۳۹**	
روز ۳۸	**واریانس و تصاعد حسابی:** $\delta^2=.....$: میانگین تصاعد حسابی **نکته**: در یک حالت خاص در تصاعد حسابی، اگر $d=1$ باشه، یعنی اگه اعداد یا داده‌ها، **متوالی** باشن: $\delta^2=.....$	۵۴۵ ۵۴۶ ۵۴۹
روز ۳۸	**فرمول محاسبه واریانس و انحراف معیار در داده‌های نوع دوم و سوم:** **الف) با داشتن فراوانی مطلق**(F_i): ۱) $\delta^2=.....$ ۲) $\delta^2=.....$ **ب) با در اختیار داشتن فراوانی نسبی**(f_i): ۱) $\delta^2=.....$ ۲) $\delta^2=.....$	۵۵۰
روز۳۸	**حل فیشهای: ۵۴۷-۵۵۲-۵۵۳-۵۵۴-۵۵۵-۵۵۶-۵۵۷-۵۵۹**	
روز ۳۹	**خواص واریانس و انحراف معیار:** $x_1=x_2=...=x_N \leftrightarrow \delta^2=..... \ , \ \delta=.....$ واریانس و انحراف معیار هر مقدار ثابت مانند a برابر ..... است. $\delta^2_{ax}=.....$ $\delta_{ax}=.....$ $\delta^2_{\left(\frac{x}{a}\right)}=.....$ $\delta_{\left(\frac{x}{b}\right)}=.....$	۵۶۱ ۵۶۳
روز۳۹	**حل فیشهای: ۵۶۵-۵۶۷-۵۷۴-۵۷۵**	
روز ۴۰	**نحوه محاسبه واریانس یا انحراف معیار از روش کدگذاری (۵ گام):** **گام ۱)** ***مرکز طبقه*** ..... یا مرکز طبقه‌ای که ..... ***را انتخاب*** می‌کنیم و اون رو ..... می‌نامیم. **گام ۲)** مرکز تمامی طبقات رو از ..... کم می‌کنیم. **گام ۳)**سپس عبارت فوق را بر ..... تقسیم می‌کنیم: **داده‌های جدید:** $U_i=\frac{x_i-.....}{.....}$ **گام ۴)** شاخص مربوطه (مثلاً δ^2) را برای این داده‌های جدید (U_iها) حساب می‌کنیم.	۵۸۷ ۵۸۸

	گام ۵) در مرحلهٔ آخر، از **خواص** شاخص مربوطه استفاده می‌کنیم تا مقدار شاخص را برای داده‌های **اصلی** (x_i**ها**)بدست آوریم. $\delta_x = \dots\dots\times\dots\dots$ ، $\delta_x^2 = \dots\dots\times\dots\dots$	۵۸۸
	نکته مفید (مهم): وقتی از روش ***کدگذاری*** برای محاسبه μ, δ^2 و ... استفاده می‌کنیم، یادمون باشه که حتماً و حتماً U_iهای ما **به اندازهٔ .....** با هم اختلاف دارن، و نکته دیگه اینکه برای اون طبقه‌ای که مرکزش رو به عنوان a در نظر می‌گیریم،همیشه مقدار U_i مساوی **.....** میشه.	۵۸۹
	تکنیک تستی: برای نوشتن سریع اعداد سطر U_i، اول میاییم برای طبقه‌ای که مرکزش رو a در نظر گرفتیم، U_i رو مساوی ..... قرار می‌دیم و بعد، برای نوشتن U_iهای سمت راستی، ..... و برای نوشتن U_iهای سمت چپی،	
روز ۴۰	**حل فیشهای: ۵۷۶-۵۷۸-۵۸۰-۵۸۲-۵۸۳-۵۸۵-۵۸۷**	
روز ۴۱	فرمول محاسبه واریانس **نمونه**: $s^2 = \dots\dots\dots\dots$	۵۹۰
	فرمول واریانس تصاعد حسابی، یعنی: $\delta^2 = \frac{d^2 \quad N^2 - 1}{12}$ فقط برای داده‌های **.....** کاربرد داره و نه برای داده‌های **.....**.	۵۹۵
روز ۴۱	**فرمول محاسبه واریانس تصحیح شده شپارد:** $\delta_C^2 = \dots\dots\dots\dots$:(واریانس شپارد) **شرایط استفاده از تصحیح شپارد :**	۵۹۹
	شرط ۱)متغیر x باید ..... باشد. مانند:	۶۰۰
	شرط ۲) تعداد داده‌ها ..... باشد.	
	شرط ۳) توزیع فراوانی جامعه، باید ..... باشد یا اینکه .....باشد (یعنی شباهت زیادی به توزیع ..... داشته باشه).	
روز ۴۱	**حل فیشهای: ۵۹۲-۵۹۴-۵۹۶-۶۰۲-۶۰۳**	
روز ۴۲	نیمه واریانس برابر است با: «**متوسط مجذور** ..... **از میانگین‌شان**»	۶۰۵
	۱) اگه داده‌های ما مربوط به سود باشن، اون وقت مقادیری که ..... از میانگینِ سود باشن، برای ما نامطلوب اند	۶۰۴
	۲)و اگه داده‌های ما مربوط به زیان باشن، اون وقت مقادیری که ..... از میانگینِ ضرر هستن، برای ما نامطلوب هستن.	۶۰۵
	فرمول محاسبه نیمه واریانس: **نکته مهم**: اگر چه در محاسبه نیمه واریانس تنها x_iهای ..... رو در نظر می‌گیریم، اما برای محاسبهٔ میانگینی (μ) که در فرمول نیمه واریانس بکار میره، بایستی ..... **را** در نظر بگیریم، نه فقط .. .. رو. به همین دلیل، موقع محاسبه میانگین، در مخرج کسر از ..... استفاده می کنیم و نه از ..... : $\mu = \frac{\sum x_i}{\dots\dots}$	
روز ۴۲	فرمول محاسبه واریانس کل: $\delta_T^2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$:**واریانس کل**	۶۱۴
روز ۴۲	**حل فیشهای: ۶۰۶-۶۱۲**	
روز ۴۳	**حالات خاص در محاسبه واریانس کل:** الف) اگر میانگین جوامع با هم برابر باشند. $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k \overset{\text{آنگاه}}{\Rightarrow} \delta_T^2 = \dots\dots\dots\dots$	۶۱۶
	ب) اگر میانگین همه جوامع با هم برابر نباشد ، یعنی حداقل میانگین دوجامعه با هم فرق داشته باشد، آنگاه: «واریانس کل، از میانگین واریانس این k جامعه ..... خواهد بود.»	۶۱۷
روز ۴۳	**حل فیشهای : ۶۲۰-۶۲۲-۶۲۵-۶۲۷**	
	DLM	

روز	باکس CTS (فصل ۵): « جمع بندی خلاصه نکات ، فرمول‌ها و روابط مهم هر سرفصل»	فلش کارت
روز۴۵	فرمول محاسبه ضریب تغییرات: $\text{ضریب تغییرات (پراکندگی)} = \dots\dots\dots \Rightarrow \begin{cases} \text{برای جامعه} = CV = \dots\dots \\ \text{برای نمونه} = CV = \dots\dots \end{cases}$	۶۳۵
روز۴۵	**نکته ۱**:علامت شاخص ضریب تغییرات (یعنی مثبت یا منفی بودن آن) تنها به علامت میانگین (μ) بستگی دارد: **الف)** اگه .....**مثبت** باشه، $\frac{\delta}{\mu}$ ..... میشه **ب)**اگه .....**منفی** باشه، $\frac{\delta}{\mu}$ ..... میشه **۲ حالت خاص**: **ج)** اگه انحراف معیار **صفر** باشه، ضریب تغییرات ..... میشه. **د)** اگه میانگین **صفر** باشه، ضریب تغییرات ..... خواهد بود.	۶۳۶
روز۴۵	**حل فیشهای: ۶۳۸-۶۳۹-۶۴۰-۶۴۱-۶۴۲-۶۴۴**	
روز۴۶	**خواص ضریب تغییرات:**	۶۴۶
	۱) قاعده کلی: به‌طور کلی برای هر عدد ثابت (مانند a)، مقدار **تمام** شاخصهای مطلق پراکندگی و نیز مقدار ضریب تغییرات برابر	
	۲) قاعده کلی: **اگه تمام داده‌ها باهم برابر باشن، مقدار تمام شاخصهای مطلق پراکندگی (مثل واریانس و غیره) و نیز مقدار ضریب تغییرات برابر ..... است و بالعکس.** $CV_{(x \pm a)} =$ **الف) اگه یه مقدار مثبتی (مانند a) رو به تمام داده‌ها اضافه کنیم، مقدار ضریب تغییرات ..... می‌یابد.** ۶۴۷ **ب) اگه یه مقدار مثبتی (مانند a) رو از تمام داده‌ها کم کنیم، مقدار ضریب تغییرات ..... پیدا می‌کنه.** ۶۴۸	
روز۴۶	**الف)** اگه تمام داده‌ها در یه عدد **مثبت** ($b > ۰$) ضرب یا بر اون تقسیم بشن، مقدار CVتغییر ..... و علامتش هم ..... میشه: $\xrightarrow{\text{اگه } b \text{ مثبت باشه } (b>۰)} CV_{(bx)} = \dots\dots \qquad CV_{(\frac{x}{b})} = \dots\dots$	۶۴۹
	نکته بسیار مهم: اگه در تستها گفتند که واحد اندازه‌گیری داده‌ها تغییر کرده (مثلاً از تومان به ریال)، آنگاه **مقدار و علامت** CV.....	
	ب) اگه تمام داده‌ها رو در یه عدد **منفی** ($b < ۰$) ضرب یا بر اون تقسیم کنیم، **مقدار** CV **تغییر** ..... و **علامتش**، ..... میشه: $\xrightarrow{\text{اگه } b<۰} CV_{(bx)} = \dots\dots \qquad CV_{(\frac{x}{b})} = \dots\dots$	۶۵۰
	$CV_{(x+\frac{a}{۱۰۰}x_i)} = CV_{(۱+\frac{a}{۱۰۰})x} = \dots\dots$	۶۵۱
	نکته بسیار مهم: باتوجه به این خاصیت، اگه در تستها گفتند که مثلاً : ۱) به حقوق همه کارکنان، ۲۰ درصد اضافه یا کم می‌کنیم و یا **۲)** قد و وزن افراد، مثلاً ۱۰ درصد اضافه میشه ، دراین حالتها، مقدار ضریب تغییرات،	۶۵۲
روز۴۶	**حل فیشهای: ۶۵۳-۶۵۷-۶۵۸**	
روز۴۷	**موارد کاربرد ضریب تغییرات برای مقایسه دو جامعه آماری از نظر ثبات و پراکندگی:** **۱- هنگامی که واحدهای اندازه‌گیری ۲ جامعه ..... باشند.** ۶۶۱ **۲- اگه داده‌های ۲ جامعه دارای میانگین‌های ..... باشن، به عبارت دیگر، داده‌ها ..... بیان شوند.** ۶۶۲	
روز۴۷	**توجه**: دو مفهوم «ثبات» و «پراکندگی» باهم **رابطه** ..... دارند.	۶۶۶
روز۴۷	فرمول **انواع گشتاورها**: **الف)** گشتاور حول **نقطه دلخواه a**(گشتاورهای **عمومی**): $M_n(a) =$ **ب)**گشتاور حول **مبدأ صفر** (گشتاورهای **اولیه**): $M_n(۰) = m_n =$ **ج)** گشتاور حول **میانگین** (گشتاورهای **مرکزی**): $M_n(\mu) = \mu_n =$	۶۷۰
روز۴۷	**حل فیشهای: ۶۶۶-۶۶۷-۶۶۸**	

روز ۴۸	**چند نتیجه‌گیری مهم**: **۱)** گشتاور مرتبه **اول** نسبت به مبدأ (صفر) یا همان گشتاور اولیه مرتبه **اول**،برابر با ..... است: $\boldsymbol{n} = ۱ \Rightarrow M_۱(\cdot) = m_۱ =$ **۲)** گشتاور مرتبه **دوم** نسبت به مبدأ صفر = گشتاور اولیه مرتبه **دوم** =.....: $\boldsymbol{n} = ۲ \Rightarrow M_۲(\cdot) = m_۲ =$ **۳)** گشتاور مرتبه **سوم** نسبت به مبدأ صفر = گشتاور اولیه مرتبه **سوم** = **میانگین مکعبات**، یعنی: $\boldsymbol{n} = ۳ \Rightarrow M_۳(\cdot) = m_۳ =$	۶۷۷
روز ۴۸	**نکته**: گشتاورهای ..... رو می‌تونیم به این صورت هم نشون بدیم: $\boxed{m_n = E(x^n)}$ که در این رابطه، $E(x)$ بیانگر «.....» یا .....است که در واقع مفهوم ..... خودمونو داره، پس هر جا که E دیدیم می‌تونیم بجاش .... رو قرار بدیم. $m_۱ = \quad = E(\ldots) = \cdots \quad m_۲ = \quad = E(\ \ ) =$ ..... میانگین $m_۳ = \quad = E(\ldots) =$ ..... میانگین	۶۷۷
روز ۴۸	**نکته مهم**: گشتاور مرتبه **دوم** نسبت به میانگین (گشتاور مرکزی مرتبه دوم) برابر	۶۸۰
روز ۴۸	فرمول واریانس رو به صورت گشتاوری: الف) به کمک گشتاورهای اولیه: $\boldsymbol{\delta_x^۲ = \mu_۲} = \cdots - \cdots$:واریانس ب) به کمک گشتاورهای عمومی: $\boldsymbol{\delta_x^۲ = \mu_۲} = \cdots - \cdots$:واریانس	۶۸۱
روز ۴۸	**نکته تستی**: گشتاور مرکزی مرتبه اول برابر .....، چون مقدار $\sum(x_i - \mu)$ همیشه برابر	۶۸۲
	نکته مهم: در توزیع‌های متقارن مقدار گشتاورهای مرکزی مرتبهٔ **فرد**، همیشه برابر ..... مثلاً: $\mu_۱ = \cdots$ ، $\mu_۳ = \cdots$ ، $\mu_۵ = \mu_۷ = \mu_{۲۱} = \cdots$	
روز ۴۸	***رابطه تبدیل بین گشتاورهای عمومی به گشتاورهای مرکزی:*** $\mu_n = (\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{گشتاورهای عمومی}})^n$:گشتاور مرکزی	۶۸۴
	توضیح مهم:همیشه هنگام تبدیل گشتاورها به یکدیگر، اون (Mیاm) هایی که **اندیس** ندارند، وقتی که به توان n می‌رسند، ..... *به جای اندیس‌شون قرار می‌گیره.*	
روز ۴۸	**رابطه تبدیل بین گشتاورهای اولیه به گشتاورهای مرکزی:** $\mu_n = (\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{گشتاورهای اولیه}})^n$: **گشتاور مرکزی**	۶۸۶
روز۴۸	**حل فیشهای: ۶۸۵-۶۸۸**	
روز ۴۹	رابطه تبدیل گشتاورهای عمومی به گشتاورهای اولیه $\boldsymbol{m_n} = (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)^n$:گشتاوراولیه رابطه تبدیل بین گشتاورهای اولیه به گشتاورهای عمومی: $\boldsymbol{M_n} = (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)^n$: گشتاورعمومی	۶۸۹ ۶۹۰
روز ۴۹	**توزیع متقارن**: هر توزیعی مثل توزیع ..... که در اون .....با هم برابر باشن رو توزیع **متقارن** می‌نامیم.	۶۹۲
روز ۴۹	**تعریف ضریب چولگی**: به ..... اصطلاحاً ضریب چولگی می‌گیم و اون رو با نماد ..... یا ....نشون می‌دیم.	۷۰۰
روز۴۹	**حل فیش: ۶۹۸**	
روز ۵۰	**انواع چولگی جوامع آماری با توجه به علامت ضریب چولگی:** حالت الف) ضریب چولگی **صفر** است$(SK = ۰)$ ⇐ توزیع ..... : .....=.....=..... حالت ب) ضریب چولگی مثبت است $(SK > ۰)$ ⇐ توزیع .....: ..... < ..... < ..... حالت ج) ضریب چولگی منفی است $(SK < ۰)$ ⇐ توزیع ..... : ..... < ..... < ..... **نکته مهم**:در همه توزیع‌ها (متقارن، چوله به راست یا چوله به چپ) **میانه همیشه .....**توزیع قرار می‌گیره (یعنی **.....**). **نتیجه مهم**:..... و ..... همیشه در دو نقطه مقابل هم در دو سر توزیع قرار می‌گیرن (یعنی هیچوقت کنار هم قرار نمی‌گیرن).	۷۰۱ ۷۰۲ ۷۰۳ ۷۰۲

	یادآوری بسیار مهم: در دو حالت (ب) و (ج) یعنی در توزیعهای نامتقارن **(چوله به راست یا چوله به چپ):** **.....**، بهترین شاخص **مرکزی** و **.....**، بهترین شاخص **پراکندگی** است.	۷۰۴
روز ۵۰	**توجه کنین که**: منظور از **تمایل به راست، یعنی اینکه توزیع** چوله به .....است.	۷۰۵
روز ۵۰	**نتیجه مهم**:هرگاه مقدار بیشتر یه صفت بر مقدار کمترش ترجیح داشته باشد (مثل نمره)، اون توزیعی بهتر و مطلوب‌تره که چوله به ..... باشه (یعنی چولگی ..... داشته باشه). و اگر مقدار کمترِ یه صفت بر مقدار بیشترش ترجیح داره (مثل وزن)، اون توزیعی بهتره که چوله به ..... باشه (یعنی چولگی ..... داشته باشه).	۷۰۸
روز ۵۰	**چگونگی تفسیر قدر مطلق ضریب چولگی (۳ حالت):** **توجه**: برای تفسیر مقدار ضریب چولگی از اعداد ..... **و** ..... به شکل زیر استفاده می‌کنیم: **الف)** اگه ... ...جامعه از نظر تقارن **تقریباً نرماله (تقریباً متقارنه)**، یعنی **تقریباً چولگی نداره** (و در نتیجه چولگی این توزیع **قابل اغماض و چشم‌پوشیه).**	۷۱۱
	ب) اگه .....، اون‌وقت جامعه از نظر تقارن **تفاوت اندکی با توزیع نرمال (مقارن) داره**، یعنی میزان **چولگی کم و خفیفه** (در نتیجه چولگی این توزیع **غیرقابل اغماض یا غیرقابل چشم‌پوشیه**).	
	ج) .... ، در این حالت، جامعه از نظر تقارن **تفاوت فاحش و زیادی با توزیع نرمال** داره، یعنی میزان **چولگی (کجی) شدید و زیاده** (در نتیجه در این حالت هم مانند حالت (ب)، چولگی **غیرقابل اغماض و چشم‌پوشی** است).	۷۱۱
	توجه ۳: به عنوان یه جمع بندی کلی می‌تونیم بگیم که: اگه .... باشه⇐چولگی قابل اغماضه. ولی اگه .... باشه⇐چولگی غیرقابل اغماضه. اگه ..... $SK=$ باشه⇐توزیع بیشترین چولگیِ رو به سمت چپ داره. اگه .....$SK=$ باشه⇐توزیع بیشترین چولگیِ رو به سمت راست داره.	۷۱۲
روز ۵۰	**فرمول‌های محاسبه ضریب چولگی:** **الف)** ضریب چولگی **فیشر** (ضریب چولگی **گشتاوری**): $SK = \alpha_3 =$ = :ضریب چولگی **فیشر** (گشتاوری)	۷۱۳
	ب) ضریب چولگی **پیرسون**: **برای جامعه**: $SK_1 =$:ضریب چولگی **اول** پیرسون $SK_2 =$:ضریب چولگی **دوم** پیرسون برای نمونه، تنها کافیه بجای μ از $\bar{X}$ و بجای δ از s استفاده کنیم.	
	ج) ضریب چولگی **چندکی**: $SK_Q =$:ضریب چولگی **چارکی** $SK_P =$:ضریب چولگی **صدکی**	
روز ۵۰	**حل فیشهای: ۷۰۵-۷۰۶-۷۰۹**	
روز ۵۱	**نکته**: ضریب چولگی گشتاوری برابر است با: **«خارج قسمت .....بر .....»** **«در توزیع‌های متقارن (بدون چولگی)، مقدار گشتاورهای ..... مرتبه ..... همیشه برابر صفره»**	۷۱۸ ۷۱۹
روز ۵۱	**توجه**: منظور از **انحراف از میانگین**، همون (.... . ...) است.	۷۲۵
روز ۵۱	**حل فیشهای: ۷۱۶-۷۱۷-۷۲۳-۷۲۴-۷۲۵-۷۳۰**	
روز ۵۲	**رابطه تجربی بین سه معیار مرکزی (با توجه به فرمول ضریب چولگی پیرسون):** $\lvert SK\rvert \le ۰/۵$: اگه چولگی خفیف، متعادل و ضعیف باشه $\Rightarrow SK_1 \simeq SK_2 \Rightarrow$ ... ... $\simeq$	۷۳۳
	رابطه تجربی سه معیار مرکزی: ..... $\simeq$ ... ... **نکته ۲ (مهم):** همیشه در حل تستها بخاطر بسپرین که این دو تساوی، همیشه با ..... شروع میشن (از چپ به راست)	۷۳۴

نکته۳ (مهم): چون ... و ..... در توزیعهای نامتقارن همیشه در دو نقطه مقابل هم (یکی در سمت راست و دیگری در سمت چپ توزیع) قرار می‌گیرند، بنابراین همیشه فاصله .. ... از ..... قاعدتاً باید بیشتر از فاصله ... ... تا ..... باشه که اگه بخواهیم دقیق بگیم، فاصله ... ... از ..... بایستی تقریباً سه برابر فاصله ... ... تا ..... باشه.

تأثیر تغییر مشاهدات بر علامت و مقدار ضریب چولگی:

۷۴۲ **نکته مهم (قاعده کلی):** با هرگونه تغییری در داده‌ها، ..... ضرایب چولگی تغییر نمی کنه و فقط ممکنه که ..... تغییر کنه.

اگه: $y_i = x_i \pm a \overset{\text{آنگاه}}{\Rightarrow} SK_y =$

$y_i = ax_i \begin{cases} (\text{مثبت})a > ۰ & \Rightarrow SK_y = \\ (\text{منفی})a < ۰ & \Rightarrow SK_y = \end{cases}$

$y_i = \frac{x_i}{a} \begin{cases} (\text{مثبت})a > ۰ & \Rightarrow SK_y = \\ (\text{منفی})a < ۰ & \Rightarrow SK_y = \end{cases}$

۷۴۳ $y_i = ax_i \pm b \begin{cases} (\text{مثبت})a > ۰ & \Rightarrow SK_y = \\ (\text{منفی})a < ۰ & \Rightarrow SK_y = \end{cases}$

$y_i = \frac{x_i}{a} \pm b \begin{cases} (\text{مثبت})a > ۰ & \Rightarrow SK_y = \\ (\text{منفی})a < ۰ & \Rightarrow SK_y = \end{cases}$

$y_i = b(x_i \pm a) \begin{cases} (\text{مثبت})a > ۰ & \Rightarrow SK_y = \\ (\text{منفی})a < ۰ & \Rightarrow SK_y = \end{cases}$

$y_i = \frac{(x_i \pm a)}{b} \begin{cases} (\text{مثبت})a > ۰ & \Rightarrow SK_y = \\ (\text{منفی})a < ۰ & \Rightarrow SK_y = \end{cases}$

۷۴۴ $y_i = x_i(۱ + \%a) \Rightarrow SK_y =$

روز۵۲

روز۵۲ **حل فیشهای:** ۷۳۱-۷۳۶-۷۴۰-۷۴۵

روز۵۳ ۷۴۸ **نکته مهم:** به‌طور کلی «پراکندگی» و «کشیدگی» باهم رابطه ..... دارند.

۷۵۱ **شاخص** کشیدگی گشتاوری توزیع نرمال (متقارن) برابره با: $\alpha_۴ = \frac{\mu_۴}{\delta^۴} = \cdots$:کشیدگی گشتاوری توزیع نرمال

ضریب کشیدگی (E) = ... – .....

نکته مهم: یعنی در فرمول ..... کشیدگی، همیشه ما یه **عمل منها** باید انجام بدیم، ولی در ..... کشیدگی چنین چیزی نداریم:

ضریب **کشیدگی گشتاوری** (E) = ... - ... ... $\Rightarrow$ $\mathbf{E = \cdots - \ldots}$

۷۵۲ روز۵۳ شاخص کشیدگی **گشتاوری** توزیع نرمال برابر .. .. است ولی شاخص کشیدگی **چندکی** توزیع نرمال برابر با ..... است، یعنی:

کشیدگی چندکی توزیع نرمال $= \frac{SIQR}{P_{۹۰} - P_{۱۰}} =$ ... ...

اما برای محاسبه **ضریب** کشیدگی چندکی یه جامعه، باید یه عمل **تفریق** رو به صورت زیر انجام بدیم:

ضریب **کشیدگی چندکی** (E_P) = ... - ... ... $\Rightarrow E_P =$ ..... -.....

روز۵۳ **حل فیشهای:** ۷۴۹-۷۵۱-۷۵۴-۷۵۵

روز۵۴ ۷۵۹ انواع کشیدگی جوامع آماری با توجه به علامت ضریب کشیدگی (۳ نوع):

علامت ضریب کشیدگی	مثبت ($E > ۰$)	صفر ($E = ۰$)	منفی ($E < ۰$)
ویژگی توزیع			

روز۵۴ **تفسیر قدرمطلق ضریب کشیدگی:**

۷۶۱ **برای تفسیر قدرمطلق ضریب کشیدگی $|E|$، مثل تفسیر قدرمطلق ضریب چولگی $|SK|$، از دو عدد ..... و ..... استفاده می‌کنیم:**

الف) اگه .... باشه ⇐ توزیع جامعه از نظر کشیدگی و پراکندگی **تقریباً مثل توزیع نرماله (یعنی تقریباً نرماله)**، بنابراین تفاوت منحنیِ این توزیع با منحنی نرمال، **قابل اغماض و چشم پوشیه.**

۷۶۲ **ب)** اگه ..... باشه ⇐ در این حالت توزیع جامعه از نظر کشیدگی و **پراکندگی تفاوت اندکی با توزیع نرمال (متقارن)** داره و این تفاوت **غیرقابل اغماض و غیر قابل چشم‌پوشیه.**

ج) اگه ... ...باشه⇐ در این حالت، توزیع جامعه از نظر کشیدگی و پراکندگی، **اختلاف فاحشی با توزیع نرمال (متقارن)** داره و این تفاوت، **غیرقابل اغماضه (غیرقابل چشم‌پوشیه).**

توجه ۲: به عنوان یه جمع‌بندی از بندهای الف، ب و ج می‌تونیم بگیم:

اگه ... ... باشه ⇐ کشیدگی قابل اغماضه.

اگه ... ... باشه ⇐ کشیدگی غیرقابل اغماضه.

۷۶۵

«تأثیر تغییر مشاهدات بر علامت و مقدار ضریب کشیدگی»

نکته مهم (قاعده کلی): با هرگونه تغییری که در داده‌ها، ..... ضریب کشیدگی تغییر نمی‌کنه و فقط ممکنه ..... تغییر بکنه.

۱) اگر به تمام داده‌ها مقدار ثابت a را اضافه یا کم کنیم:

اگه: $y_i = x_i \pm a \quad \Rightarrow \quad E_y =$

۲) اگر تمام داده‌ها را در مقدار ثابت a ضرب یا برآن تقسیم کنیم:

اگه: $y_i = ax_i \begin{cases} (\text{مثبت})a > 0 \quad \Rightarrow \quad E_y = \\ (\text{منفی})a < 0 \Rightarrow E_y = \end{cases}$

۳) اگر ابتدا تمام داده‌ها را در مقدار ثابت a ضرب یا تقسیم کنیم و سپس مقدار ثابت b را به آنها اضافه یا از آنها کم کنیم:

۷۶۶

$y_i = ax_i \pm b \begin{cases} (\text{مثبت})a > 0 \quad \Rightarrow \quad E_y = \\ (\text{منفی})a < 0 \Rightarrow E_y = \end{cases}$

۴) اگر ابتدا به تمام داده‌ها مقدار ثابت a را اضافه یا کم کنیم، و سپس آنها را در مقدار ثابت b ضرب یا بر آن تقسیمکنیم:

$y_i = b(x_i \pm a) \begin{cases} (\text{مثبت})b > 0 \Rightarrow \quad E_y = \\ (\text{منفی})b < 0 \Rightarrow E_y = \end{cases}$

۵) اگر a درصد از هر داده را به آن داده اضافه یا از آن کم کنیم:

$y_i = x_i + \%ax_i \quad \Rightarrow \quad y_i = x_i(1 + \%a) \quad \Rightarrow \quad E_y =$

روز ۵۴

روز ۵۴ **حل فیشهای: ۷۶۷-۷۷۱**

روز	**باکس CTS (فصل ۶):** « **جمع بندی خلاصه نکات ، فرمول‌ها و روابط مهم هر سرفصل**»	فلش کارت
روز۵۶	انواع نمودارهای آماری (بر حسب کمی یا کیفی بودن داده ها): اسمی (طبقه‌ای) < ترتیبی (رتبه‌ای) < فاصله‌ای < نسبی (کسری) مقیاس‌های ..... ↓ استفاده از نمودارهای ..... مقیاس‌های ..... ↓ استفاده از نمودارهای	۷۷۳
	مهمترین نمودارهای کمّی و کیفی عبارتند از: **نمودارهای کمّی** ↓ (برای داده‌هایی با مقیاس ...: ..... و .....) ۱) نمودار ..... ۲) نمودار ..... ۳) نمودار..... ۴) **نمودارهای تحلیل اکتشافی داده‌ها** { **الف**)..... **ب**)..... نمودارهای **کیفی (وصفی)** ↓ (برای داده‌هایی با مقیاس .....: ..... و .....) ۱) نمودار ..... ۲) نمودار..... ۳) نمودار	۷۷۳
روز۵۶	نمودار بافت‌نگار (..... یا .....) جزء نمودارهای ..... است که از آن برای نمایش داده‌های ..... با مقیاس ..... استفاده می‌شود.	۷۷۵
	مهم: برای رسم منحنی بافت‌نگار، محور افقی دستگاه مختصات را با ..... مدرّج می‌کنیم و محور عمودی را نیز با ..... درجه‌بندی می‌کنیم. مجموع مساحت همهٔ مستطیل‌های بافت‌نگار هم برابر ..... است.	۷۷۶
روز۵۶	**نکته ۳: نحوهٔ بدست آوردن حدود واقعی طبقات (حدود کرانه):** **گام اول:** فاصله بین .....و ..... را تقسیم بر دو می‌کنیم (فاصله را نصف می‌کنیم). **گام دوم:** سپس این مقدار رو به .....، اضافه و از .....کم می‌کنیم. بدین ترتیب طبقات ما پیوسته میشوند.	۷۷۷
روز۵۷	**توجه**: اگر سؤال از ما خواسته باشه که طول عمری (xای) رو پیدا کنیم که ۲۰٪ از قطعه‌ها **کمتر یا مساوی** اون عمر می‌کنن،اون وقت این سوال در واقع از ما خواسته تا .....رو حساب کنیم.	۷۸۶
روز۵۷	چگالی فراوانی مطلق $= \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots - \dots\dots} \Rightarrow d_i = \frac{\dots\dots}{\dots\dots - \dots\dots} \Rightarrow d_i = \frac{\dots}{\dots\dots}$ چگالی فراوانی نسبی $= \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots - \dots\dots} \Rightarrow d_i = \frac{\dots\dots}{\dots\dots - \dots\dots} \Rightarrow d_i = \frac{\dots}{\dots\dots}$ **نکته ۱)در رسم نمودار هیستوگرام براساس چگالی فراوانی:** *بر روی محور افقی:*..... طبقات قرار می‌گیره و *بر روی محور عمودی از* ..... استفاده می کنیم.	۷۸۸
	نکته ۲)معمولاً زمانی هیستوگرام‌ها رو بر حسب چگالی فراوانی رسم می‌کنیم که ..... با هم فرق داشته باشد.	۷۸۸
روز۵۷	**نمودار چندضلعی:** ۱) نمودار چندضلعی (..... یا .....) یکی از نمودارهای ..... است که از آن برای نمایش توزیع داده‌های ..... که دارای مقیاس ..... هستند، استفاده می‌شود. ۲) اگر در نمودار بافت‌نگار (هیستوگرام)، ..... را به هم وصل کنیم، نمودار چندضلعی بدست می‌آید	۷۹۱
	۳) **مهم:** در نمودار چندضلعی، ..... بر روی محور افقی و ..... بر روی محور عمودی قرار می‌گیرد. ۴) **مهم:** در تحقیقاتی که هدف آنها ..... باشد، نمودار چندضلعی به سایر نمودارها ترجیح داده می‌شود.	۷۹۲

روز۵۷	**نمودار فراوانی تجمعی یا تراکمی:** **۱)** نمودار فراوانی تجمعی یا تراکمی (.....) جزء نمودارهای ..... است که از آن برای نمایش توزیع داده‌های ..... که دارای مقیاس ..... هستند، استفاده می‌شود.	۷۹۴
	۲) نمودار فراوانی تجمعی براساس توزیع فراوانی ..... مشاهدات رسم می‌شود، یعنی نمودار فراوانی تجمعی، تعداد مشاهدات ..... از یک نقطه معین را نشان می‌دهد.	۷۹۴
	۳) در نمودار فراوانی تجمعی، به سؤال‌هایی نظیر «چند درصد از مشاهدات، ..... قرار دارد؟» به سادگی پاسخ داده می‌شود. به طور کلی ۲ روش برای رسم نمودار فراوانی تجمعی وجود دارد: **روش اول**: در این روش، بر روی محور عمودی، ..... و بر روی محور افقی، ..... قرار می‌گیرد که به نمودار حاصله از این روش، ..... می‌گوئیم.	۷۹۵
	روش دوم: در این روش، بر روی محور عمودی، ..... و بر روی محور افقی، ..... قرار می‌گیرد که به نمودار حاصله از این روش، ..... می‌گوییم.	۷۹۶
	توجه: در هر دوی این روش‌ها، محور .....یکسانه و تنها فرق روش اول و دوم در **محور** ..... اوناست. نمودار فراوانی تجمعی جهت مقایسه توزیع‌های فراوانی دو یا چند جامعه که ..... هستند، مفید خواهد بود، مثلاً برای مقایسهٔ	۷۹۷
روز۵۷	**حل فیشهای: ۷۸۵-۷۹۹**	
روز۵۸	**نمودارهای تحلیل اکتشافی داده‌ها:** **۱)** نمودار شاخه و برگ، جز نمودارهای .....است که از اون برای نمایش داده‌های ..... با مقیاس ..... استفاده میشه.	۸۰۳
	۲) مهم: **در نمودار شاخه و برگ، از داده‌های** ..... **استفاده میشه.** **یادآوری مهم**: در نمودار شاخه و برگ، برخلاف نمودار بافت‌نگار، داده‌های اصلی از بین	۸۰۵
روز۵۸	**حل فیشهای: ۸۰۳-۸۰۶-۸۰۹-۸۱۰-۸۱۳**	
روز۵۹	**نمودار جعبه‌ای:** **۱)** نمودار جعبه‌ای جزء نمودارهای ..... است که از آن برای نمایش داده‌های ..... با مقیاس ..... استفاده می‌شود. **۲) مهم:** نمودار جعبه‌ای یکی از انواع نمودارهای ..... است که از آن برای **مقایسهٔ** دو یا چند جامعهٔ آماری استفاده می‌شود.	۸۱۸
روز۵۹	**نمودارهای کیفی یا وصفی:** نمودارهای کیفی برای نمایش هندسی داده‌های ..... با مقیاس ..... بکار می‌روند. **مهم:** انواع نمودارهای کیفی (۳ مورد):	۸۲۲
روز۵۹	**نمودار ستونی (میله‌ای):** **۱) نمودار ستونی (میله‌ای) جزء نمودارهای ..... است و از آن برای نمایش داده‌های ..... با مقیاس ..... استفاده می‌شود.** **۲)** این نمودار به ۲ شکل میله‌ای و ستونی رسم می‌شود. در هر دوی این نمودارها، بر روی محور افقی ..... و بر روی محور عمودی ..... قرار می‌گیرد.	۸۲۳
روز۵۹	**نمودار دایره‌ای (کُروی یا کلوچه‌ای):** **۱) نمودار دایره‌ای/ جزء نمودارهای ..... است که ازَش برای نمایش داده‌های..... با مقیاس ..... استفاده می‌شود.** **۲)** نمودار دایره‌ای برحسبِ ..... بیان می‌شود. **۳) مراحل رسم یک نمودار دایره‌ای :** **گام۱)** تبدیل فراوانی های ..... به فراوانی های ..... **گام ۲)** تعیین زاویه یا مساحت هر قطعه از دایره: $S_i =$ ..... : مساحت هر قطعه روی دایره (برحسب درجه) **گام ۳)** تقسیم کردن دایره به قسمتهای مختلف بر اساس زوایای تعیین شده در گام ۲ **گام۴)** نوشتن نام هر طبقه بر روی قسمت مربوطه اش بر روی دایره بهمراه **درصد فراوانی نسبی** آن طبقه:	۸۲۶
	درصد فراوانی نسبی طبقات (مساحت برحسب درصد) $= S_i =$	۸۲۷
روز۵۹	**حل فیش: ۸۲۰**	

روز ۶۰	**نمودار پاره تو:** **مهم:** نمودار پاره‌تو، جزء نمودارهای ..... است که از آن برای نمایش داده‌های ..... با مقیاس ..... استفاده می‌شود. نمودار پاره‌تو همیشه به ترتیب ..... فراوانی‌ها رسم می شود، یعنی در یک نگاه، مستطیل‌های آن به ترتیب قد (از ..... به .....) چیده شده‌اند؛به عبارتی پر وقوع‌ترین صفت (یعنی مُد) در سمت ..... قرار می‌گیرد. نمودار پاره تو برعکس بقیه نمودارها، دارای ۳ محور است که محور سوم آن، یک محور ..... است که در طرف ..... نمودار است و بر روی آن، ..... قرار می‌گیرد.	۸۳۱ ۸۳۲
روز ۶۰	**حل فیشهای:** ۸۲۹-۸۳۰-۸۳۱-۸۳۵	

روز	**باکس CTS (فصل ۷):** « **جمع بندی خلاصه نکات ، فرمول‌ها و روابط مهم هر سرفصل**»	فلش کارت
	مجموعهٔ تمام نتایج و پیامدهای ممکن یه آزمایش را ..... می‌نامیم و اون رو با حرف ..... نمایش می‌دیم. **نکته**: در مسائل و تستها، شیر رو با نماد H و خط رو با نماد T نشون می‌دیم.	۸۴۲
روز۶۲	**فرمول محاسبه تعداد عناصر فضای نمونه:** $n(S) = \dots$ $\dots = \dots$ **تعداد عناصر فضای نمونهٔ** **۱ بار پرتاب n** تاس $=$ **تعداد عناصر فضای نمونه** **nبار پرتاب ۱ تاس** $= \dots$ تعداد اعضای فضای نمونهٔ ۱ بار پرتاب n سکه $=$ تعداد اعضای فضای نمونه n بار پرتاب ۱ سکه	۸۴۳
روز۶۲	به هر زیر مجموعه از فضای نمونهٔ یه آزمایش، ..... می‌گیم. یه مجموعه n عضوی، دارای **..... زیر مجموعه** است: **تعداد زیرمجموعه‌ها (پیشامدهای)** یه فضای نمونهٔ n عضوی $= \dots\dots\dots\dots\dots$	۸۴۶ ۸۴۷
روز۶۲	**توضیح**: در مسائل و تستها، واژهٔ «**یا**»، یعنی: «**.....**» و واژهٔ «**و**» یعنی «**.....**» دو یا چند پیشامد **یادآوری:**..... پیشامدها رو با نماد ∪ و .....شون رو با نماد ∩ نشون می‌دیم.	۸۵۰
روز۶۲	**حل فیشهای: ۸۵۰-۸۵۱**	
روز۶۳	اگه $\begin{cases} A \subseteq B \\ B \subseteq A \end{cases} \Rightarrow \dots\dots$ اگر $A \subseteq B \xRightarrow{\text{آنگاه}} A \overset{\text{اجتماع}}{\cup} B = \cdots$ اگر $A \subseteq B \xRightarrow{\text{آنگاه}} A \overset{\text{اشتراک}}{\cap} B = \cdots$	۸۶۱
روز۶۳	**نکته مهم**: در مباحث مجموعه‌ها و احتمال، کلمهٔ «**یا**» به مفهوم «**.....**» است. بنابراین به پیشامد ....، پیشامد **A یا B** هم می‌گیم. **نکته مهم:** وقوع .. .. بدین معنیه که **دست کم (حداقل) یکی** از دو پیشامد A یا B رخ بده. **تعداد عضوهای $A \cup B$** $= n(A \cup B) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ $n(A \cup B \cup C) = \cdots \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\

۸۸۲	**نکته ۲**: با توجه به شکل، تفاضل متقارن A و B یعنی: یا **فقط** ..... رخ بده، **یا فقط** ....، یعنی **فقط** ..... رخ بده: $A\Delta B = \underbrace{\dots\dots\dots\dots}_{\text{فقط.....}} \underset{\text{یا}}{\cup} \underbrace{\dots\dots\dots\dots}_{\text{فقط.....}}$ **مهم**: تفاضل متقارن A و B رو به ۳ شکل نشون بدیم: $\begin{cases} ۱) A\Delta B = B\Delta A = \dots\dots\dots \cup \dots\dots\dots \\ ۲) A\Delta B = B\Delta A = \dots\dots\dots \cup \dots\dots\dots \\ ۳) A\Delta B = B\Delta A = \dots\dots\dots - \dots\dots\dots \end{cases}$	
۸۸۴	قوانین دمورگان: $\begin{cases} (A \cup B)' = \dots\dots\dots \\ (A \cap B)' = \dots\dots\dots \end{cases}$	روز۶۵
۸۹۲	**قوانین توزیع‌پذیری**: $A \cap (B \cup C) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$ $A \cup (B \cap C) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$	روز۶۵
	حل فیشهای: ۸۸۰-۸۸۱-۸۸۴	روز۶۵

		فلش کارت
	باکس CTS (فصل ۸): **« جمع بندی خلاصه نکات ، فرمول‌ها و روابط مهم هر سرفصل»**	
روز۶۷	تعداد عضوهای فضای نمونه رو از ۳ روش می‌تونیم بدست بیاریم: ۱) فرمول: $n(S) = \cdots$ ۲) رسم نمودار درختی و شمردن ..... ۳) با استفاده از اصل	۹۰۱
روز۶۷	**نکته مهم**: موقع شمارش اعداد یا حروف، اگر در صورت مسئله، هیچ اشاره‌ای به مُجاز بودن یا مجاز نبودن تکرار اعداد یا حروف نشده باشه، آنگاه می‌دانیم که **به طور پیش فرض**، تکرار مجاز	۹۰۴
روز۶۷	**حل فیشهای: ۹۰۴-۹۰۶**	
روز۶۸	**نکته بسیار مهم**:در مسائل مربوط به شمارش ارقام، همیشه از خونه‌ای شروع می‌کنیم که	۹۱۱
	نتیجه مهم: اگه خواستیم تعداد اعداد **زوج** رو بشمریم و تو بین ارقام داده شده، رقم **صفر هم وجود داشت**، اون‌وقت حتماً باید حواسمون باشه که مسئله رو به ۲ حالت تجزیه کنیم و در آخر، جواب اونا رو باهم جمع کنیم: ***حالت اول:*** اگه ..... تو خونه سمت راست (یکان) باشه. ***حالت دوم***: اگه ..... تو خونه سمت راست (یکان) نباشه.	۹۱۲
روز۶۸	**حل فیشهای: ۹۰۸-۹۱۰-۹۱۱-۹۱۳-۹۱۶-۹۱۹-۹۲۲**	
روز۶۹	$\boxed{n! = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$	۹۲۳
روز۶۹	**«اصل جمع»:** **تعداد طرق انجام یکی از این k عمل** = ...	۹۲۶
	نکته: در اصل جمع، این kعمل (A_iها) همگی همزمان با هم اتفاق **.....**، بلکه **.....** اتفاق میفته . بنابراین در اصل جمع، از حرف ربط « ..... » استفاده می‌کنیم.	۹۲۷
	یادآوری و مقایسه: اما در اصل ضرب، ..... اتفاق می‌افتن، بنابراین در اصل ضرب، از حرف ربط «.....» استفاده می‌کنیم.	
روز۶۹	**نکته مهم**: به‌طور کلی، در مسائلی که در اونها از کلمه «**حداقل**» استفاده میشه، یه راه حل اینه که بجای حل مستقیم مسئله، از ..... استفاده کنیم. مثلاً: تعداد..... - تعداد..... = تعداد اعداد۳ رقمی که حداقل یه رقمشون عدد ۱ باشه	۹۳۲
روز۶۹	**مفهوم اشیاء متمایز (متفاوت) و نامتمایز (مشابه):** **نکته مهم**: باید دقت کنیم که افراد (اشخاص)، همیشه ..... محسوب میشن. هم‌چنین اگر در مسئله، چیزی در مورد متمایز یا متمایز بودن گفته نشده باشد، **بطور پیش‌فرض**، آن را ..... در نظر می‌گیریم. **یادآوری**: اگر در صورت مسئله صحبتی در مورد مجاز بودن یا نبودن تکرار ارقام یا حروف نشده باشد، **پیش‌فرض ما** ..... است.	۹۳۴ ۹۳۵
روز۶۹	**حل فیشهای: ۹۲۹-۹۳۱**	
روز۷۰	**جایگشت (تبدیل):** منظور از **جایگشت**یا **تبدیل**n شی متمایز (مختلف) اینه که:	۹۳۶
	فرمول جایگشت خطی n شی متمایز: $P_n = A_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	۹۳۷
	تذکر مهم: البته فقط زمانی می‌تونیم از فرمول بالا برای جایگشت خطیn شی استفاده کنیم که اشیاء **.....** باشن.	۹۳۸
	جایگشت خطی n شی متمایز از k نوع مختلف: جایگشت ...... × (..... جایگشت.....)	۹۴۱
روز۷۰	**جایگشتهای خطیn شی متمایز که r تای آنها کنارهم باشند**: در این‌گونه مسائل: **۱)** اول باید ببینیم که این ..... به چند طریق می‌تونن کنارهم قرار بگیرن، یعنی اول باید جایگشت خطی این ..... رو بدست بیاریم که **همون** .....است. **۲)** بعد، باید همه این r شیء رو ***..... فرض کنیم و اونو کنار بقیه اشیاء یا افراد قرار بدیم.*** سپس باید جایگشت همه اونا رو در کنار هم حساب کنیم.	۹۴۶
روز۷۰	تعداد ..... - تعداد ..... : تعداد جایگشت‌های خطی n شیء متمایز که rتای اونا کنار هم **نباشن**	۹۴۹

روز ۷۰	**حل فیشهای: ۹۴۶-۹۴۷**	
روز ۷۱	**جایگشت خطی یک در میان (متناوب):** **حالت الف)** اگه تعداد اعضای این دو گروه، دقیقاً با هم برابر باشن $(m=n)$: اگه $m=n \Rightarrow$ تعداد حالت‌ها: ..... **حالت ب)** اگه تعداد اعضای این دو گروه به اندازه ۱ واحد با هم اختلاف داشته باشن (یعنی: $m=n+1$): اگه $m=n+1 \Rightarrow$ تعداد حالت‌ها:	۹۵۴
روز ۷۱	**جایگشت دایره‌ای (دوری یا مدوّر) n شیء متمایز:** **تعداد جایگشت‌های دایره‌ای n شیء متمایز : .....** درجایگشت دایره‌ای، برای ایجاد یه حالت جدید، تنها کافیه که **..... ثابت نگه‌داریم** و ..... رو تغییر بدیم.	۹۵۷ ۹۵۸
روز ۷۱	***حالت خاص ۱: ثابت بودن جای یک شیء (یک فرد) در جایگشت دایره‌ای:*** **فرمول : .....** ***حالت خاص ۲: جایگشت دایره ای یک در میان (متناوب):*** **تعداد جایگشت‌های دایره‌ای یکی در میون : .....**	۹۶۰ ۹۶۲
روز ۷۱	**حل فیشهای: ۹۵۳-۹۵۴-۹۵۷-۹۶۰-۹۶۲**	
روز ۷۲	***حالت خاص ۳):«جایگشت دایره‌ای n شیء متمایز که r تای آنها کنار هم باشند»*** **فرمول : .....** **توجه**: به جایگشت **r شی از n شیء**⇐«.....» هم گفته میشه که یکی دیگه از قوانین شمارش (آنالیز ترکیبی) محسوب میشه.	۹۶۶ ۹۷۳
روز ۷۲	**فرمول جایگشت با تکرار (افرازهای مرتب):** تعداد جایگشت‌های n شیء که n_1 تای آن از نوع اول (**مشابه هم = نامتمایز**) و n_2 تای آن از نوع دوم (**مشابه هم**) و ... و n_k تای آن از نوع kاُم (**مشابه هم**) باشن، به طوری که: $n_1+n_2+...+n_k=n$ باشه، از فرمول زیر بدست میاد: **فرمول :**	۹۷۹
روز ۷۲	**حل فیشهای: ۹۶۶-۹۷۰-۹۷۱-۹۷۳-۹۷۷-۹۷۸**	
روز ۷۳	**توزیع n شیء متمایز در k دسته یا سلول (افراز مرتب):** **= تعداد حالات توزیع (تفکیک) n شیء متمایز در k سلول (افرازهای مرتب)** **ترتیب r شئ از n شئ:** عبارت است از: «تعداد .....» یا به عبارت دیگه: تعداد حالات کنار هم قرار دادن ..... **نکته ۱:** ترتیب rشئ رو با نماد .. .. یا .. .. نشون می‌دیم. **نتیجه**: برای محاسبه **ترتیب r شئ از n شئ** تنها کافیه که به تعداد ..... خونه رسم کنیم و توی این خونه‌ها، از چپ به راست، تعداد حالات ممکن رو می‌نویسیم. **نتیجه**: تفاوت **جایگشت r شئ از n شئ (ترتیب r شئ از n شئ)** با **جایگشت n شئ از n شئ** در اینه که: تو جایگشت)، ..... مشارکت دارن (جایگشت ..... شئ). ولی تو ترتیب، ..... مشارکت دارن (جایگشت .....). **نتیجه (مهم)**: تمام مسائل «**ترتیب**» رو می‌تونیم با استفاده از ..... هم حل کنیم.	۹۸۵ ۹۹۰ ۹۹۱ ۹۹۲ ۹۹۲
روز ۷۳	**حل فیشهای: ۹۸۲-۹۸۳-۹۸۴-۹۸۵-۹۸۸-۹۹۰-۹۹۳**	

روز ۷۴	**ترتیب r شئ از n شئ** عبارت است از: ۱) تعداد جایگشتهای r شئ از n شئ متمایز و یا تعداد حالات انتخاب r شئ از n شئ متمایز ($r \le n$) به طوری که: **اولاً:** تکرار اشیاء مجاز ..... (یعنی انتخاب اشیاء **..... جایگذاری** باشه). **ثانیاً:** ترتیب انتخاب اشیاء برای ما مهم ..... $P_n^r =$	۹۹۵
	ترکیب r شئ از n شئ: عبارت است از: تعداد حالات انتخاب r شئ از n شئ متمایز ($r \le n$) به‌طوری که: **اولاً:** تکرار اشیاء مجاز ..... (انتخاب **..... جایگذاری** باشه) ⇐ ..... **ترتیب** **ثانیاً:** ترتیب انتخاب اشیاء برای ما مهم .....⇐ ..... ترتیب	۹۹۵
	نتیجه مهم: تنها فرق بین **ترتیب** و **ترکیب** اینه که تو «.....»، ترتیب انتخاب اشیاء برای مهمه (مثل انتخاب ۳ دانش‌آموز به عنوان شاگرد اول، دوم، سوم) ولی تو «.....»، ترتیب انتخاب اشیاء برای ما مهم نیست و فقط نوع اونا برای ما مهمه.	۹۹۶
	در .....⇐ با تغییر در **نوع و ترتیب** اشیاء، حالت جدیدی ایجاد میشه. اما در ..... ⇐ فقط با تغییر **نوع** اشیاست که حالت جدیدی ایجاد میشه. **نکته:رابطه** بین فرمول **ترکیب** و فرمول **ترتیب**: $\boxed{\dots\dots = \dots\dots \times \dots\dots.}$	۹۹۸
روز ۷۴	nشی از nشی ⇐ $\boxed{P_n = A_n^n = \cdots}$ جایگشت rشی از n شی: اگه ترتیب انتخاب مهم ..... ⇐ ترتیب rشی از nشی : $\boxed{A_n^r = P_n^r =}$ اگه ترتیب انتخاب مهم ..... ⇐ ترکیب rشی از nشی : $\boxed{C_n^r =}$	۹۹۹
روز ۷۴	«**تفاوت اصلی بین ترکیب و ترتیب**»: به طور کلی در مسائلی که تعویض در ترتیب اشیاء، در نتیجه حاصله، تغییری ایجاد نکند (حالت جدیدی را ایجاد نکند)، از ..... استفاده می‌شود و در غیر اینصورت از ..... استفاده می‌کنیم.	۱۰۰۰
روز ۷۴	**نکته به یاد ماندنی**: همیشه یادمون باشه که تمامی مسائلی که تو اونا ترتیب انتخاب یا قرار گرفتن اشیاء برای ما اهمیت داره رو می‌تونیم با **.....** هم حل کنیم.	۱۰۰۲
روز ۷۴	$C_n^{\cdot} = \binom{n}{\cdot} = \cdots \qquad C_n^n = \binom{n}{n} = \cdots \qquad \binom{n}{1} = \cdots \qquad \binom{n}{n-1} = \cdots$	۱۰۰۵
روز ۷۴	**حل فیشهای: ۹۹۵-۱۰۰۰-۱۰۰۳**	
روز ۷۵	مجموع تمام **ترکیبات (انتخابها)** از یک مجموعه n عضوی، برابر با ..... خواهد بود: $\binom{n}{\cdot} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = \cdots$ $\boxed{\text{تعداد ترکیبات (انتخابها) از یه مجموعه } n \text{ عضوی} = \text{تعداد زیرمجموعه‌های یه مجموعه } n \text{ عضوی} = \cdots}$ $\binom{n}{\cdot} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{n} = \dots\dots\dots \qquad \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots + \binom{n}{n-1} = \dots\dots\dots$	۱۰۰۸ ۱۰۰۹
روز ۷۵	**نکته تستی**: برای محاسبه هرچه سریعتر ترکیب‌هایی که در اونا $r=2$ است، مثلاً: $\binom{6}{2} = \binom{n}{r}$ تنها کافیه که ..... رو در .....(یعنی در.....) ضرب کنیم و حاصل رو بر ..... تقسیم کنیم، یعنی: اگه: $\boxed{r = 2 \Rightarrow C_n^2 = \binom{n}{2} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}}$	۱۰۱۴

روز۷۵ — ۱۰۱۵

روشهای انتخاب r شئ از n شئ متمایز (روشهای توزیع):

ترتیب \ تکرار	تکرار مجاز نیست **(انتخاب بدون جایگذاری)**	تکرار مجازه **(انتخاب با جایگذاری)**
ترتیب انتخاب مهمه	حالت (۱)	حالت (۳)
ترتیب انتخاب مهم نیست	حالت (۲)	حالت (۴) در کنکور رشته‌های علوم انسانی مطرح نمیشه

روز۷۵ — ۱۰۱۹ ۱۰۲۰

انتخاب بدون جایگذاری مثل حالتیه که در انتخاب ما، **تکرار مجاز** .....

نکته مهم: اینه که تو مسائل و تستها، همیشه بطور پیش‌فرض، انتخاب ما ..... **جایگذاری** است.

روز۷۵ — **حل فیشهای: ۱۰۰۷-۱۰۰۸-۱۰۱۱-۱۰۱۳-۱۰۱۸-۱۰۱۹-۱۰۲۲**

روز۷۶ — **حل فیشهای: ۱۰۲۳-۱۰۲۴-۱۰۲۶-۱۰۲۷-۱۰۲۸-۱۰۳۰-۱۰۳۲-۱۰۳۵-۱۰۳۶**

روز۷۷ — ۱۰۴۵

فرمول تعداد ترکیب‌های r تایی از n شئ متمایز که **فاقدm شئ بخصوص** هستند:

روز۷۷ — ۱۰۴۸

فرول تعداد **ترکیبهای**rتایی از n شئ متمایز که **شامل m شئ بخصوص** هستن:

روز۷۷ — **حل فیشهای: ۱۰۳۸-۱۰۳۹-۱۰۴۰-۱۰۴۴-۱۰۴۵-۱۰۴۷-۱۰۴۸-۱۰۵۰-۱۰۵۱**

روز۷۸ — ۱۰۵۶

قاعده کلی: با استفاده از n حرف (یا n رقم) که بعضی از اونا **تکراری** هستن، اگه بخواهیم یه کلمه m حرفی (یا یه عدد m رقمی) بسازیم (به‌طوری که $m<n$ باشه) باید .....

روز۷۸ — **حل فیشهای: ۱۰۵۳-۱۰۵۴-۱۰۵۶-۱۰۵۸**

روز۷۹ — ۱۰۷۲

فرمول تعداد **ترتیب‌های ناسازگار** n شئ متمایز (متفاوت):

فرمول تعداد **ترتیب‌های ناسازگار** r شئ از n شئ متمایز:

یادآوری ۱: حاصل هر عددی به توان صفر برابر با ..... است: $\boxed{(\text{عدد})^{۰} = \cdots}$ پس حاصل $(-۱)^{۰}$ هم برابر با ..... است: $(-۱)^{۰} = \cdots$

یادآوری ۲: حاصل !۰ برابر با ..... است: $\boxed{۰! = \cdots}$

۱۰۷۳ — **نکته تستی مهم:** اگه به این ۲ فرمول بالا توجه کنیم، می‌بینیم که تو این فرمولا، به ازای $k=۰$ و $k=۱$، جملات اول و دوم بسط (یعنی $\frac{(-۱)^{۰}}{۰!}$: و $\frac{(-۱)^{۱}}{۱!}$) به ترتیب برابر با ۱ و ۱- خواهند شد که جمع اونا برابر با صفر میشه: $\frac{(-۱)^{۰}}{۰!} + \frac{(-۱)^{۱}}{۱!} = \frac{۱}{۱} + \frac{-۱}{۱} \Rightarrow \boxed{۱ - ۱ = ۰}$

پس تو مسائل، برای سرعت عمل بیشتر، بهتره که حد پائین Σ رو بجای $k=۰$، برابر ..... قرار بدیم.

۱۰۷۵ — **نکته تستی مهم**: **جمله سوم** بسطِ $\sum_{k=۰}^{n} \frac{(-۱)^{k}}{k!}$ برابر ..... است و جمله چهارم این بسط نیز برابر ..... است و جمع این دوجمله برابر با .... است.

روز۷۹ — **حل فیشهای: ۱۰۶۱-۱۰۶۴-۱۰۶۶-۱۰۷۱-۱۰۷۵**

روز	باکس CTS (فصل ۹): « جمع بندی خلاصه نکات ، فرمول‌ها و روابط مهم هر سرفصل»	فلش کارت
روز ۸۱	**انواع بیان احتمال:** ۱. احتمال کلاسیک (احتمال هم شانس): $P(A) = \dots\dots\dots\dots$:احتمال کلاسیک ۲. احتمال هندسی: $P(A) = \dots\dots\dots\dots$:احتمال هندسی ۳. احتمال آماری: $P(A) = \cdots \dots\dots\dots$:احتمال آماری	۱۰۷۷
روز ۸۱	**تعریف**: در یه آزمایش، به پیشامدهایی که ....., پیشامدهای **هم تراز (هم‌شانس)** می‌گیم. **نکته ۱**: در حل مسائل و تستها تمام پیشامدهای ممکن برای هر حادثه رو **به طور پیش‌فرض**، ..... در نظر می‌گیریم، مگر اینکه در صورت سؤال، چیز دیگه‌ای گفته باشه. اگه تعداد کل پیشامدهای ممکن برای یه حادثه، برابر با k باشه، اون‌وقت چون **بطور پیش فرض**، همه این kپیشامد رو ..... فرض می‌کنیم، پس می‌تونیم بگیم که احتمال وقوع هر کدوم از این پیشامدها **باهم مساوی** و برابر با ..... است: $\text{احتمال} = \frac{\text{تعداد حالات مساعد (مطلوب)}}{\text{کل تعداد حالات ممکن}} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$ **نکته ۲**: هر وقت تو تستها، عبارتهایی مثل «**به تصادف**»، «**به طور تصادفی**»، «بطور **شانسی یا اتفاقی**» و ... رو دیدیم، یعنی اینکه: تمام پیشامدهای ممکن، ..... هستن.	۱۰۷۸ ۱۰۷۹
روز ۸۱	«**خواص مقدماتی احتمال**»: **خاصیت ۱**: احتمال هر پیشامدی همیشه عددی ..... و ..... است؛ **خاصیت ۲**: احتمال وقوع فضای نمونه (S) برابر ..... است.	۱۰۸۴
روز ۸۱	**حل فیش: ۱۰۸۴**	
روز ۸۲	**قاعدهٔ متمم‌گیری (مکمل‌گیری):** $P(\acute{A}) = \dots\dots\dots\dots$ $P(A) = \dots\dots\dots\dots$	۱۰۹۵
روز ۸۲	احتمال ..... عبارتست از: «حد فراوانی نسبی، وقتی که تعداد آزمایشها به سمت بی‌نهایت میل کنه: $n \to \infty$». احتمال پیشامد A: $P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{F_i}{n} \Rightarrow P(A) = \lim_{n\to\infty} f_i$ **تذکر مهم**: ما نباید همه جا از فرمول **فوق** استفاده کنیم، چون فقط زمانی می‌تونیم از **فراوانی نسبی** برای محاسبه احتمال استفاده کنیم که ..... **حل فیشهای: ۱۰۹۵-۱۱۰۱-۱۱۰۲-۱۱۰۵**	۱۱۰۳ ۱۱۰۴
روز ۸۳	**قانون اعداد بزرگ (به صورت برنولی):** بصورت فارسی: به زبان ریاضی: **نکته مهم**: تو قانون اعداد بزرگ برنولی، هم باید **علامت** ..... داشته باشیم و هم **در سمت راست، عدد** ..... وجود داشته باشد.	۱۱۰۹ ۱۱۱۱
روز ۸۳	احتمال وقوع فقط A (A رخ بده و B رخ نده): $P(\dots\dots\dots\dots) = \cdots\dots\dots - \cdots\dots\dots = P(\dots\dots\cap\dots\dots)$ احتمال وقوع فقط B (B رخ بده و A رخ نده): $P(\dots\dots\dots\dots) = \cdots\dots\dots - \cdots\dots\dots = P(\dots\dots\cap\dots\dots)$ تفاضل متقارن A و B (فقط یکی از A و B): $P(A\Delta B) = P(B\Delta A) = P(\dots\dots) + P(\dots\dots) = P(\dots\dots\cap\dots\dots) + P(\dots\dots\cap\dots\dots) = P(\dots\dots) - P(\dots\dots)$	۱۱۱۴ ۱۱۱۵ ۱۱۱۶

روز۸۳	«**قاعده اجتماع دو پیشامد: اصل شمول و عدم شمول برای دو پیشامد A و B**»:	
	قضیه اجتماع دو پیشامد: $P(A \cup B) =$	۱۱۱۸
	نکته: بسیار مهم: تو مسائل و تستها، احتمال **اجتماع** دو پیشامد A و B یعنی $P(A \cup B)$، به یکی از ۳ شکل زیر بیان میشه:	
	الف) دست کم (لااقل= حداقل) یکی از پیشامدهای A و B اتفاق بیفته.	۱۱۲۰
	ب) وقوع پیشامد A «یا» B. **ج) حادثه‌ای به سبب وقوع پیشامدهای A یا B اتفاق بیفته.**	
روز۸۳	**حل فیشهای: ۱۱۱۱-۱۱۱۷-۱۱۱۸-۱۱۲۱**	
	۱) تعریف پیشامد **مستقل** با ذکر مثال:	۱۱۳۴
	شرط استقلال دو پیشامد A و B: **شرط استقلال دو پیشامد :** A و B مستقل $\overset{\text{دوطرفه}}{\rightleftarrows}$	۱۱۳۵
روز۸۴	**۲)** تعریف پیشامد **وابسته** با ذکر مثال:	
	شرط وابستگی (عدم استقلال) دو پیشامد A و B: **شرط وابستگی دو پیشامد :** A و B وابسته $\overset{\text{دوطرفه}}{\rightleftarrows}$	۱۱۳۶
	(مهم): هرگاه دو پیشامد A و B مستقل از هم باشن، اون‌وقت کاملاً واضحه که: تمام زوج پیشامدهای ..... و ..... و ..... نیز	۱۱۳۹
روز۸۴	مستقل از هم خواهند بود و بالعکس. A و B مستقل $\overset{\text{دوطرفه}}{\Leftrightarrow}$ { مستقل، مستقل، مستقل }	
روز۸۴	**حل فیشهای: ۱۱۲۷-۱۱۳۰-۱۱۳۸-۱۱۴۰**	
روز۸۵	«**سه پیشامد مستقل**»: استقلال دوبه دو (۲ تایی) $\Rightarrow$ ، استقلال ۳ تایی: استقلال شرط ۳ پیشامد A، B و C	۱۱۴۲
روز۸۵	A و B ناسازگار (جدا از هم) $\overset{\text{دوطرفه}}{\Longleftrightarrow}$ { ۱) $A \cap B = \cdots \rightarrow \boxed{P(A \cap B) = \cdots}$ ، ۲) $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$ }	۱۱۴۵
روز۸۵	**نکته مهم:** دو پیشامد ..... **A و B** هیچ‌وقت نمی‌تونن باهم اتفاق بیفتن؛ بخاطر اینکه یکی از این پیشامدها (مثلاً A) مانع وقوع پیشامد دیگه (یعنی B) میشه. یعنی اگه A و B ..... باشن، می‌تونیم نتیجه بگیریم A و B **وابسته (بهم)** نیز هستن:	۱۱۴۷
	حتماً و حتماً A و B **بهم وابسته‌اند** $\overset{\text{آنگاه}}{\Longrightarrow}$ A و B ..... باشن	۱۱۴۸
روز۸۵	«**قوانین دمورگان در مورد اجتماع و اشتراک دو یا چند پیشامد**»:	
	قوانین دمورگان { **اجتماع**: $P(\acute{A} \cup \acute{B}) =$ $\overset{\text{متمم‌گیری}}{\Longrightarrow}$ ، **اشتراک**: $P(\acute{A} \cap \acute{B}) =$ $\overset{\text{متمم‌گیری}}{\Longrightarrow}$ }	۱۱۵۱

روز۸۵ «**مقایسهٔ اجتماع دو پیشامد ناسازگار و اجتماع دو پیشامد مستقل**»:

۱۱۵۴

تو حالت کلی: $P(A \cup B) = \underset{\text{حداقل یکی (A یا B)}}{}$

$$\begin{cases} \text{اگه } A \text{ و } B \text{ مستقل} \Rightarrow \underbrace{P(A \cup B)}_{\text{حداقل یکی } (A \text{ یا } B)} = \\ \text{اگه } A \text{ و } B \text{ ناسازگار} \Rightarrow \underbrace{P(A \cup B)}_{\text{حداقل یکی } (A \text{ یا } B)} = \end{cases}$$

روز۸۵ **حل فیشهای:** ۱۱۴۳-۱۱۴۸-۱۱۴۹-۱۱۵۳-۱۱۵۷

روز۸۶ «**مقایسهٔ تفاضل دو پیشامد مستقل و تفاضل دو پیشامد ناسازگار**»:

۱۱۶۰

A و B مستقل

$$\begin{cases} ۱)\ (A \text{ و نه } B) \text{ فقط } A = P(A-B) = \\ ۲)\ (B \text{ و نه } A) : \text{فقط } B = P(B-A) = \\ ۳)\ (\text{فقط } A \text{ یا فقط } B) \text{ فقط یکی} = P(A\Delta B) = \overbrace{\qquad}^{\text{فقط } A} + \overbrace{\qquad}^{\text{فقط } B} \end{cases}$$

روز۸۶

۱۱۶۰

A و B ناسازگار

$$\begin{cases} ۱)\ (A \text{ و نه } B) \text{ فقط } A = P(A-B) = \\ ۲)\ (B \text{ و نه } A) : \text{فقط } B = P(B-A) = \\ ۳)\ (\text{فقط } A \text{ یا فقط } B) \text{ فقط یکی} = P(A\Delta B) = \overbrace{\qquad}^{\text{فقط } A} + \overbrace{\qquad}^{\text{فقط } B} \end{cases}$$

روز۸۶ «**حالات مهم در مسائل احتمال برای دو پیشامد**»:

۱۱۶۲

۱) احتمال وقوع **هردو** پیشامد **A** و **B**:

۲) احتمال وقوع **هیچکدوم** از دو پیشامد (نه **A** و نه **B**):

۱۱۶۳

نکته مهم: باتوجه به قوانین **دمورگان و متمم‌گیری**:

$$P(\qquad) : \text{نه } A \text{ و نه } B \xRightarrow{\text{دمورگان}} \qquad \xRightarrow{\text{متمم}}$$

۳) احتمال وقوع **حداقل یکی** از دو پیشامد (**A** یا **B**):

۴) احتمال **عدم** وقوع **حداقل یکی** از دو پیشامد **A** یا **B**:

نکته مهم: با توجه به قوانین **دمورگان** و **متمم‌گیری**:

$$P(\qquad) : \text{عدم وقوع } A \text{ یا } B \xRightarrow{\text{دمورگان}} \qquad \xRightarrow{\text{متمم}}$$

۱۱۶۴

۵)احتمال وقوع **فقط** پیشامد A (**A و نه B**): $P(\qquad) = P(\quad \cap \quad) = \qquad -$:فقط A

۶)احتمال وقوع **فقط** پیشامد B (**B و نه A**): $P(\qquad) = P(\quad \cap \quad) = \qquad -$:فقط B

۷) احتمال وقوع **فقط یکی** از دو پیشامد (**فقط A یا فقط B**):

$$\underbrace{P(\qquad)}_{\text{فقط یکی}} = \underbrace{P(\qquad)}_{\text{فقط } A} \underbrace{+}_{\text{«یا»}} \underbrace{P(\qquad)}_{\text{فقط } B} = P(\qquad) \underbrace{+}_{\text{«یا»}} P(\qquad) = \qquad -$$

۱۱۶۵

۸) احتمال وقوع **حداکثر یکی** از دو پیشامد (**هیچ‌کدوم یا فقط یکی**):

روز۸۶ **حل فیشهای:** ۱۱۶۱-۱۱۶۶-۱۱۷۰

روز۸۷	«**حالات مهم در مسائل احتمال برای سه پیشامد**»: ۱) احتمال وقوع **هر سه** پیشامد (**A** و **B** و **C**): ۲) احتمال وقوع **هیچ‌یک** از سه پیشامد (**نه A و نه B و نه C**): $P(\acute{A} \cap \acute{B} \cap \acute{C}) \xRightarrow{\text{دمورگان}} \xRightarrow{\text{متمم}}$ ۳) احتمال وقوع **حداقل یکی** از سه پیشامد (**A یا B یا C**): ۴) احتمال **عدم** وقوع **حداقل یکی** از سه پیشامد (**Á یا Ḃ یا Ć**): $P(\acute{A} \cup \acute{B} \cup \acute{C}) \xRightarrow{\text{دمورگان}} \xRightarrow{\text{متمم}}$ ۵) احتمال وقوع **فقط** پیشامد A (**A و نه B و نه C**): ۶) احتمال وقوع **فقط** پیشامد B (**B و نه A و نه C**): ۷) احتمال وقوع **فقط** پیشامد C (**C و نه A و نه B**): ۸) احتمال وقوع **فقط** پیشامد A و B (**A و B و نه C**): ۹) احتمال وقوع **فقط** پیشامد A و C (**A و C و نه B**): ۱۰) احتمال وقوع **فقط** پیشامد B و C (**B و C و نه A**): ۱۱) احتمال وقوع **فقط (دقیقاً) یکی از سه پیشامد (فقط A یا فقط B و یا فقط C**): ۱۲) احتمال وقوع **حداکثر یکی از سه پیشامد:**	۱۱۷۱ ۱۱۷۲ ۱۱۷۳ ۱۱۷۴
روز۸۷	$P\left(\text{حداقل یه شیر}\right) = ۱ - P\left(\qquad\right) = ۱ - P(\qquad)$	۱۱۸۰
روز۸۷	**نکته مهم: موقع نوشتن عضوهای یه مجموعه، عضوهای ..... رو فقط ۱ بار باید بنویسیم و نه بیشتر.** **نتیجه کارشناسی**: تو پرتاب چند تاس، هر وقت بخواهیم **تو تاس‌های مختلف نتایج یک سانی رو دا شته با شیم**، فقط کافیه که ..... رو حساب کنیم و بجای مراحل دیگهٔ یکسان، ..... **بذاریم**.	۱۱۸۱ ۱۱۸۴
روز۸۷	**حل فیشهای: ۱۱۷۵-۱۱۷۷-۱۱۸۱-۱۱۸۶**	
روز۸۸	**حل فیشهای: ۱۱۹۰-۱۱۹۱-۱۱۹۵-۱۱۹۹-۱۲۰۱-۱۲۰۳**	
روز۸۹	**نکته خیلی مهم**: تو مسائل مربوط به فضای نمونهٔ **نامحدود**، وقتی می‌خواهیم احتمال خواسته شده رو حساب کنیم، همیشه با یه **.....** روبرو می‌شیم که بایستی ..... رو بدست بیاریم.	۱۲۰۶
	= مجموع جملات یه تصاعد هندسی	۱۲۰۷
روز۸۹	**راه حل تستی**: هروقت از نوع اشیایی که قبلاً خارج شده، **اطلاعی نداشته باشیم**، می‌تونیم **فرض کنیم که .....**	۱۲۱۲
روز۸۹	**نتیجه مهم**: اینکه ۲ مهره رو **باهم (یکجا)** بیرون بیاریم، دقیقاً مثل اینه که این ۲ مهره رو ..... بیرون بیاریم: **انتخاب ..... = انتخاب یکجا (باهم)**	۱۲۱۴
روز۸۹	**حل فیشهای: ۱۲۰۵-۱۲۱۰-۱۲۱۱-۱۲۱۲-۱۲۱۳**	
روز۹۰	**نکته**: هر وقت از یه کیسه یا جعبه‌ای که چند شی (مثلاً چند مهرهٔ رنگی) تو اون وجود داره، یک یا چند شی (مهره) رو **.....**، انتخاب و خارج کنیم، انجام کار **هیچ تأثیری روی احتمال خارج شدن اشیاء (مهره‌های) بعدی نداره.**	۱۲۲۶
روز۹۰	**حل فیشهای: ۱۲۱۹-۱۲۲۱-۱۲۲۴-۱۲۲۶-۱۲۲۷-۱۲۲۹-۱۲۳۰**	
روز۹۱	**قاعده کلی**: هرگاه n رقم داشته باشیم که بعضی از اونا **تکراری** باشن و بخواهیم با استفاده از این n رقم، یه عدد n رقمی بسازیم باید از ..... استفاده کنیم.	۱۲۳۶

روز۹۱	**نکته ۴**: اعدادی بر ۶ بخش‌پذیرند (مضرب ۶ هستن) که: **اولاً:** **و ثانیاً:**	۱۲۴۰
روز۹۱	حروف صدادار در زبان انگلیسی:	۱۲۴۵
روز۹۱	**یادآوری قاعده کلی**: هر وقت n حرف داشته باشیم که بعضی از اونها تکراری باشن و بخواهیم با استفاده از اونها، یه کلمه m حرفی بسازیم (به طوری که $m < n$ باشه)، باید	۱۲۴۶
روز۹۱	**حل فیشهای: ۱۲۳۱-۱۲۳۴-۱۲۳۶-۱۲۳۷-۱۲۳۹-۱۲۴۱-۱۲۴۴-۱۲۴۵-۱۲۴۶**	
روز۹۲	اگه: $m = n \Rightarrow$ تعداد جایگشتهای خطی یه درمیون =	۱۲۵۰
روز۹۲	**حل فیشهای: ۱۲۴۹-۱۲۵۱-۱۲۵۲-۱۲۵۴-۱۲۵۶-۱۲۵۷-۱۲۶۰-۱۲۶۲-۱۲۶۳**	
روز۹۳	**ویژگی‌های مهم مدارهای سری**: **۱) شرط برقراری جریان از A به B**: باید ..... وصل باشه **۲) شرط عدم برقراری یا قطع جریان در مدار سری**: باید ..... رو قطع کنیم، تا دیگه جریان از A به B منتقل نشه. $P\left(\text{عدم برقراری ارتباط}\right) =$ ، $P\left(\text{برقراری ارتباط بین } A \text{ و } B\right) =$ **نتیجه مهم**: تو مدارهای سری، همیشه باید **اول** ، احتمال ..... جریان رو حساب کنیم و بعد اگه خواستیم اونو از عدد ۱ کم کنیم.	۱۲۶۷ ۱۲۶۸
روز۹۳	**ویژگی‌های مهم مدارهای موازی**: **۱) شرط برقراری جریان از A به B**: باید ..... وصل باشه. **۲) شرط عدم برقراری یا قطع جریان از A به B**: باید ..... رو قطع کنیم، تا جریان از A به B وجود نداشته باشه. $P\left(\text{برقراری ارتباط بین } A \text{ و } B\right) =$ ، $P\left(\text{عدم برقراری ارتباط}\right) =$ **نتیجه مهم**: تو مدارهای موازی، همیشه باید **اول** ، احتمال ..... جریان رو حساب کنیم و بعد اگه خواستیم اونو از عدد ۱ کم کنیم.	۱۲۷۰ ۱۲۷۲
روز۹۳	**نتیجه مهم**: اگه اجزای یه سیستم رو به صورت **موازی** بهم ببندیم، احتمال کار کردنش ..... از موقعیه که این اجزاء رو به صورت **سری** بهم ببندیم.	۱۲۷۶
روز۹۳	**حل فیش: ۱۲۶۹**	
روز۹۴	**نکته**: قابلیت اطمینان یک پمپ بنزین، در واقع همون احتمال ..... است.	۱۲۹۵
روز۹۴	**حل فیشهای: ۱۲۸۸-۱۲۹۳-۱۲۹۴-۱۲۹۶**	
روز۹۵	**حل فیشهای: ۱۲۹۸-۱۳۰۱-۱۳۰۲-۱۳۰۴-۱۳۰۷-۱۳۰۸**	

	باکس CTS (فصل ۱۰): « جمع بندی خلاصه نکات ، فرمول‌ها و روابط مهم هر سرفصل»	فلش کارت
روز۹۷	**یادآوری**: تو مسائل مربوط به مهره و جعبه اگه تو صورت سؤال، **هیچ اطلاعی** در مورد رنگ مهره‌های قبلی خارج شده به ما نداده باشن، اون وقت ما باید **فرض کنیم که** ..... . فرمول احتمال شرطی: $P(B\|A) =$ $\boldsymbol{P(A\|B)} =$	۱۳۱۲ ۱۳۱۳
	پیشامد سمت چپ خط عمودی: اون پیشامدیه که، ..... **پیشامد سمت راستی**: اون پیشامدیه که، ....., یعنی این پیشامد همون ..... ماست و بهمین خاطر، به این پیشامد، **پیشامد** ..... می‌گیم.	
روز۹۷	**نکته مهم**: کلمه «**می‌دونیم**» تو صورت سؤال، یه **اطلاعات اضافیه** و در نتیجه نشون دهنده	۱۳۱۴
روز۹۷	**نکته** مجموع دو عدد، موقعی فرد میشه که .....باشه، یعنی یا بصورت ..... باشه یا بصورت	۱۳۱۹
روز۹۷	**نکته** مجموع دو عدد، موقعی زوج میشه که یا ..... باشن یا ..... باشن.	۱۳۲۳
روز۹۷	**حل فیشهای: ۱۳۱۰-۱۳۱۷-۱۳۱۹-۱۳۲۳**	
روز۹۸	**راه حل تستی**: هر وقت از رنگ مهره یا مهره‌های خارج شده اطلاعی نداشته باشیم (یعنی مثلاً **بدون نگاه به رنگ مهره‌ها** اونا رو کنار بذاریم)، تو این حالت برای محاسبه احتمال مهره‌های بعدی خارج شده، باید فرض کنیم که ..... **تبصره (استثناء)**: البته باید حواسمون باشه، قاعده بالا فقط برای زمانیه که مهره خارج شده رو به ظرف یا کیسه دیگه‌ای **انتقال**	۱۳۲۶
روز۹۸	**توضیح یه کم ضروری:** موقع نوشتن احتمالهای **شرطی**، باید: اولاً : اشتراک‌اون دو پیشامد رو تو ..... **کسر** بنویسیم. و ثانیاً: احتمال پیشامدشرطی‌رو تو ..... **کسر** بنویسیم. پس وجود علامت پریم روی پیشامدها، نباید حواس مارو پرت کنه. مثلاً بصورت زیر: $\boldsymbol{P(A\|\acute{B})} =$ $\boldsymbol{P(\acute{B}\|\acute{A})} =$ $\boldsymbol{P(\acute{A}\|B)} =$	۱۳۳۴
روز۹۸	**حل فیشهای: ۱۳۲۵-۱۳۲۶-۱۳۲۸-۱۳۳۴-۱۳۳۶-۱۳۳۷-۱۳۳۷-۱۳۳۸-۱۳۴۱**	
روز۹۹	«**مکمّل یا متمم احتمال شرطی**» $\boldsymbol{P(\acute{B}\|A)} =$ $\boldsymbol{P(\acute{A}\|B)} =$ $\boldsymbol{P(\acute{B}\|\acute{A})} =$ $\boldsymbol{P(\acute{A}\|\acute{B})} =$ یعنی برای بدست آوردن **متمم (مکمل)** یه احتمال شرطی:	۱۳۴۲
	اولاً: علامت پریم رو از روی پیشامد **سمت** ..... خط عمودی برمی‌داریم، ولی پیشامد سمت ..... (یعنی پیشامد .....) رو دست نمی‌زنیم. **ثانیاً**: احتمال بدست اومده رو **از عدد** ..... **کم می‌کنیم**.	۱۳۴۳
روز۹۹	قانون ضرب احتمال (اشتراک): $P(A \cap B) =$ قانون ضرب: $P(A \cap B) =$ ⇐ اگه A و B مستقل	۱۳۵۱
روز۹۹	**نکته مهم**: هر وقت بیش از ۱ کیسه داشته باشیم، این کیسه‌ها (**مستقل از هم** / وابسته بهم)؟ خواهند بود.	۱۳۵۶
روز۹۹	**حل فیشهای: ۱۳۴۲-۱۳۴۷-۱۳۴۹-۱۳۵۳-۱۳۵۵**	
روز۱۰۰	**فرمول احتمال شرطی برای:** **الف)** دو پیشامد مستقل (۲ فرمول): $P(A \cap B) =$ ⇐ A و B مستقل **ب)** برای دو پیشامد وابسته (۲ فرمول): $P(B\|A) =$ و $P(A\|B) =$ ⇐ A و B وابسته **ج)** برای دو پیشامد ناسازگار (۲ فرمول): $P(B\|A) =$ و $P(A\|B) =$ ⇐ A و B ناسازگار	۱۳۵۹ ۱۳۶۰
روز۱۰۰	$P(A\|B)=0 \xrightarrow{\text{یعنی}} P(A \cap B)= \ldots\ldots \xRightarrow{\text{پس}} \ldots\ldots\ldots\ldots A$ و B ⇐ $\ldots\ldots\ldots\ldots A$ و B	۱۳۶۱

روز ۱۰۰	محاسبه احتمال کل: الف) از طریق فرمول: $P(B) =$: احتمال کل (متوسط) ب) از طریق نمودار درختی:	۱۳۶۷ ۱۳۶۸
روز ۱۰۰	**حل فیشهای: ۱۳۵۸-۱۳۶۱-۱۳۶۲**	
روز ۱۰۱	**نکته تستی**: تو سوالای مربوط به انتخاب مهره از کیسه ها، هر وقت که .....، می‌تونیم این کیسه‌ها رو باهم مخلوط کنیم و در واقع اونا رو یه کیسه فرض کنیم. **نکته تستی**: تو مسائل، هروقت که دیدیم همزمان این ۲ شرط زیر برقراره: **شرط ۱**: از رنگ مهره خارج شده **پی‌اطلاع باشیم (بدون نگاه به رنگ)**. **شرط ۲**: این مهره خارج شده رو **کنار بذاریم** (یعنی نه اونو داخل مهره‌های قبلی بذاریم و نه اونو به کیسه یا ظرف دیگه‌ای انتقال بدیم). با این ۲ شرط، می‌تونیم فرض کنیم که	۱۳۸۱ ۱۳۸۶
روز ۱۰۱	**حل فیشهای: ۱۳۷۲-۱۳۷۴-۱۳۷۶-۱۳۷۹-۱۳۸۰-۱۳۸۱-۱۳۸۲-۱۳۸۵-۱۳۸۶**	
روز ۱۰۲	فرمول قضیه بیز: $P(A\|B) = \frac{P(\quad)}{P(\quad)} =$: قضیه بیز اگه کمی دقت کنیم، می‌بینیم که رابطه بالا (فرمول **قضیه بیز**)، کاملاً شبیه فرمول **احتمال شرطیه**، و فقط تنها فرقش با فرمول احتمال شرطی اینه که تو **قضیه بیز**، در مخرج کسر، ..... قرار می‌گیره. رابطه مکمل احتمال شرطی در قضیه بیز: $P(A\|B) =$ $\qquad$ $P(\acute{A}\|B) =$	۱۳۹۶ ۱۳۹۵ ۱۳۹۷
روز ۱۰۲	**حل فیشهای: ۱۳۸۸-۱۳۹۰-۱۳۹۳**	
روز ۱۰۳	**حل فیشهای: ۱۳۹۹-۱۴۰۱-۱۴۰۲-۱۴۰۴-۱۴۰۶-۱۴۰۷-۱۴۱۱-۱۴۱۳**	

روز	**باکس CTS (فصل ۱۱):** « **جمع بندی خلاصه نکات ، فرمول‌ها و روابط مهم هر سرفصل**»	فلش کارت
روز۱۰۵	**نتیجه مهم و کلیدی**: هر وقت کلمه «**تعداد**» رو دیدیم، باید سریع بفهمیم که متغیر تصادفی ما از نوع «**.....**» است. **نتیجه کاربردی**: هر وقت دیدیم که متغیر تصادفی ما تو یه **فاصله یا بازه**$[a , b]$ قرار گرفته (یعنی بین دو عدد صحیح a و b)، اون وقت خیلی سریع می‌تونیم بگیم که متغیر تصادفی ما از نوع **.....** است.	۱۴۲۰
روز۱۰۵	**یادمون باشه که**: در تستها، بعضی وقتا از عبارت «توزیع احتمال» استفاده می‌کنن که منظورشون همون ..... یعنی:	۱۴۲۴
روز۱۰۵	**خواص تابع احتمال**: **خاصیت اول**: مقادیر تابع احتمالِ $f(x)$همیشه باید عددی ..... باشه. **خاصیت دوم**: مجموع احتمالات مقادیر مختلف یه متغیر تصادفی در دو حالت **گسسته و پیوسته**، باید همیشه مساوی ..... بشه. **۲)** اگه متغیر تصادفی ما از نوع **گسسته** باشه، اون وقت تابع احتمال رو ..... یا ..... هم می‌نامیم.	۱۴۲۳
روز۱۰۶	۲ شرط تابع احتمال گسسسته: (۱) شرایط تابع (۲) احتمال گسسته	۱۴۲۵
روز۱۰۶	«**خواص و قوانین سیگما (Σ)**» **۱)** $\sum_{i=1}^{n} a$ **۲)** $\sum_{i=1}^{n}$ **۳)** $\sum_{i=a}^{b}$ **۴)** $\sum_{i=1}^{n} i^2$ **۵)** $\sum_{i=1}^{n} ax_i$ **۶)** $\sum_{i=1}^{n}(ax_i \pm b)$ **نکته مهم**: تو حالتی که عددهای ما از i=۱ شروع میشن، همیشه تعداد کل عددها از ۱ تا n **برابره با .....**و در نتیجه دیگه نیازی به شمردن تعداد عددها از ۱ تا n نیست. **یادآوری**: تعداد اعداد طبیعی بین دو عدد a و b (با احتساب خود a و خود b) برابره با: (b و ... و a) ..... = **تعداد اعداد بین a و b**	۱۴۳۵ ۱۴۳۸ ۱۴۳۶ ۱۴۳۷
روز۱۰۶	**ترفند محاسبه‌ای: هر وقت بخواهیم عدد ۱ رو بر یه کسری تقسیم کنیم که صورتش ۱ است (مثل کسر $\frac{1}{100}$)، راحت‌ترین و سریعترین راه اینه که .....**	۱۴۴۳
روز۱۰۶	**مجموع جملات یه تصاعد هندسی (در حالتی که تعداد جملات نامحدود باشه):** $S_n =$	۱۴۴۴
روز۱۰۶	**حل فیشهای: ۱۴۳۳-۱۴۴۰-۱۴۴۲-۱۴۴۴-۱۴۴۶**	
روز۱۰۷	«**نحوه محاسبه مُد در تابع احتمال گسسته**»: تو یه تابع احتمال **گسسته**، مُد (نما) مقداریه که ..... **نکته مهم**: حواسمون باشه اشتباه نکنیم. مد همیشه یه .... است، نه یه ....، یعنی همیشه باید تو **سطر بالای** جدول (یعنی تو سطر ..... ها) دنبال مد بگردیم و نه تو سطر.....ها.	۱۴۴۸
روز۱۰۷	«**نحوه بدست آوردن تابع احتمال y=g(x) از روی تابع احتمال f(x)**»: **حالت ۱)** اگه هیچکدوم از مقادیر x_i در تابع احتمال $f(x)$، **قرینهٔ هم نباشن**: **حالت ۲)** اگه بعضی یا همه x_iها در تابع احتمال $f(x)$**قرینهٔ هم باشن**:	۱۴۴۹ ۱۴۵۰
روز۱۰۷	فرق توزیع احتمال و تابع توزیع : فرق مهم { توزیع احتمال = ... = ... = ... تابع توزیع = ... = ... = ...	۱۴۵۱

روز۱۰۷		۱۴۵۱
روز۱۰۷	برای: $\left(X<\text{کمترین}x\text{جدول}\right) \Rightarrow F(X)=\ldots\ldots$ برای: $\left(X>\text{بزرگترین}x\text{جدول}\right) \Rightarrow F(X)=\ldots\ldots$ برای: $\left(\text{کوچکترین}x<X<\text{بزرگترین}x\right) \Rightarrow \ldots\ldots<F(X)<\ldots$	۱۴۵۶
روز۱۰۷	«**ویژگی‌های تابع توزیع (تابع احتمال تجمعی: $F(x)$)**» **ویژگی اول**: $\begin{cases} F(-\infty)=P(X\le -\infty)=\cdots\cdots\cdots \\ F(+\infty)=P(X\le +\infty)=\cdots\cdots\cdots \end{cases}$ **ویژگی دوم**: مقدار $F(x)$ همیشه ..... و بین ..... است. **ویژگی سوم**: تابع توزیع (تابع احتمال تجمعی:$F(X)$) همیشه (صعودی/ نزولی؟) است.	۱۴۵۷ ۱۴۵۸
روز۱۰۷	«**نحوه محاسبه چندکها در تابع احتمال گسسته**» (**۲ گام**): **گام اول**: تشکیل سطر ..... تو جدول تابع احتمال **گام دوم**: **الف) برای میانه**: **ب) برای چارک**aاُم: ج) برای دهک a اُم: د) برای صدک a اُم:	۱۴۶۱
روز۱۰۷	**حل فیشهای: ۱۴۵۳-۱۴۵۹-۱۴۶۱-۱۴۶۳**	
روز۱۰۸	«**نحوه بدست آوردن تابع احتمالِ گسسته f(x) از روی تابع احتمال تجمعیِ F(x)**»: **قانون ۱**: برای **اولین** و کوچکترین x جدول (یعنی: x_1)، همیشه این رابطه برقراره: $\underbrace{f(x_1)}_{\text{احتمال}} = \underbrace{\qquad}_{\text{احتمال تجمعی}}$ **قانون ۲**: برای بدست آوردن مقدار $f(x)$ برای بقیهٔ xهای جدول، فقط کافیه که ..... رو از .....، کم کنیم یعنی: $f(x_i) = \qquad - $	۱۴۶۴
روز۱۰۸	**فرمول محاسبه امید ریاضی یا میانگین متغیر تصادفی:** $E(x) =$ یا	۱۴۶۹
روز۱۰۸	«**خواص امید ریاضی (میانگین)**» ۱) $E(a)=\cdots$ ۲) $E(x\pm a)=\cdots$ ۳) $E(bx)=\cdots$ ۴) $E(bx\pm a)=\cdots$ ۵) $E(ax^2+bx+c)=\ldots$ ۶) $E[(x-a)^2]=\ldots$ ۷) $E[(x+a)^2]=\cdots$ ۸) $E(E(x))=\cdots$ $E(x^2)=$ ..... $E(x^3)=$	۱۴۷۶ ۱۴۷۷
روز۱۰۸	**حل فیشهای: ۱۴۶۴-۱۴۶۶-۱۴۶۸-۱۴۷۱-۱۴۷۲-۱۴۷۳-۱۴۷۹**	

روز۱۰۹ **«ادامه خواص امید ریاضی (میانگین)»**

۱۴۸۰ **۱)** امید انحرافات مقادیر (یعنی: x_iها) از میانگین‌شون، ..... است.

۱۴۸۱ **۲)** امید **مجذور** انحرافات (یا تفاضلات) مقادیر (x_iها) از **میانگین**شون، ..... است.

۳) امید **قدرمطلق** انحرافات (تفاضلاتِ) مقادیر (x_iها) از **میانه**شون، ..... است.

روز۱۰۹

	حالات طبیعت (پیامدهای ممکن)
گزینه‌ها	حالات طبیعت ← $S_1 S_2 \quad \dots \quad S_H$ احتمالها ← $(P_1)(P_2) \quad \dots \quad (P_H)$
$\begin{cases} a_1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{cases}$ گزینه‌ها	بازده‌ها $\begin{Bmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1H} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2H} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{k1} & M_{k2} & \dots & M_{kH} \end{Bmatrix}$

با توجه به جدول بازده (سود) روبرو:

الف) رابطه محاسبه ارزش پولی مورد انتظار:

۱۴۸۸

ب) رابطه ارزش مورد انتظار با اطلاعات کامل:

۱۴۹۱

ج) رابطه محاسبهٔ **ارزش اطلاعات کامل (ارزش مورد انتظار اطلاعات کامل):**

۱۴۹۲

روز۱۰۹ **حل فیشهای: ۱۴۸۲-۱۴۸۴**

روز۱۱۰ **براساس روش EMV (ارزش مورد انتظار پولی)، گزینهٔ بهینه** (بهترین گزینه)، اون گزینه‌ای است که .....

فرمول محاسبه واریانس (پِراش) یه متغیر تصادفی (۲ فرمول) بصورت فارسی و ریاضی:

۱۴۹۶

$$\begin{cases} 1)\ \delta^2 = \\ 2)\ \delta^2 = \end{cases}$$

۱۴۹۷

علائم واریانس (۴ مورد): = = = = پراش = واریانس

روز۱۱۰ **۱) خواص واریانس:** اگه a و b مقادیر ثابت (مثبت یا منفی) باشن، اون وقت حاصل عبارتهای زیرو بیان کنین:

۱۵۰۱

۱) $\delta^2(a)$ ۲) $\delta^2(bx)$

۳) $\delta^2\left(\frac{x}{b}\right)$ ۴) $\delta^2(x \pm a)$

۵) $\delta^2(bx \pm a)$ ۶) $\delta^2(\frac{x}{b} \pm a)$

۲) خواص انحراف معیار: اگه a و b مقادیر ثابت (مثبت یا منفی باشن)، اون‌وقت:

۱۵۰۲

۱) $\delta(a)$ ۲) $\delta(bx)$

۳) $\delta\left(\frac{x}{b}\right)$ ۴) $\delta(x \pm a)$

۵) $\delta(bx \pm a)$ ۶) $\delta(\frac{x}{b} \pm a)$

روز۱۱۰ **حل فیشهای: ۱۴۹۴-۱۴۹۵-۱۴۹۹-۱۵۰۰-۱۵۰۴-۱۵۰۵**

روز	باکس CTS (فصل ۱۲): « جمع بندی خلاصه نکات ، فرمول‌ها و روابط مهم هر سرفصل»	فلش کارت
روز۱۱۲	**۲ شرط تابع احتمال توأم گسسته $f(x_i, y_j)$:** شرط اول: شرط دوم:	۱۵۰۷
روز۱۱۲	**نحوه بدست آوردن تابع حاشیه ای:** **الف)** تابع حاشیه‌ای**x**: باید ..... ***رو جمع کنیم*** و اونو تو ..... جدول بنویسیم. **ب)** تابع حاشیه‌ای**y**: باید ..... ***رو جمع کنیم*** و اونو تو ..... جدول بنویسیم.	۱۵۱۳
روز۱۱۲	**نحوهٔ محاسبه امید ریاضی (میانگین) در توابع احتمال توأم گسسته»:** ا) $E(x) =$ ر) $E(y) =$	۱۵۱۶
روز۱۱۲	**«نحوه محاسبه واریانس (پِراش) در توابع احتمال توأم گسسته»** $\delta_x^2 =$ $\delta_y^2 =$	۱۵۲۱
روز۱۱۲	**حل فیشهای:۱۵۰۹-۱۵۱۰-۱۵۱۹**	
روز۱۱۳	**«استقلال یا وابستگی دو متغیر تصادفی X و Y»:** ۱) ***شرط استقلال*** دو متغیر تصادفی X و Y: x, y مستقل (ناوابسته) $\overset{\text{۲ طرفه}}{\rightleftarrows} \begin{cases} f(x,y) = \\ P(x,y) = \end{cases}$ **۲) *شرط وابستگی*** دو متغیر تصادفی X و Y: x, y وابسته $\overset{\text{۲ طرفه}}{\rightleftarrows} \begin{cases} f(x,y) \\ P(x,y) \end{cases}$ **۳) نکته:** اگه دو متغیر تصادفی X و Y**مستقل ازهم** باشن، اون‌وقت **همه** زوج متغیرهای تصادفیِ .....، ..... و ..... نیز **مستقل ازهم** خواهن بود.	۱۵۲۳ ۱۵۲۴
روز۱۱۳	**«بررسی استقلال یا وابستگی دو متغیر تصادفی گسسته»** **گام ۱:** اول ..... رو بدست میاریم. **گام ۲:** بعد باید شرط ***استقلال*** یعنی ..... رو برای **همه** زوجهای (x_i و y_j) بررسی کنیم. اگه به ازای ..... ***شرط استقلال*** برقرار نباشه، یعنی: $f(x,y) \neq f(x).f(y)$ باشه، اون وقت **x و y مستقل نیستن**، بلکه به‌هم **وابسته‌اند.**	۱۵۲۵
روز۱۱۳	**راه‌حل تستی** برای برقراری شرط استقلال: اینه که عناصر یه سطر، مضربی از ..... باشن، و یا عناصر یه ستون، مضربی از ..... باشن.	۱۵۲۷
روز۱۱۳	**نکته تستی خیلی جالب:** اگه تو جدول احتمال توأم، عدد ***صفر*** رو دیدیم، بدون هیچ فکر و محاسبه‌ای، خیلی سریع می‌گیم که x و y.....	۱۵۲۹
روز۱۱۳	**طرق مختلف نمایش تابع توزیع تجمعی توأم گسسته (۳ طریق):** = =	۱۵۳۱
روز۱۱۳	نحوه بدست آوردن «**تابع احتمال شرطی گسسته (توزیع شرطی گسسته)**»: **الف)** تابع احتمال شرطی گسستهٔ ***x به شرط y***: **ب)** تابع احتمال شرطی گسستهٔ ***y به شرط x***:	۱۵۳۴

	اگه دو متغیر تصادفی x و y، **مستقل از هم** باشن، اون‌وقت $f(y\|x)$ برابر ..... و $f(x\|y)$ هم مساوی ..... خواهد بود.	
روز۱۱۳	**حل فیشهای:** ۱۵۱۸-۱۵۱۹-۱۵۲۷-۱۵۲۹-۱۵۳۱	
روز۱۱۴	**نحوه محاسبه امید ریاضی شرطی (میانگین شرطی) دو متغیر تصادفی گسسته:** **الف)** (**امید ریاضی** X **به شرط** Y)؟ **ب)** (**امید ریاضی** Y **به شرط** X)؟	۱۵۴۳
روز۱۱۴	**حل فیشهای:** ۱۵۳۶-۱۵۳۸-۱۵۴۱-۱۵۴۳-۱۵۴۷	
روز۱۱۵	«**امید شرطی دو متغیر تصادفی مستقل**» **الف)** امید ریاضی x به شرط y برابره با: ..... **ب)** امید ریاضی y به شرط x برابره با: ..... x و y مستقل $\overset{\text{دوطرفه}}{\rightleftarrows}$ $\begin{cases} E(x\|y) = \\ E(y\|x) = \end{cases}$	۱۵۴۸
روز۱۱۵	«**امید ریاضی (یا میانگین) حاصلضرب دو متغیر تصادفی گسسته:** E(XY)» $E(xy) =$	۱۵۵۱
روز۱۱۵	«**امید ریاضی حاصلضرب دو متغیر تصادفی گسستهٔ مستقل**» $\xrightarrow{x,y \text{ مستقل}} E(xy) =$	۱۵۵۲
روز۱۱۵	«**امید ریاضی تقسیم دو متغیر تصادفی گسسته**»: $E\left(\frac{x}{y}\right) =$ $E\left(\frac{y}{x}\right) =$	۱۵۵۶

روز۱۱۵	«**امید ریاضی تقسیم دو متغیر تصادفی گسستهٔ مستقل**» **الف)** مقدار $E\left(\frac{x}{y}\right)$ برابره با: ..... **ب)** مقدار $E\left(\frac{y}{x}\right)$ برابره با: ..... امید ریاضی **تقسیم** دو متغیر x و y برابر ..... با: **تقسیم امید ریاضی یکی به امید ریاضی دیگری.**	۱۵۵۸ ۱۵۵۹
روز۱۱۵	**نکته مهم:** موقع حل تستای امید تقسیم X و Y، هیچ‌وقت نباید از ..... استفاده کنیم، بلکه همیشه اول باید ..... رو به ..... تبدیل کنیم.	۱۵۶۰
روز۱۱۵	«**واریانس حاصلضرب دو متغیر تصادفی گسسته:** $\delta^2_{xy} = Var(XY) =$ «**واریانس حاصلضرب دو متغیر تصادفی مستقل گسسته:** $\delta^2_{xy} = Var(XY) =$ **حالت خاص:** اگه x و y **مستقل از هم** باشن: x و y مستقل $\rightarrow \begin{cases} E(xy) = \\ \underbrace{E(x^2y^2)}_{\text{امید حاصلضرب}} = \end{cases}$	۱۵۶۱
روز۱۱۵	**حل فیشهای:** ۱۵۴۹-۱۵۵۱-۱۵۵۴-۱۵۶۰-۱۵۶۱	
	DLM	

روز	باکس CTS (فصل ۱۳): « جمع بندی خلاصه نکات ، فرمول‌ها و روابط مهم هر سرفصل»	فلش کارت
روز۱۱۷	اگه دو متغیر x و y **به هم وابسته** باشن و در عین حال، **وابستگی اونا خطی** باشه، تو این حالت اصطلاحاً می‌گیم که x و y **..... اند.** پس به زبون ساده، **همبستگی** یعنی: **.....** دو متغیر **نمودار رابطه بین دو متغیر را (بر حسب اینکه مستقل، وابسته، همبسته یا ناهمبسته باشند):**	۱۵۶۳
	وضعیت همبستگی x و y: x و y همبسته‌اند — نوع رابطه x و y: x و y **.....** دارن. x و y ناهمبسته‌اند — x و y ..... دارن.	۱۵۶۳
	شرط همبستگی دو متغیر: اولاً: / ثانیاً:	۱۵۶۴
	اگه y و x ناهمبسته باشن: y و x یا ..... / و یا	۱۵۶۵
	استثناء: y و x ناهمبسته و دارای تابع توزیع توأم نرمال $\xrightarrow{\text{حتماً}}$ ... ... x و y	
روز۱۱۷	کواریانس، شاخصیه که ..... و ..... **وابستگی خطی (همبستگی)** بین دو متغیرِ x و y رو مشخص می‌کنه.	۱۵۶۶
	x و y مستقلند $\xrightarrow[\not\leftarrow]{\text{۱ طرفه}} Cov(x,y) = \cdots$: ... ... x و y	
	x و y وابستگی غیرخطی دارن $\xrightarrow[\not\leftarrow]{\text{۱ طرفه}} Cov(x,y) = \cdots$: ... ... x و y	
	مفهوم همبستگی مستقیم (مثبت):	۱۵۶۷
	مفهوم همبستگی معکوس (منفی):	
روز۱۱۷	y و x وابسته: **وابستگی خطی** → ... ... x و $y \Rightarrow cov(x,y)$ ... ... **وابستگی غیرخطی** → ... ... x و $y \Rightarrow cov(x,y)$	۱۵۶۸
روز۱۱۷	**کواریانس: واریانس مشترک= هم پِراش** : $(cov(x,y) = \delta_{x,y})$	
	۱) کواریانس از نظر عددی برابره با ..... که اون رو با نماد ..... یا ..... نشون می‌دیم.	۱۵۶۹
	۲) فرمولهای محاسبه کوواریانس (۳ فرمول):	
	۱) $\delta_{x,y} = cov(x,y) =$	۱۵۶۹
	۲) $\delta_{x,y} = cov(x,y) =$	۱۵۷۰
	۳) $\delta_{x,y} = cov(x,y) =$	
روز۱۱۷	**نتیجه:** قبل از حساب کردن کواریانس، اول باید یه نگاهی بندازیم و ببینیم که آیا x و y **مستقل‌اند** یا نه و اگه **.....** بودند، دیگه کواریانس رو حساب نکنیم، چون **حتماً .....**	۱۵۷۲

	نکته تستی خیلی خیلی مفید برای حل تستهای کواریانس: زمانی که می‌خواهیم **مستقل** بودن x و y رو بررسی کنیم، اگه با یکی از حالات زیر روبرو شدیم، سریع می‌تونیم بگیم که **x و y** ..... و در نتیجه کواریانس ..... : x و y ..... و cov = ... اگه: ۱) عناصر یه سطر، **مضربی** از عناصر سطر دیگه باشن. ۲) عناصر یه ستون، **مضربی** از عناصر ستون دیگه باشن. ۳) اگه همه سطرهای جدول شبیه هم باشن ۴) اگه همه ستونهای جدول **مثل هم** باشن. و هم‌چنین برای فهمیدن ..... بودن x و y می‌تونیم از نکته تستی زیر استفاده کنیم: **x و y ..... هستن اگه ⇐ حداقل یکی از احتمالات توأم یعنی $f(x,y)$، صفر باشه.**	۱۵۷۳ ۱۵۷۳
روز۱۱۷	**نکته تستی**: **برای محاسبه هرچه سریعتر $E(xy)$ بهتره تو هر سطر یا ستونی که ..... دیدیم، اون ضرب رو انجام ندیم.**	۱۵۷۵
روز۱۱۷	**قاعده کلی**: **هنگام محاسبه کواریانس در تستها، همیشه اول باید یه نگاهی به گزینه‌هامون بندازیم، اگه «صفر» دیدیم، باید شکّمون بره به ..... بودن x و y.**	۱۵۷۶
روز۱۱۷	**حل فیشهای: ۱۵۶۳-۱۵۶۸-۱۵۷۳-۱۵۷۴-۱۵۷۶-۱۵۷۷**	
روز۱۱۸	**فرمول محاسبه کواریانس با استفاده از مشاهدات نمونه (با استفاده از زوج نقاط (x_j و y_j)):**	۱۵۷۹
روز۱۱۸	**«خواص کواریانس»** ۱) $cov(x,y) = \cdots$ ۲) $cov(x,x) = \cdots$ ۳) $cov(x,a) = \cdots = \cdots = \cdots$ ۴) $cov(ax,by) = \cdots$ **توضیح**: ضرب کردن داده‌ها (x و y) در یه عدد ثابت (مثل a یا b) در واقع به معنی **تغییر** ..... داده‌هاست. **نکته**: این خاصیت نشون میده که اگه ما **واحد (یا مقیاس)** اندازه‌گیری x و y رو تغییر بدیم، اون‌وقت کواریانس **تغییر** ..... ۵) $cov(x \pm c\ ,\ y \pm d) = \cdots$ **توضیح**: جمع یا منها کردن داده‌ها (x و y) از مقادیر ثابت (a و b)، در واقع به معنی ..... داده‌هاست. **نکته**: خاصیت بالا به ما میگه که اگه **مبدأ** اندازه‌گیریِ x و y رو تغییر بدیم (یعنی با اضافه یا کم کردن مقادیر ثابت c و d)، با این کار، مقدار کواریانس **تغییر** ..... ۶) $cov(ax \pm c\ ,\ by \pm d) = \cdots$ **یعنی**: اگه همزمان، هم **واحد** اندازه‌گیری‌داده‌ها تغییر کنه (ax و by) و هم **مبدأ** اندازه‌گیری اونا تغییر کنه ($\pm c$ و $\pm d$)، اون‌وقت کواریانس این داده‌ها **تغییر** ..... ۷) $cov(ax+cy\ ,\ z) = \cdots$ ۸) $cov(ax+cy\ ,\ bz+dt) = \cdots$ **حواسمون باشه که:** همیشه باید فقط برای اون‌جمله‌هایی که بین‌شون علامت ..... است، کواریانس رو بنویسیم و نه برای اون جمله‌هایی که بین‌شون علامت ..... است.	۱۵۸۰ ۱۵۸۱ ۱۵۸۲
روز۱۱۸	**«واریانس مجموع دو متغیر تصادفی: Var(ax+by+c)»**: **الف)** در حالت کلی (x و y **مستقل** باشن یا **وابسته**): $Var(ax+by+c) =$	۱۵۸۷

	ب) اگه x و y **مستقل** باشن: $Var(ax+by+c)=$ **نتیجه**: اگه متغیرهای ما همگی دو به دو **مستقل از هم** باشن، اون‌وقت واریانس مجموع اونا برابر میشه با	۱۵۸۸
روز۱۱۸	**حل فیشهای: ۱۵۷۹-۱۵۸۳-۱۵۸۴-۱۵۸۵-۱۵۸۹-۱۵۹۰-۱۵۹۱**	
روز۱۱۹	«**امید ریاضی و واریانس $(x \pm y)$ در ۲ حالت x و y همبسته یا ناهمبسته**» **الف)** تو حالت کلی (x و y **مستقل، وابسته، همبسته** یا **ناهمبسته**) $E(x+y)=$ $\quad$ $E(x-y)=$ $V(x+y)=$ $\quad$ $V(x-y)=$ **ب)** اگه x و y **مستقل (ناهمبسته)** باشن. $V(x+y)=$ $\quad$ $V(x-y)=$	۱۵۹۴ ۱۵۹۵
روز۱۱۹	«**ضریب همبستگی ($\rho_{x,y}$)**: Coefficient of Correlation» **۱)** کواریانس، معیاریه که ..... (مستقیم یا معکوس بودن) و ..... ارتباط **خطی** (یعنی **همبسته** یا **ناهمبسته** بودن) دو متغیر x و y رو نشون میده و از نظر **علامت** هم، با ..... هم علامته. **اما اگه ما علاوه بر تعیین ..... و ..... ارتباط خطی بین دو متغیر، بخواهیم ..... ارتباط خطی اونا رو هم بررسی کنیم، باید از معیار دیگه‌ای به نام ضریب همبستگی استفاده کنیم که اونو با نماد ..... یا ..... یا ..... نشون می‌دیم.** **شدت ناقص همبستگی: زمانیه که خط رگرسیون از همه نقاط واقعی (y و x) عبور .....** **شدت کامل همبستگی: زمانیه که خط رگرسیون از همه نقاط واقعی (y و x) عبور .....**	۱۵۹۹ ۱۶۰۰
روز۱۱۹	**فرمول محاسبه ضریب همبستگی جامعه**: $\rho_{x,y}=$ **ضریب همبستگی هر جامعه، یه معیار نسبی (بدون واحده) که در فاصله.... ... ... قرار داره.** **فرمول محاسبه ضریب همبستگی برای داده های نمونه**: $r_{x,y}=$ **توجه**: تنها کافیه که همون فرمول ضریب همبستگی **جامعه** رو یاد بگیریم، چون هروقت به ضریب همبستگی **نمونه** نیاز داشته باشیم، با جایگزینی .. ... به جای ..... می‌تونیم به اون برسیم.	۱۶۰۲ ۱۶۰۴
روز۱۱۹	**حل فیشهای: ۱۵۹۷-۱۵۹۸-۱۶۰۵-۱۶۰۶-۱۶۰۷-۱۶۰۸**	
روز ۱۲۰	«**تحلیل ضریب همبستگی (از نظر نوع، جهت و شدت همبستگی x و y)**»: ۱) علامت ضریب همبستگی به علامت ..... بستگی داره (ضریب همبستگی چه‌وقت **صفر، مثبت** یا **منفی** میشه؟) **نکته مهم**: همیشه: علامت ضریب همبستگی(ρ یا r) = علامت ..... = علامت ..... **۲)** اگه ضریب همبستگی x و y **مخالف صفر** باشه، اون‌وقت: **الف)** x و y (همبسته/ ناهمبسته؟) هستن، **ب)** و x و y باهم **وابستگی** (خطی/غیرخطی؟) دارن، **ج)** و حتماً **کواریانس** اونا و نیز **شیب خط رگرسیون** (صفر/مخالف صفر؟) خواهد بود. **۳)** اگه ضریب همبستگی x و y مساوی **صفر** باشه: **الف)** x و y (همبسته/ ناهمبسته؟) اند، **ب)** و حتماً **کواریانس** اونا و نیز **شیب خط رگرسیون** (صفر/ مخالف صفر؟) خواهد بود.	۱۶۱۰
روز ۱۲۰	«**تحلیل ضریب همبستگی (از نظر نوع، جهت و شدت همبستگی x و y)**» **۱)** (مقدار/ علامت؟) ضریب همبستگی، **شدت** ارتباط خطی (**شدت** همبستگی) دو متغیر رو نشون میده (**شدت کامل یا ناقص**). **۲)** (مقدار/ علامت؟) ضریب همبستگی، **جهت** ارتباط خطی (**جهت** همبستگی) دو متغیر رو نشون میده (**ارتباط مستقیم یا معکوس**).	۱۶۱۱

۱۶۱۵	$\left.\begin{array}{c}\text{مستقل } x,y \\ \text{وابستگی غیرخطی } x,y\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{.....} x,y} \left\{\begin{array}{l} Cov(x,y)=\cdots \to \rho = r = \cdots \\ E(xy)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V(x\pm y)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$ **نکته خیلی خیلی مهم**: روابط بالا فقط به صورت ۱ طرفه از چپ به راست برقرارند، ولی از راست به چپ لزوماً برقرار نیستن؛ چون وقتی از راست به چپ برمی‌گردیم به ۲ تا شاخه می‌رسیم (یعنی یا x و y **مستقلند** و یا **وابستگی غیرخطی** دارن).	روز ۱۲۰
۱۶۱۶	اگر $\Rightarrow$ **در توزیع نرمال** $\left\{\begin{array}{c} Cov(x,y)=0 \\ \text{یا} \\ \rho_{x,y}=0 \\ \text{یا} \\ E(xy)=E(x)E(y) \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{حتماً}}$ ..... x و y	روز ۱۲۰
۱۶۲۰	**نکته مهم**: تو حل تستهای محاسبه ضریب همبستگی، قبل از هرکاری بهتره که اول، ..... رو بررسی کنیم، چون اگه x و y ..... باشن، اون‌وقت کواریانس اونا ..... میشه، یعنی هیچ همبستگی‌ای (ارتباطی خطی‌ای) بین x و y وجود نداره، در نتیجه ضریب همبستگی اونا هم ..... میشه.	روز ۱۲۰
۱۶۲۱	**نکته تستی**: که اگه X و Y **توانی غیر ۱** داشته باشن(مثلا: $y=x^2$)، اون‌وقت دیگه ارتباط X و Y بصورت **خطی** نخواهد بود، بلکه در این حالت، X و Y باهم ارتباط **غیرخطی** دارن، و در نتیجه (همبسته اند/ ناهمبسته‌اند؟) و کواریانس و ضریب همبستگی اونا	روز ۱۲۰
	حل فیشهای: ۱۶۱۴-۱۶۱۵-۱۶۱۶-۱۶۱۷-۱۶۲۰-۱۶۲۱	روز ۱۲۰
۱۶۲۳ ۱۶۲۴ ۱۶۲۴	«**محاسبه ضریب همبستگی نمونه**» ۱) دو رابطه برای محاسبه ضریب همبستگی نمونه : ۲) معادل نمادهای اختصاری زیر رو بنویسین: الف) $S_{xy}=S\rho_{x,y}=\cdots$ ب) $S_{xx}=SS_x=\cdots$ ج) $S_{yx}=SS_y=\cdots$ **۳) محاسبه** ضریب همبستگی داده‌های **نمونه** با استفاده از سه نماد اختصاری بالا: **نمونه** $r_{x,y}=$	روز ۱۲۱
۱۶۳۳ ۱۶۳۳ ۱۶۳۴	«**خواص ضریب همبستگی**» ۱) $\rho_{x,y}=\cdots$ ۲) $\rho_{x,a}=\rho_{a,x}=\rho_{a,b}=\cdots$ ۳) $\rho_{x,x}=\cdots=\cdots$ ۴) $\rho_{x,-x}=\cdots=\cdots$ ۵) $\rho_{ax\pm b\ ,\ cy\pm d}=$	روز ۱۲۱
	حل فیشهای: ۱۶۲۵-۱۶۲۷-۱۶۲۹-۱۶۳۱-۱۶۳۷	روز ۱۲۱
۱۶۴۲	**تعریف ضریب تعیین و فرمول آن: ضریب تعیین (R^2) معیاریه که از ..... بدست میاد که از اون برای بیان ..... استفاده می‌کنیم:** $R^2=$ **محدوده ضریب تعیین: مقدار ضریب تعیین همیشه عددی ..... که در فاصله..... قرار داره.**	روز ۱۲۲

روز ۱۲۲	**معیار مناسب برای «مقایسه شدت (یا قوی بودن) همبستگی چند متغیر»:**	۱۶۴۹
روز ۱۲۲	**مفهوم خط برازش (خط رگرسیون) با رسم نمودار:** **نکته**: شکل بالا بخوبی نشون میده که خط رگرسیون، حتماً از ..... عبور می‌کنه و هم‌چنین فاصله این خط، از مابقی نقاط، ..... است.	۱۶۵۲ ۱۶۵۳ ۱۶۵۳
روز ۱۲۲	**حل فیشهای: ۱۶۳۹-۱۶۴۰-۱۶۴۶-۱۶۴۷-۱۶۴۸-۱۶۴۹**	
روز ۱۲۳	«**نحوهٔ بدست آوردن معاله خط رگرسیون**: y=bx+a» ۱) فرمول محاسبه **شیب** خط رگرسیون [۵ فرمول]: $b =$ = = = = = **یه ترفند جالب**: برای اینکه این روابط رو راحت‌تر بخاطرمون بسپریم، کافیه که فقط صورت این ۴ کسر رو یاد بگیریم، چون برای نوشتن مخرج این کسرها می‌تونیم از صورت این کسرها استفاده کنیم، به طوری که هر جا ..... دیدیم، به جاش در مخرج کسر، ..... قرار می‌دیم. **نتیجه مهم**: پس یادمون باشه که موقع نوشتن b (شیب رگرسیون)، باید تو صورت همه کسرهامون، ..... وجود داشته باشه، ولی تو مخرج این کسرها، باید ..... وجود داشته باشه. ۲) فرمول محاسبه **ثابت** معادله خط رگرسیون (یعنی a):	۱۶۵۵ ۱۶۵۶
روز ۱۲۳	**حل فیشهای: ۱۶۵۱-۱۶۵۷-۱۶۶۱-۱۶۶۲-۱۶۶۳-۱۶۶۵**	
روز ۱۲۴	**رابطه بین ضریب همبستگی و شیب خط رگرسیون:**	۱۶۷۱
روز ۱۲۴	**طبق خواص ضریب همبستگی می‌دونیم اگه مقادیر x و y رو در مقادیر ثابتی (مثل a و b) ضرب کنیم، مقدار ضریب همبستگی تغییر ..... و علامت ضریب همبستگی ..... و اون هم موقعیه که ..... باشن.**	۱۶۷۲
روز ۱۲۴	«**ارتباط ضریب تعیین (R^2) و شیب خط رگرسیون (b)**» **۱)** فرق دو مفهوم زیر با رسم نمودار: **الف)** خط رگرسیون **y** روی **x** (**y** برحسب **x**) **ب)** خط رگرسیون **x** روی y (x بر حسب y) **۲)** رابطه معادله خط رگرسیون و شیب اون برای هر یک از ۲ حالت بالا: **۳)** از **ضرب** «شیب خط y روی x» در «شیب خط x روی y» چه چیزی بدست میاد؟	۱۶۷۴ ۱۶۷۵

روز۱۲۴	**توجه**: هر وقت در تستها به ما ۲ تا معادله خط رگرسیون را دادند و R^2 یا r رو از ما خواستن، باید از رابطه زیر باید استفاده کنیم:	۱۶۷۷
روز۱۲۴	**یادآوری**: برای گویا کردن یه کسر، باید ..... کنیم.	۱۶۷۸
روز۱۲۴	**حل فیشهای:** ۱۶۶۷-۱۶۶۹-۱۶۷۱-۱۶۷۲-۱۶۷۶-۱۶۷۷	

روز	باکس CTS (فصل ۱۴): « جمع بندی خلاصه نکات ، فرمول‌ها و روابط مهم هر سرفصل»	فلش کارت
روز۱۲۶	**تعریف متغیر تصادفی پیوسته**: متغیری که مقادیرش رو ..... اختیار می‌کنه.	۱۶۷۹
	دو شرط تابع احتمال پیوسته:	۱۶۸۰
	قاعده کلی: هر وقت در تستها کلمه «**چگالی**» رو دیدیم، سریع می‌فهمیم که با یه تابع احتمال ..... روبرو هستیم.	۱۶۸۱
روز۱۲۶	«**نحوهٔ محاسبهٔ احتمال در تابع چگالی احتمال پیوسته**»:	
	تو تابع چگالی احتمالی پیوسته: **اولاً**: احتمال در بازهٔ a تا b برابره با: ..... **ثانیاً**: احتمال اینکه متغیر تصادفی x، **دقیقاً** مقدار a رو اختیار کنه، برابره با:	۱۶۸۳ ۱۶۸۴
روز۱۲۶	**رابطه بین تابع توزیع و تابع چگالی احتمال**:	۱۶۸۹
	الف) اگه تابع توزیع (تجمعی) یعنی F(x) رو به ما داده باشـــن، با ..... می‌تونیم به تابع چگالی احتمال یعنی f(x) برســـیم:	
	ب) و اگه تابع چگالی احتمال یعنی f(x) رو به ما داده باشن، با ..... می‌تونیم به تابع توزیع (تجمعی) یعنی F(x) برسیم:	
	نحوه محاسبه انتگرال معین: ..... − .....:مقدار انتگرال معین	۱۶۹۱
	ترفند مفید: موقع حساب کردن انتگرال معین، برای سرعت عمل بیشتر، بهتره که همیشه قبل از هر کاری، اول بیائیم ..... قرار بدیم.	۱۶۹۱
	انتگرال عبارات تواندار: $\int kx^n dx =$	۱۶۹۱
	انتگرال عبارت رادیکالی: $\int \sqrt[n]{x^1} dx =$	۱۶۹۲
	انتگرال عدد نپر: $\int e^{ax} dx =$	۱۶۹۳
	حالت خاص: در ساده‌ترین حالت که در اون ضریب x مساوی ۱ است، انتگرال e^x مساوی ..... میشه.	۱۶۹۴
روز۱۲۶	**حل فیش:۱۶۸۸**	
روز۱۲۷	**قانون ۱**: هر وقت تابع چگالیِ f(x) رو به ما بدهند و از ما ضریب ثابتی (مثل c یا k) رو بخواهند، فقط کافیه که ..... قرار دهیم تا مقدار ثابت (c یا k) بدست بیاد.	۱۶۹۹
روز۱۲۷	**نشونه های تابع احتمال پیوسته (۲ نشانه)**:	۱۷۰۱
	۱) در صورت سؤال ..... وجود داشته باشه. **۲)** فضای نمونه ما به‌صورت ..... مطرح شده باشه، یعنی به صورت ... ... و یا ..... و یا	
روز۱۲۷	**رابطه تبدیل یه عبارت کسری به توان دار**: $\frac{a}{x^n} =$	۱۷۰۴
روز۱۲۷	**رابطه تبدیل یه عبارت جذری به عبارت توان‌دار**: $\sqrt[n]{x^m} =$.....	۱۷۰۶
روز۱۲۷	**نحوه نوشتن قانون ۱، در توابع احتمال چند ضابطه ای**: **در توابع احتمالی که به صورت چند ضابطه‌ای هستن، موقع نوشتن قانون ۱، باید** .... **حساب کنیم و در آخر**.....**کنیم.**	۱۷۰۹
روز۱۲۷	**حل فیشهای: ۱۶۹۷-۱۶۹۸-۱۷۰۳-۱۷۰۴-۱۷۰۶-۱۷۰۸-۱۷۰۹**	

روز۱۲۸	**توجه:** e که همون **عدد نپر** است برابر است با: .....=e، بنابراین اگه این عدد، به توان بی‌نهایت برسه (e^{∞})، ..... میشه: $e^{\infty} = \cdots$، پس: $\frac{۱}{e^{\infty}} = \ldots\ldots$	۱۷۱۲
روز۱۲۸	**قانون ۲:** هر وقت تابع چگالیِ $f(x)$ رو به ما داده باشن و از ما احتمال در بازه‌ای (مثل c تا d) رو از ما بخواهند، فقط کافیه که ..... رو حساب کنیم. به عبارت دیگه، احتمال در هر بازه، برابره با:	۱۷۱۵
روز۱۲۸	**تذکر مهم: موقع انتگرال گرفتن از دو عبارت شامل x که در هم ضرب شده‌اند (مثل عبارت $۶x(۱-x)$) باید قبل از محاسبه انتگرال، اول بیاییم ..... و بعد انتگرال رو حساب کنیم.**	۱۷۲۴
روز۱۲۸	**حل فیشهای: ۱۷۱۱-۱۷۱۲-۱۷۱۴-۱۷۲۳**	
روز۱۲۹	**توصیه خیلی مهم: موقع حساب کردن انتگرال عبارات شامل e، برای پرهیز از اشتباه محاسباتی، بهتره که قبل از حساب کردن انتگرال معین، همیشه اول .....**	۱۷۲۷
روز۱۲۹	**قانون ۳:** اگه تابع چگالی f(x) رو به ما داده باشن و از ما بپرسن احتمال اینکه متغیر تصادفی x، **دقیقاً** مقدار مشخصی (مثلِ a) رو اختیار کنه، چقدره، اون‌وقت باید بگیم که مقدار این احتمال برابره با:	۱۷۲۹
روز۱۲۹	**قانون ۴: اگه تابع چگالیِ $f(x)$ رو به ما داده باشن و از ما مقدار Mod (نما) رو بخواهند، اون‌وقت باید ..... قرار بدیم و از اونجا، ..... رو بدست بیاریم.**	۱۷۳۱
روز۱۲۹	**«نحوهٔ محاسبه میانگین با استفاده از :** **الف) تابع چگالی احتمال پیوسته** f(x)»: **ب) تابع توزیع (تجمعی) احتمال پیوسته: اگه در مسئله‌ای، بجای تابع چگالی احتمال $f(x)$، به ما تابع توزیع (تجمعی) $F(x)$ رو داده باشن، اول باید ..... کنیم و بعد از رابطه بالا، امید ریاضی رو حساب کنیم.**	۱۷۳۳ ۱۷۳۴
روز۱۲۹	**نکته مهم: هنگام مشتق‌گیری از توابع توزیع چند ضابطه‌ای(برای رسیدن به تابع چگالی احتمال)، باید حواسمون باشه که فقط از اون ضابطه‌هایی باید مشتق بگیریم که .....**	۱۷۴۱
روز۱۲۹	**حل فیشهای: ۱۷۲۷-۱۷۳۱-۱۷۳۵-۱۷۳۷-۱۷۳۹-۱۷۴۱**	
روز ۱۳۰	**نحوه محاسبه امید ریاضی** y **تابعی از** x: $\boldsymbol{E(y) = E(g(x)) =}$	۱۷۴۳
روز ۱۳۰	**فرمولهای زیر را با استفاده از امید ریاضی بنویسید:** **الف)** گشتاور **اولیه**مرتبه اول **ب)** گشتاور **اولیه**مرتبه دوم **ج)** گشتاور **اولیه**مرتبه سوم **د)** گشتاور **اولیه**مرتبه چهارم	۱۷۴۶
روز ۱۳۰	**«نحوهٔ محاسبهٔ واریانس با استفاده از تابع چگالی احتمال پیوستهٔ** f(x)»:	۱۷۴۸
روز ۱۳۰	**«نحوهٔ محاسبه چندکها با استفاده از تابع چگالی احتمال پیوستهٔ** f(x)»: **قانون ۵:** اگه به ما تابع چگالیِ $f(x)$ رو بِدَن و مقدار یکی از چندکها (شامل: چارک، دهک، صدک و یا میانه) رو از ما بخوان، فقط کافیه که ..... قرار بدیم تا مقدار حدّ ..... انتگرال بدست بیاد؛ در این وضعیت، این حدّ ..... همون چندک مورد نظر ماست.	۱۷۵۲

روز ۱۳۰	**حل فیشهای:** ۱۷۴۵-۱۷۵۰-۱۷۵۳-۱۷۵۴	
روز ۱۳۱	**نحوهٔ نوشتن تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی پیوستهٔ x از روی تابع چگالی احتمال:** **تابع تجمعی پیوسته:** $F(x_i) =$ $P\left(x \le \text{حد پایین}\right) = F\left(\text{حد پایین}\right) = F(-\infty) \ldots$ $P\left(x \le \text{حد بالا}\right) = F\left(\text{حد بالا}\right) = F(+\infty) = \ldots$ **نکته مهم**: همیشه کمترین مقدار تابع تجمعی F(x) مساوی ..... و بیشترین مقدارش هم مساوی ..... است، یعنی: $\boxed{\text{تابع تجمعی}: F(x) \le \ldots\ldots \le \ldots\ldots}$	۱۷۵۵ ۱۷۵۶ ۱۷۵۸
روز ۱۳۱	**نکته تستی جالب**: انتگرال یه عدد، ..... بدست میاد، مثلا انتگرال $\frac{1}{10}$ برابره با	۱۷۵۹
روز ۱۳۱	**حل فیشهای:** ۱۷۵۹-۱۷۶۱-۱۷۶۳-۱۷۶۴	
روز ۱۳۲	«**محاسبه احتمال با استفاده از تابع توزیع تجمعیِ** F(x)»: **حالت الف)** اگه a و b دو عدد در فاصلهٔ بین حد پایین و بالای x باشن، ۱) $P(x = a) =$ ۲) $P(x < a) =$ ۳) $P(x > a) =$ ۴) $P(a \le x \le b) =$ **حالت ب)** اگه a و b کمتر از حد پایینِ x باشن: ۱) $P(x = a) =$ ۲) $P(x < a) =$ ۳) $P(x > a) =$ ۴) $P(a \le x \le b) =$ **حالت ج)** اگه a و b بیشتر از حد بالای x باشن: ۱) $P(x = a) =$ ۲) $P(x < a) =$ ۳) $P(x > a) =$ ۴) $P(a \le x \le b) =$	۱۷۶۶ ۱۷۶۷ ۱۷۶۸
روز ۱۳۲	«**نحوهٔ محاسبهٔ مد با استفاده از تابع توزیع (تجمعی) پیوستهٔ** f(x)» **گام اول:** **گام دوم:**	۱۷۷۱
روز ۱۳۲	«**نحوهٔ محاسبهٔ میانگین با استفاده از تابع توزیع (تجمعی) پیوستهٔ** f(x)» **گام اول:** **گام دوم:**	۱۷۷۲
روز ۱۳۲	«**نحوهٔ محاسبهٔ واریانس با استفاده از تابع توزیع (تجمعی) پیوستهٔ** f(x)» **گام اول:** **گام دوم:**	۱۷۷۴
روز ۱۳۲	«**نحوهٔ محاسبهٔ چندکها با استفاده از تابع توزیع (تجمعی) پیوستهٔ** f(x)»: **الف) میانه:** **ب) چارک a ام** **ج) دهک a ام** **د) صدم a ام**	۱۷۷۶
روز ۱۳۲	**حل فیشهای:** ۱۷۶۹-۱۷۷۰-۱۷۷۱-۱۷۷۴-۱۷۷۶-۱۷۷۸	

روز	باکس CTS (فصل ۱۵): « جمع بندی خلاصه نکات ، فرمول‌ها و روابط مهم هر سرفصل»	فلش کارت
روز ۱۳۴	**دو شرط تابع احتمال توأم پیوسته:** **الف)** **ب)** **توجه:** وقتی می‌خواهیم از عبارت Cxy نسبت به x انتگرال بگیریم، باید .....رو ثابت فرض کنیم، یعنی با اونا مثل عدد رفتار کنیم.	۱۷۷۹ ۱۷۸۰
روز ۱۳۴	**در تابع احتمال توأم پیوسته:** $P(x=a\ ,\ y=b)=$ $P\left(x_1<x<x_2\ ,\ y=b\right)=$ $P\left(x=a\ ,\ y_1<y<y_2\right)=$	۱۷۸۵
روز ۱۳۴	**نحوه محاسبه توابع حاشیه ای از روی تابع احتمال توأم پیوسته:** **تابع حاشیه‌ای x:** $f(x)=$ **تابع حاشیه‌ای y:** $f(y)=$ یعنی برای بدست آوردن تابع احتمال حاشیه‌ای هر یک از متغیرها، فقط کافیه که از ..... انتگرال بگیریم، یعنی: ۱) برای نوشتن تابع احتمال حاشیه‌ای x که همون f(x) است، کافیه از ..... انتگرال بگیریم: **۲) برای نوشتن تابع احتمال حاشیه‌ای y که همون f(y) است، فقط کافیه از ..... انتگرال بگیریم.**	۱۷۸۸
روز ۱۳۴	**حل فیشهای: ۱۷۸۲-۱۷۸۶-۱۷۸۹**	
روز ۱۳۵	**محاسبه امید ریاضی در تابع احتمال توأم پیوسته:** $\begin{cases} f(x)= & \longrightarrow E(x)= \\ f(y)= & \longrightarrow E(y)= \end{cases}$ **نکته:** همیشه یادمون باشه مقداری که برای امید ریاضی به متغیر بدست میاریم، باید حتماً در محدودهٔ ..... قرار داشته باشه. از این نکته می‌تونیم برای حذف گزینه‌های غلط در تست‌ها استفاده کنیم.	۱۷۹۱ ۱۷۹۲
روز ۱۳۵	**محاسبه واریانس در تابع احتمال توأم پیوسته (۳ گام):** مراحل محاسبه واریانس در تابع احتمال توأم: گام ۱) گام ۲) گام ۳)	۱۷۹۶
روز ۱۳۵	**دو شرط لازم برای مستقل بودن دو متغیر تصادفی پیوسته x و y:** **اول:** **ثانیا:**	۱۷۹۹
روز ۱۳۵	**نحوه بدست آوردن تابع احتمال شرطی دو متغیر تصادفی پیوسته x و y:** **تابع احتمال شرطی x به شرط y:** $f(x\|y)=$ **تابع احتمال شرطی y به شرط x:** $f(y\|x)=$ **یادآوری ۱:** در تابع احتمال شرطی، همیشه: **الف)** متغیر **شرطی** رو در سمت ..... خط عمودی می‌نویسیم. **ب)** و تابع احتمال (تابع چگالی) این متغیر **شرطی** رو در ..... می‌نویسیم. **حالت خاص: اگر** x و y **دو متغیر تصادفی مستقل باشن:** $f(x\|y)=f(y\|x)=$	۱۸۰۲ ۱۸۰۲

روز۱۳۵	**نحوهٔ محاسبه امید شرطی دو متغیر پیوسته** x **و** y:	۱۸۰۷
	$E(x\|y) =$: امید x به شرط y	
	$E(y\|x) =$: امید y به شرط x	
	نکته مهم: هنگام محاسبه امید شرطی، فقط باید نسبت به متغیر ..... (یعنی متغیر سمت ..... خط عمودی) انتگرال بگیریم.	۱۸۰۸
	حالت خاص: اگه x و yمستقل از هم باشن: $\begin{cases} E(x\|y) = \\ E(y\|x) = \end{cases} \xLeftrightarrow{\text{۲ طرفه}}$ اگه x , y مستقل باشن	
روز۱۳۵	**حل فیشهای:** ۱۷۹۹-۱۷۹۴	
روز۱۳۶	**امید ریاضی حاصلضرب دو متغیر تصادفی** x **و** y:	
	$E(x.y) =$	۱۸۱۰
	حالت خاص: اگه x و yمستقل از هم باشن: $E(x.y) =$	
	اگه : $E(xy) = E(x).E(y)$ ↗ x , y ..... یا ↘ x , y	۱۸۱۱
روز۱۳۶	**فرمول محاسبه کواریانس دو متغیر تصادفی پیوسته** x **و** y:	۱۸۱۳
	کواریانس: $\delta_{xy} = Cov(x,y) =$.....	
	برای محاسبه کواریانس، اول باید ..... رو بررسی کنیم، و اون وقت:	
	الف) اگه دیدیم x و y**مستقل از هم** هستن، پس می‌فهمیم که x و y (همبسته/ ناهمبسته؟)اند و در نتیجه کواریانس اونا ..... است.	
	ب) اگه x و y مستقل از هم نباشن (**به هم وابسته** باشن)، اون وقت، چه نتیجه‌ای در مورد کواریانس x و y می‌تونیم بگیریم؟	
	مستقلند ⟶ ⋯ ... ... $x, y \Rightarrow Cov(x,y)$	۱۸۱۴
	↑	
	y, x ↗ ↘ **وابستگی**	
	وابسته‌اند ↗ ↘	
	وابستگی ..... ⟶ ⋯ ... ... $x, y \Rightarrow Cov(x,y)$	
روز۱۳۶	**نکته: اگر رابطه دو متغیر تصادفی** x **و** y **بصورت** $y = x^۲$ **باشد، نتیجه می‌گیریم که:** ..... **و بنابراین**	۱۸۱۷
	(همبسته/ناهمبسته‌اند) و کوواریانس آنها برابر ..... **است:**	
	$y = x^۲ \Rightarrow$ **وابستگی**..... ⟶ ... ... $x, y \longrightarrow Cov = \cdots$	
روز۱۳۶	**حل فیشهای:** ۱۸۱۶-۱۸۰۷-۱۸۰۶	

روز	باکس CTS (فصل ۱۶): « جمع بندی خلاصه نکات ، فرمول‌ها و روابط مهم هر سرفصل»	فلش کارت
روز۱۳۸	**تابع احتمال توزیع یکنواخت گسسته:**	۱۸۲۰
	نحوه نمایش توزیع یکنواخت گسسته (۲ شکل): $\begin{cases} x\sim \\ x\sim \end{cases}$:توزیع یکنواخت گسسته	۱۸۲۲
روز۱۳۸	**نحوه محاسبه امید ریاضی، واریانس و انحراف معیار در توزیع یکنواخت گسسته:**	
	$\mu_x = E(x) =$	۱۸۲۳
	$\delta_x^2 =$ $\delta_x =$	
	حالات خاص:	
	الف) اگه متغیر تصادفی یکنواخت گسسته x، به صورت یه **تصاعد حسابی (با قدرنسبت d)** باشد:	۱۸۲۵
	$\mu=E(x)=$:میانگین یه تصاعد حسابی	
	$\delta_x^2=$: واریانس یه تصاعد حسابی	
	ب) اگه متغیر تصادفی یکنواخت گسسته x، به صورت **اعداد طبیعی (از ۱ تا N)** باشه:	۱۸۲۶
	$\mu=E(x)=$ $\delta_x^2=$	
	نکته تستی برای شمردن تعداد اعداد در حالت (ب):	
	تو حالت خاص (ب) که تصاعد حسابی ما از عدد ۱ شروع میشه، ..... نشون دهندهٔ تعداد جملات تصاعده.	۱۸۲۷
روز۱۳۸	**۳ شرط لازم برای آزمایش برنولی:**	
	شرط ۱:	۱۸۳۱
	شرط ۲:	
	شرط ۳:	
	توجه کنیم: اینکه در یه آزمایش برنولی، از بین دو پیشامد ممکن، کدوم رو «موفقیت» و کدوم رو «شکست» در نظر بگیریم، فقط و فقط به ..... بستگی داره.	۱۸۳۱
	«**موفقیت**»: یعنی وقوع پیشامد ..... که دارای احتمال ..... است.	
	«**شکست**»: یعنی عدم وقوع پیشامد ..... که دارای احتمال ..... است.	
	۵ وضعیت که نشان دهنده آزمایش برنولی هستند:	۱۸۳۲
	۱. هر وقت در مسئله ..... به ما داده بشه (چه نمونه‌گیری با جایگذاری باشه و چه بدون جایگذاری):	
	۲. هروقت از یه جامعه محدود Nتایی، نمونه‌گیری ..... انجام بشه. نکته مهم: تو سؤالات و تست‌ها، به طور پیش فرض، انتخاب از نوع ..... است.	۱۸۳۲
	۳. هر وقت از یه جامعه ..... نمونه گیری انجام بشه، **چه نمونه‌گیری با جایگذاری و چه بدون جایگذاری**	۱۸۳۳
	٤. در هر بار ..... احتمال موفقیت یا شکست ثابت خواهد بود ⇐ در نتیجه این آزمایش‌ها همیشه از نوع آزمایش‌های برنولی هستن.	
	۵. پیشامد به دنیا اومدن دختر یا پسر در هر بار زایمانِ مادر، احتمال ..... است ⇐ در نتیجه این آزمایش هم، همیشه از نوع آزمایش‌های ..... است.	
روز۱۳۸	**حل فیشهای: ۱۸۲۸-۱۸۳۰**	
روز۱۳۹	**تعریف توزیع برنولی (دو نقطه ای):**.....	۱۸۳۶
	$x =$.....: «تعداد موفقیت در انجام ۱ بار آزمایش برنولی»	۱۸۳۷

	نمایش جدولی توزیع برنولی: **نمایش فرمولی (ضابطه‌ای) توزیع برنولی:** تابع احتمال برنولی: $f(x)=p(x)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad ; \quad x=\ldots\ldots\ldots$ **نمایش توزیع برنولی (به ۲ صورت):** $\begin{cases} X\sim \\ X\sim \end{cases}$ **توزیع برنولی** **پارامترهای توزیع برنولی:**	۱۸۳۸
روز۱۳۹	**نحوه محاسبه امید ریاضی، واریانس و انحراف معیار در توزیع برنولی (دونقطه‌ای):** **۱) امید ریاضی (میانگین)** **۲) واریانس** **۳) انحراف معیار**	۱۸۳۹
روز۱۳۹	**نکته:** در توزیع **برنولی (دو نقطه‌ای)** اگه متغیر x، به توان برسه (مثلاً به توان۴) برسه، آنگاه دارای توزیع ..... خواهد بود، یعنی: $f(x)=f(x^n)=$ و در این حالت میانگین برابر است با: $E(x^n)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$: در توزیع برنولی	۱۸۴۲
روز۱۳۹	**تعریف توزیع دو جمله ای:** ..... **$x=\ldots\ldots\ldots\ldots$: تعداد موفقیت در n بار آزمایش مستقل برنولی»** **$f(x)=p(x)=\ldots\ldots\ldots\ldots$: تابع احتمال توزیع دو جمله‌ای** **حداکثر مقدار متغیر x در توزیع دوجمله ای:** **نمایش توزیع دوجمله ای (باینم):** $\begin{cases} X\sim \\ X\sim \end{cases}$: *توزیع دوجمله‌ای* **پارامترهای توزیع دوجمله ای:**	۱۸۴۶ ۱۸۴۷
روز۱۳۹	**نحوهٔ محاسبه امید ریاضی، واریانس و انحراف معیار در توزیع دو جمله‌ای (باینم):** **۱) امید ریاضی (میانگین)** **۲) واریانس** **۳) انحراف معیار** **نحوه رسیدن به فرمول امیدریاضی و واریانس توزیع برنولی (دو نقطه ای) از روی فرمولهای بالا:**	۱۸۴۸ ۱۸۴۹
روز۱۳۹	**حل فیشهای: ۱۸۴۱-۱۸۵۰-۱۸۵۱**	
روز۱۴۰	**نحوهٔ محاسبه احتمال در توزیع احتمال دوجمله‌ای (باینم):** **۱)** احتمال صفر موفقیت (عدم موفقیت) در n بار آزمایش. **۲)** احتمال n موفقیت (عدم شکست) در n بار آزمایش. **۳)** احتمال ۱ موفقیت در n بار آزمایش. **۴)** احتمال ۲ موفقیت در n بار آزمایش.	۱۸۵۳ ۱۸۵۴

	۵) احتمال وقوع **حداکثر ۱ موفقیت** در n بار آزمایش. ۶) احتمال وقوع **بیش از ۱ موفقیت** در n بار آزمایش. ۷) احتمال وقوع **حداقل ۱ موفقیت** در n بار آزمایش.	
روز ۱۴۰	**توجه کنین که: اگر در سؤال چیزی در مورد احتمال پسر و دختر بودن به ما نگفته باشند، ما بایدبه** طور پیش فرض**این احتمال‌ها رو مساوی .....در نظر بگیریم.**	۱۸۶۳
روز ۱۴۰	**حل فیشهای: ۱۸۵۶-۱۸۵۸-۱۸۶۱-۱۸۶۳-۱۸۶۵**	
روز ۱۴۱	**نمایش خاص توزیع دوجمله‌ای (توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و $p = q = \frac{۱}{۲}$):**	۱۸۷۲
روز ۱۴۱	**ارتباط بین احتمال موفقیت در توزیع دوجمله‌ای (p) و وضعیت چولگی نمودار توزیع:** **الف)** اگه $p > ۰/۵$ باشه ⇐ نمودار توزیع ..... خواهد بود. **ب)** اگه $p = ۰/۵$ باشه ⇐ نمودار توزیع ..... خواهد بود. **ج)** اگه $p < ۰/۵$ باشه ⇐ نمودار توزیع ..... خواهد بود.	۱۸۷۷ ۱۸۷۸
روز ۱۴۱	**حل فیشهای: ۱۸۶۷-۱۸۶۹-۱۸۷۰-۱۸۷۴-۱۸۷۶**	
روز ۱۴۲	فرق مهم توزیع چند جمله‌ای با توزیع دوجمله‌ای: در توزیع دوجمله‌ای، ..... **نتیجه ممکن** وجود داره (.....) ولی در توزیع چند جمله‌ای، ..... **نتیجه ممکن** وجود داره، مثلاً (.....) **توجه کنین که: توزیع چند جمله‌ای از نوع آزمایشات برنولی .....، چون ..... نتیجه ممکن داره.** **تابع احتمال توزیع چند جمله ای (به ۲ صورت):** $p \quad x_۱, x_۲, \ldots x_k \quad =$ $p \quad x_۱, x_۲, \ldots x_k \quad =$ $X \sim$:نمایش توزیع چند جمله‌ای **پارامترهای توزیع چند جمله ای:**	۱۸۸۱ ۱۸۸۲ ۱۸۸۴
روز ۱۴۲	**نحوهٔ محاسبه امید ریاضی، واریانس و انحراف معیار در توزیع چند جمله‌ای:** ۱) **امید ریاضی (میانگین)** ۲) **واریانس** ۳) **انحراف معیار**	۱۸۸۸ ۱۸۸۹
روز ۱۴۲	**مهم**: برای محاسبه امید و واریانس، اول باید q, p رو تعیین کنیم. برای این کار هم اول باید به ..... توجه کنیم.	۱۸۹۲
روز ۱۴۲	**حل فیشهای: ۱۸۸۷-۱۸۹۲**	
روز ۱۴۳	**فرق توزیع دوجمله‌ای و دوجمله‌ای منفی:** در توزیع دوجمله‌ای، متغیر تصادفی x، بیانگر ..... است و کمترین مقدارمتغیرxبرابر.....است. ولی در توزیع دوجمله‌ای منفی متغیر تصادفی x، بیانگر ..... است و کمترین مقدارمتغیرxبرابر.....است. **تعریف توزیع دوجمله ای منفی:**..... ..... **تابع احتمال توزیع دوجمله ای منفی:** **x:** ..... **r:** ..... **x-۱:** ..... **r-۱:** ..... $X \sim$: نمایش توزیع دوجمله ای منفی پارامترهای توزیع چند جمله ای:	۱۸۹۴ ۱۸۹۷ ۱۸۹۵ ۱۸۹۶

روز۱۴۳	**نحوهٔ محاسبه احتمال در توزیع دوجمله‌ای منفی (پاسکال) طی ۳ گام:** **گام۱:** **گام۲:** **گام۳:** **نکته تستی**(*برای تشخیص سریع توزیع دوجمله‌ای منفی*): **هر وقت تو تست‌ها** ۲ بار..... **رو دیدیم، سریع می‌گیم این توزیع از نوع** دوجمله‌ای منفیه.	۱۸۹۸
روز۱۴۳	**راه حل دوم برای محاسبه احتمال در توزیع دوجمله ای منفی**(*استفاده از توزیع دوجمله‌ای*): **به طور کلی می‌تونیم مسائل توزیع دوجمله‌ای منفی‌رو با استفاده از توزیع دوجمله‌ای حل کنیم. فقط باید یادمون باشه که در آخرسر، قبل از محاسبه ترکیب** $\binom{n}{x}$، باید	۱۸۹۹
روز۱۴۳	**نکته مهم**: در یه **حالت خاص** از توزیع دوجمله‌ای **منفی** که در اون، ما به دنبال «**اولین**» موفقیت هستیم، (یعنی $r=1$ است)، توزیع دوجمله‌ای منفی به توزیع «.....» تبدیل میشه. **توزیع دوجمله‌ای منفی** $\xrightarrow{\text{حالت خاص}(r=1)}$ **توزیع .....** $p(x)=\binom{x-1}{r-1}p^r q^{x-r}$ $\qquad$ $p(x)=$	۱۹۰۴
روز۱۴۳	**حل فیشهای: ۱۹۰۱-۱۹۰۳**	
روز۱۴۴	**نحوهٔ محاسبه امید ریاضی، واریانس و انحراف معیار در توزیع دوجمله‌ای منفی:** **۱) امید ریاضی (میانگین)** **۲) واریانس** **۳) انحراف معیار**	۱۹۰۶
روز۱۴۴	**فرق توزیع دوجمله‌ای منفی و توزیع هندسی:** در توزیع دوجمله‌ای منفی، متغیر تصادفی X بیانگر ..... است و کمترین مقدارمتغیرXبرابر.....است ولی در توزیع هندسی، متغیر تصادفی X بیانگر ..... است و کمترین مقدارمتغیرXبرابر.....است. **تعریف توزیع هندسی**: ..... **تابع احتمال توزیع هندسی**: **نمایش توزیع هندسی**: $\begin{cases} x\sim \\ x\sim \end{cases}$ **پارامترهای توزیع هندسی:**	۱۹۱۱ ۱۹۱۲
روز۱۴۴	**نحوهٔ محاسبه احتمال در توزیع هندسی (۳ گام):** **گام۱:** **گام۲:** **گام۳:** **۱)** احتمال انجام سه آزمایش برای رسیدن به اولین موفقیت **۲)** احتمال انجام حداکثر ۲ آزمایش برای رسیدن به اولین موفقیت **۳)** احتمال انجام حداقل ۲ آزمایش برای رسیدن به اولین موفقیت	۱۹۱۳ ۱۹۱۴

	۴) احتمال انجام بیش از ۲ آزمایش برای رسیدن به اولین موفقیت **نکته تستی:** به طور کلی احتمال $p \quad x > k$ در احتمال **هند سی** به این مفهومه که در k آزمایش قبلی ..... (یعنی نتیجه تمام این k آزمایش قبلی، همگی ..... بوده با احتمال .....)، بنابراین: $p(x > k) =$ **۵)** احتمال اینکه تعداد آزمایش‌های لازم برای رسیدن به اولین موفقیت، **فرد** باشه. **۶)** احتمال اینکه تعداد آزمایش‌های لازم برای رسیدن به اولین موفقیت، **زوج** باشه.	۱۹۱۵
روز۱۴۴	**نکته مهم**: کلمه «بالاخره» **همیشه به مفهوم** ..... **است و در نتیجه نشون دهندهٔ توزیع** ..... **است.**	۱۹۱۷
روز۱۴۴	**نکته جالب**: در بحث احتمال، اعداد زوج و فرد ..... هستند، یعنی: $\boxed{p\left(x = \text{فرد}\right) + p\left(x = \text{زوج}\right) = \ldots\ldots}$	۱۹۲۳
روز۱۴۴	**حل فیشهای: ۱۹۰۷-۱۹۰۹-۱۹۱۷-۱۹۱۹-۱۹۲۱**	
روز۱۴۵	**نکته خیلی مهم:** **به طور کلی در توزیع هندسی، وقتی کلمه «حداقل»، تو صورت سؤال وجود داشته باشه، ما به ۳ طریق می‌تونیم اونو حلش کنیم:** **روش اول** (روش ....., **که منجر به** ..... **میشه)** **روش دوم** (.....) **روش سوم** (.....)	۱۹۲۵ ۱۹۲۶
روز۱۴۵	**نحوهٔ محاسبه امید ریاضی، واریانس و انحراف معیار در توزیع هندسی:** **۱) امید ریاضی (میانگین)** **۲) واریانس** **۳) انحراف معیار** **نکته تستی:** برای نوشتن فرمولهای بالا، می‌تونیم از فرمولهای توزیع ..... استفاده کنیم و تنها باید	۱۹۲۸
روز۱۴۵	**نکته مهم:** در توزیع‌های دوجمله‌ای منفی و هندسی، برای محاسبه واریانس، فقط کافیه که امید ریاضی رو در .....ضرب کنیم.	۱۹۳۳
روز۱۴۵	**مقایسه توزیع‌های حاصل از آزمایش برنولی:** **۱) توزیع برنولی (دونقطه‌ای):** زمانی که آزمایش برنولی رو ..... بار انجام بدیم و هدف ما بررسی ..... باشه که می‌تونه ..... باشه (مثالی بزنین). **۲) توزیع دوجمله‌ای (باینم):** زمانیه که آزمایش برنولی رو ..... بار به صورت مستقل تکرار کنیم و هدف ما بررسی ..... باشه که می‌تونه ..... باشه (مثال بزنین). **مقایسه و نتیجه**: توزیع ..... حالت خاصی از توزیع ..... است که در اون ..... است.	۱۹۳۴ ۱۹۳۵
	۳) توزیع دوجمله‌ای منفی (پاسکال): زمانیه که آزمایش برنولی رو به صورت مستقل، اون قدر تکرار کنیم تا به ..... برسیم و هدف ما بررسی ..... برای رسیدن به ..... است که می‌تونه ..... باشه (مثال بزنین). **۴) توزیع هندسی:** زمانیه که آزمایش برنولی رو به صورت مستقل اون قدر تکرار می‌کنیم تا به ..... برسیم و در اینجا هدف ما بررسی ..... برای رسیدن به ..... است که می‌تونه ..... باشه (مثالی بزنین). **مقایسه**: توزیع ..... حالت خاصی از توزیع ..... است که در اون ..... است. **خلاصه بحث:**	۱۹۳۵
	توزیع‌های حاصل از آزمایش برنولی: دوجمله‌ای (باینم) $\xrightarrow[n=1]{\text{حالت خاص}}$ توزیع ..... دوجمله‌ای منفی (پاسکال) $\xrightarrow[n=1]{\text{حالت خاص}}$ توزیع	۱۹۳۶
روز۱۴۵	**حل فیشهای: ۱۹۲۵-۱۹۲۷-۱۹۳۰**	

روز۱۴۶	**«تفاوت توزیع دوجمله‌ای و توزیع فوق هندسی»** **۱)**در یه جامعه **محدود**Nتایی که kتای اون موفقیت و $N-k$ تای دیگه شکست تلقی میشه، اگه یه نمونه nتایی رو انتخاب کنیم، اون وقت توزیع متغیر تصادفی x: «تعداد موفقیت در نمونه»، بسته به اینکه نمونه‌گیری ما به صورت **«بدون جایگذاری»** و یا **«باجایگذاری»** باشه، متفاوت خواهد بود، یعنی: **الف)** اگه نمونه‌گیری ما **بدون جایگذاری** باشه ⇐توزیع متغیرx ..... خواهد بود. **ب)** اگه نمونه‌گیری ما **باجایگذاری** باشه ⇐توزیع متغیرx ..... خواهد بود. در توزیع احتمال **دوجمله‌ای**، احتمال موفقیت در هر بار تکرار آزمایش .....، بنابراین توزیع دوجمله‌ای از نوع آزمایش‌های برنولی است؛ ولی در توزیع احتمال **فوق هندسی**، احتمال موفقیت در هر بار تکرار آزمایش، .....، بنابراین توزیع فوق هندسی جزء آزمایش‌های **برنولی نیست**.	۱۹۳۷
	نکته مهم:در صورت عدم بیان مسئله، نوع انتخاب و نمونه‌گیری، **به طور پیش فرض** ..... خواهد بود، بنابراین در این حالت باید از توزیع ..... استفاده کنیم و نه از توزیع	۱۹۳۹
روز۱۴۶	**تعریف توزیع فوق هندسی**: .... **تابع احتمال توزیع فوق هندسی**: **حداقل و حداکثر مقدار متغیرx در توزیع فوق هندسی**: **نمایش توزیع فوق هندسی**: **پارامترهای توزیع فوق هندسی**:	۱۹۴۱ ۱۹۴۵
روز۱۴۶	**نکته مهم**: **به طور کلی تمام تست‌های احتمال که مربوط به توزیع** فوق هندسی**اند رو می‌تونیم به روش** ..... **هم حل کنیم.** **توجه**: **وقتی داریم مسائل توزیع فوق هندسی رو به این روش حل می‌کنیم، یادمون باشه که در هر بار، باید .....از ..... و نیز ..... از ..... (بنا به احتمال خواسته شده)** کم کنیم.	۱۹۴۷ ۱۹۴۸
روز۱۴۶	**نکته**: **حاصل ترکیب‌هایی که در آنها عدد پایینی از بالایی بزرگتره، برابر ..... است.**	۱۹۵۰
روز۱۴۶	**نحوه محاسبه امید ریاضی، واریانس و انحراف معیار در توزیع فوق هندسی:** **۱) امید ریاضی (میانگین)** **۲) واریانس** **۳) انحراف معیار** **اگه نمونه‌برداری باجایگذاری باشه ⟵ توزیع ما ..... است و در نتیجه فرمول امید ریاضی و واریانس برابر میشه با:** **اگه نمونه‌برداری بدون جایگذاری باشه ⟵ توزیع ما ..... است و بنابراین فرمول امید ریاضی و واریانس برابر میشه با:** **نتیجه مهم**: نمونه‌گیری ما چه **باجایگذاری** باشه و چه **بدون جایگذاری**، مقدار ..... هیچ فرقی نمی‌کنه. ولی اگه نمونه‌گیری **بدون جایگذاری** باشه، ..... توزیع فوق هندسی با توزیع دوجمله‌ای متفاوت خواهد بود و اختلاف اونا در ..... است.	۱۹۵۳ ۱۹۵۴
روز۱۴۶	**نکته تستی**: یه راه سریع و تستی برای محاسبه کردن واریانس توزیع **فوق هندسی** اینه که اول ..... (یعنی .....) رو حساب کنیم و بعد در گزینه‌ها بگردیم، اون گزینه‌ای که خیلی زیاد به ..... نزدیکه و ازش کوچیکتره رو به عنوان واریانس توزیع فوق هندسی انتخاب می‌کنیم.	۱۹۵۸
روز۱۴۶	**حل فیشهای: ۱۹۴۶-۱۹۴۹-۱۹۵۱-۱۹۵۷**	
روز۱۴۷	**«تقریب توزیع فوق هندسی به کمک توزیع دوجمله‌ای»:** **شرط استفاده از این تقریب:** اگه ..... **بزرگ** باشـــه و در مقابل، ..... **کوچک** باشـــه، اون وقت تفاوت چندانی بین نمونه‌گیری **بدون جایگذاری و با جایگذاری** وجود نخواهد داشت، در نتیجه: **اولاً**: در چنین حالتی می‌تونیم برای محاسبه احتمال در توزیع .....، از توزیع ..... کمک بگیریم. **ثانیاً**: در این شرایط، موقع حساب کردن واریانس می‌تونیم از ..... چشم‌پوشی کنیم و اونو ننویسیم. **نتیجه**: اگه ..... **بزرگ** و ..... **کوچیک** باشه، واریانس توزیع فوق هندسی با واریانس توزیع دوجمله‌ای **برابر** میشه: (npq).	۱۹۵۹ ۱۹۶۰

	شرط استفاده از این تقریب: **حجم نمونه کمتر از ..... باشه یا حجم جامعه حداقل ..... باشه.**	
روز۱۴۷	**تعریف توزیع پواسون**: **تابع احتمال توزیع پواسون**: **نمایش توزیع پواسون**: **پارامتر توزیع پواسون**:	۱۹۶۸ ۱۹۶۹
روز۱۴۷	«**شرایط استفاده از توزیع پواسن**» اگه ..... با شه، توزیع پوا سن، توزیع منا سبی برای حل مسئله خواهد بود، اما در غیر این صورت (یعنی اگه ..... با شه)، بهتره از ***تقریب نرمال***استفاده کنیم.	۱۹۷۰
روز۱۴۷	**حل فیشهای: ۱۹۶۲-۱۹۶۳-۱۹۷۱**	
روز۱۴۸	«**نحوهٔ محاسبه احتمال در توزیع پواسن**»:	
	۱) احتمال **عدم وقوع** اتفاق:	۱۹۷۳
	نتیجه مهم: برای محا سبه احتمال وقوع **هیچ اتفاق** یا **عدم وقوع** اتفاق در توزیع پوا سون، دیگه تابع احتمال پوا سن رو نمی‌نویسیم، بلکه خیلی سریع فقط می‌نویسیم:	
	۲) احتمال وقوع **۱ اتفاق**	
	نتیجه مهم: با مقایسه احتمال $p\ \ x=1$ و $p\ \ x=0$ می‌فهمیم که احتمال وقوع **۱ اتفاق**، ..... احتمال وقوع **هیچ اتفاق** است:	
	۳) احتمال وقوع **حداکثر۱ اتفاق**	
	۴) احتمال وقوع **حداقل۱ اتفاق**	
	۵) احتمال وقوع **بیش از۱ اتفاق**	۱۹۷۴
	۶) احتمال وقوع **حداقل۲ اتفاق**	
روز۱۴۸	**یه قاعده مهم**: در توزیع پواسن، هر وقت بازه **زمانی** یا **مکانی** تغییر کنه، مسلماً ..... متناسب با اون تغییر می‌کنه.	۱۹۷۶
روز۱۴۸	**نکته مهم**: **در توزیع پواسن، e با توان ..... در صورت کسر قرار داره، پس در تستهای محاسبه احتمال، هر گزینه‌ای که در اون،e در صورت کسر با علامت ..... ظاهر شده، غلطه و براحتی قابل حذفه.**	۱۹۷۸
روز۱۴۸	**نکته تستی**: **هر وقت در مسائل توزیع پواسون دیدیم که مقدار عددی $e^{-\lambda}$ رو به ما داده‌اند، مثلاً $e^{-5}=0/007$ ، برای پی بردن به مقدار λ ، فقط کافیه به ..... نگاه کنیم.**	۱۹۸۰
روز۱۴۸	**نکته ظریف:** در توزیع پواســن، λ نشــون دهندهٔ **متوســط تعداد اتفاقات** در یه بازه زمانی یا مکانی اســت. پس از اونجایی «**تعداد**»، هیچ وقت نمی‌تونه ..... باشه، پس λ هم هیچ وقت نمی‌تونه ..... باشه، یعنی مقدار λ همیشه ..... **است.**	۱۹۸۳
روز۱۴۸	**حل فیشهای: ۱۹۷۵-۱۹۷۹-۱۹۸۰-۱۹۸۳-۱۹۸۵-۱۹۸۷**	
روز۱۴۹	**نحوهٔ محاسبه امید ریاضی، واریانس و انحراف معیار در توزیع پواسن:** **۱) امید ریاضی (میانگین)** **۲) واریانس** **۳) انحراف معیار** **۴) ضریب تغییرات** **نکته مهم**: **در بین تمام توزیع‌های گسسته و پیوسته، توزیع پواسن تنها توزیعی است که در اون ..... و ..... با هم برابرند و هر دو مساوی ..... هستن.**	۱۹۹۲

روز ۱۴۹	**شرایط تقریب توزیع دوجمله‌ای به کمک توزیع پواسن (۲ شرط):** **۱) شرط اول:** **۲) شرط دوم:** **در این شرایط، میانگین توزیع پواسن (یعنی .....) برابر با میانگین توزیع دوجمله‌ای (یعنی .....) میشه.**	۲۰۰۰
روز ۱۴۹	**حل فیشهای: ۱۹۸۸-۱۹۹۰-۱۹۹۳-۱۹۹۴-۱۹۹۵-۱۹۹۶-۱۹۹۸-۲۰۰۲-۲۰۰۳-۲۰۰۵-۲۰۰۷**	

روز	باکس CTS (فصل ۱۷): « جمع بندی خلاصه نکات ، فرمول‌ها و روابط مهم هر سرفصل»	فلش کارت
روز ۱۵۱	**تعریف تابع توزیع یکنواخت پیوسته:** **شکل توزیع یکنواخت پیوسته:** **پارامترهای توزیع یکنواخت پیوسته:** **نمایش توزیع یکنواخت پیوسته:**	۲۰۱۰ ۲۰۱۱
روز ۱۵۱	**نحوهٔ محاسبهٔ احتمال در توزیع چگالی یکنواخت»** f α c d β e الف) **اگه بازهٔ مورد نظردر فاصله** $\alpha < x < \beta$ باشه: $p(c<x<d)$ $p(x<c)$ $p(x>d)$ $p(x=c)$ ب) **اگه بازهٔ مورد نظردر خارج از فاصلهٔ** $\alpha < x < \beta$ باشه: ۱) $p(f<x<\alpha)$ ۲) $p(f<x<c)$ ۳) $p(d<x<e)$ **نتیجهٔ مهم**: برای محاسبهٔ احتمال در توزیع یکنواخت **پیوسته**، بهتره که به جای روش وقت‌گیر انتگرال‌گیری، از ..... استفاده کنیم.	۲۰۱۳ ۲۰۱۵
روز ۱۵۱	**حل فیشهای: ۲۰۱۶- ۲۰۱۹**	
روز ۱۵۲	**نحوهٔ محاسبهٔ امید ریاضی،واریانس و انحراف معیار در توزیع یکنواخت پیوسته:** ۱) **امید ریاضی (میانگین)** ۲) **واریانس** ۳) **انحراف معیار**	۲۰۲۲
روز ۱۵۲	در**توزیع یکنواخت پیوسته**، میانگین دقیقاً **در وسط** توزیع قرار می‌گیره، یعنی تو توزیع یکنواخت پیوسته، میانگین ۲ تا نقش رو بازی می‌کنه: ۱) **نقش** ..... ۲) **نقش**	۲۰۳۰
روز ۱۵۲	**نحوه بدست آوردن تابع توزیع (تجمعی) یکنواخت پیوستهٔ** $F(x)$: **۱)راه اول**: ..... **۲) راه دوم** :	۲۰۳۱
روز ۱۵۲	**نتیجهٔ مهم**: اگه **تعداد اتفاقات** در یه فاصلهٔ زمانی دارای توزیع **پواسون** باشه،اون وقت ..... دارای توزیع ..... است.	۲۰۳۳
روز ۱۵۲	**تابع احتمال نمایی:** **نمایش تابع احتمال نمایی با**حرف یونانی «تِتا: θ» : **نحوه نمایش توزیع نمایی:** **پارامتر(های) توزیع نمایی:**	۲۰۳۴ ۲۰۳۵
روز ۱۵۲	**نکته تستی**:توجه کنین که در توزیع نمایی، همیشه ضریب e..... **برابره.**	۲۰۳۷
روز ۱۵۲	**حل فیشهای: ۲۰۲۳ -۲۰۲۵- ۲۰۲۶ -۲۰۲۷۸ -۲۰۲۹-۲۰۳۱-۲۰۳۶-۲۰۳۸**	
روز ۱۵۳	**نحوهٔ محاسبهٔ احتمال در توزیع نمایی:** **الف)** احتمال وقوع اتفاق بعدی (یا اولین اتفاق) دقیقاً در زمان a:	۲۰۳۹

	ب) احتمال وقوع اتفاق بعدی (یا اولین اتفاق) بعد از زمان a (حداقل، زمان a): **ج)** احتمال وقوع اتفاق بعدی (یا اولین اتفاق)قبل از زمان a(حداکثر تا زمان a): **د)** احتمال وقوع اتفاق بعدی(یا اولین اتفاق)بین زمان a تا b: **تابع توزیع (تجمعی) نمایی:**	۲۰۴۰ ۲۰۴۰
روز۱۵۳	**نکته تستی (راه سریع برای انتگرال گیری از تابع احتمال نمایی):** $\int \lambda e^{-\lambda x} dx =$	۲۰۴۳
روز۱۵۳	**حل فیشهای : ۲۰۴۲ و ۲۰۴۴ و ۲۰۴۶ و ۲۰۴۸ و ۲۰۵۰ و ۲۰۵۲**	
روز۱۵۴	**نکتهٔ خیلی خیلی مهم:** موقع حل مسائل توزیع نمایی، قبل از محاسبهٔ احتمال خواسته شده، باید اول واحد زمانی احتمال خواسته شده رو بر اساس ..... تنظیم کنیم.	۲۰۴۶
روز۱۵۴	**نکتهٔ تستی:** همون طور که می‌دونیم در توزیع نمایی برای محاسبهٔ احتمال.....نباید از قاعدهٔ متمم‌گیری استفاده کنیم،بلکه فقط برای محاسبهٔ ..... بایدازاین قاعدهٔ استفاده کنیم.	۲۰۴۷
روز۱۵۴	**نحوهٔ محاسبهٔ امید ریاضی، واریانس و انحراف معیار در توزیع نمایی:** ۱) **امید ریاضی (میانگین)** ۲) **واریانس** ۳) **انحراف معیار** **مهم:** توزیع ..... تنها توزیعی است که در اون **میانگین و واریانس** توزیع با هم برابرند، و توزیع .....هم تنها توزیعی است که در اون **میانگین و انحراف معیار** توزیع با هم برابرند.	۲۰۴۹
روز۱۵۴	**نکتهٔ ظریف:** بطور کلی، هر وقت تو تابع احتمال ما حرف e (عدد نِپِر) وجود داشته باشه، می‌فهمیم که توزیع ما یا .....یا ..... اما برای تشخیص بین این دو، باید به این نکته ظریف توجه کنیم که تو تابع .....، در توان e، متغیر x وجود نداره، ولی تو تابع .....، در توان e، متغیر x دیده میشه.	۲۰۵۰
روز۱۵۴	**نکته تستی:یک روش خیلی سریع برای محاسبهٔ میانگین در توزیع نمایی اینه که بیائیم ، ..... رو معکوس کنیم.**	۲۰۵۱

	باکس CTS (فصل ۱۸): « جمع بندی خلاصه نکات ، فرمول‌ها و روابط مهم هر سرفصل»	فلش کارت
روز۱۵۵	**تابع چگالی نرمال**: **نمایش توزیع نرمال**: **پارامترهای توزیع نرمال**:	۲۰۵۴ ۲۰۵۵
روز۱۵۵	**خصوصیات توزیع نرمال:** **۱)** مساحت سطح زیر منحنی نرمال، برابر..... است. **۲)** در توزیع نرمال، تمامی پارامترها (شاخصهای) ..... باهم برابرند. **۳)**بیشترین مقدار $f(x)$ در توزیع نرمال (که در واقع همون مُد توزیع نرماله)، به ازای ..... بدست میاد. **۴)**خط عمودیِ ..... **محور تقارن** منحنی نرماله. الف)$P(x \le \mu) =$ ب) $P(x \ge \mu) =$ **۵)** منحنی نرمال دارای۲نقطه عطف به ازای .....است. **۶)** شاخص کشیدگی منحنی نرمال، برابر..... است و در نتیجه ضریب کشیدگی توزیع نرمال، مساوی ..... **است.**	۲۰۵۹ ۲۰۶۱
روز۱۵۵	**حل فیش: ۲۰۶۴**	
روز۱۵۶	**انحرافاتِ حول میانگین (درصدهای منحنی نرمال):** **۱)** احتمال (یا سطح زیرمنحنی نرمال) در فاصله ۰/۵ انحراف معیار حول میانگین: **۲)** احتمال (یا سطح زیرمنحنی نرمال) در فاصله ۱ انحراف معیار حول میانگین: **۳)** احتمال (یا سطح زیرمنحنی نرمال) در فاصله ۲ انحراف معیار حول میانگین: **۴)** احتمال (یا سطح زیرمنحنی نرمال) در فاصله ۳ انحراف معیار حول میانگین: **۵)** احتمال (یا سطح زیرمنحنی نرمال) خارج از فاصله۳ انحراف معیار حول میانگین: **۶)** احتمال (یا سطح زیرمنحنی نرمال) داخل فواصل بیش از۳ انحراف معیار حول میانگین:	۲۰۶۸ ۲۰۶۹ ۲۰۷۰
روز۱۵۶	**نحوه محاسبه مقدارμ، $k\delta$ با داشتن بازه ای بصورت ($\mu + k\delta$ و $\mu - k\delta$):** $\boldsymbol{\mu =}$ $\boldsymbol{k\delta =}$	۲۰۷۹
روز۱۵۶	**تعریف قضیه چی‌بی‌شف:** اگه مقادیر $x_1, x_2, \dots, x_N$ مشاهداتی از جامعه‌ای ..... **و** .....با میانگین μ_x و واریانس δ_x^2 باشن، اون‌وقت .....**درصد** از مشاهدات در دامنه (یا فاصله)..... قرار دارن: $\boldsymbol{P(\mu - k\delta \le x \le \mu + k\delta)}$	۲۰۸۲
	۱)اگه k=۱ باشه:	۲۰۸۲
	۲)اگه k=۲ باشه:	۲۰۸۳
	۳) اگه k=۳ باشه:	
	۴)اگه k=۴ باشه:	۲۰۸۴
	باتوجه به قاعدهٔ«**متمم‌گیری**»، از قضیه چی‌بی‌شف می‌گیریم که «.....» از مشاهدات، در خارج از فاصله k انحراف معیار از میانگین قرار دارن: $\boldsymbol{P(x \le \mu - k\delta \text{ یا } x \ge \mu + k\delta)}$	
روز۱۵۶	**نحوه تشخیص مسائل مربوط به قضیه چی بی شف:** **۱. در صورت سؤال، عبارت «جامعه .....» رو دیدیم.** **۲. یا تو صورت سوال یا در گزینه‌ها کلمه ..... رو دیدیم.**	۲۰۸۷
روز۱۵۶	**حل فیشهای:** ۲۰۷۱-۲۰۷۳-۲۰۷۶-۲۰۷۸-۲۰۷۹-۲۰۸۸	

روز۱۵۷ **مقایسه درصد انحراف‌های منحنی در جوامع نرمال و غیرنرمال:** ۲۰۹۰

k	k=۱	k=۲	k=۳	k=۴
$\mu \pm k\delta$	$\mu \pm \delta$	$\mu \pm ۲\delta$	$\mu \pm ۳\delta$	$\mu \pm ۴\delta$
(نرمال یا غیرنرمال)				
(فقط در نرمال)				

نتیجه: به ازای همه k ها، درصدهای جامعه **نرمال** ..... از حداقل درصدی است که برای جامعه ای با توزیع **نامعلوم** (**نرمال یا غیرنرمال**) وجود داره.

روز۱۵۷ پدست آوردن مقدار **k** در مسائل نوع اول قضیه چی بی شف : $\left(\underbrace{\mu - k\delta}_{a} \text{ و } \underbrace{\mu + k\delta}_{b}\right) \rightarrow \boxed{k\delta =}$ ۲۰۹۱

روز۱۵۷ **توجه:اگر در بازه $(\mu - k\mu \text{ و } \delta + k\delta)$ از حرف ربط«و»استفاده کرده، درصدمون رو باید با کلمه«.....» بیان کنیم و در نتیجه باید از علامت.....استفاده کنیم.** ۲۰۹۶

روز۱۵۷ **مسائل کاربردی چی‌بی‌شف (حالت دوم):** ۲۱۰۰

نکته مهم: اگه تو صورت سؤال به کلمه «**حداقل**» اشاره کرده باشه، بازه ما به این صورت خواهد بود:

$P\left(\text{بازه موردنظر}\right) \geq$ ..... $\Longrightarrow$.....

اما اگه به کلمه «**حداکثر**» اشاره کرده باشه:

$P\left(\text{بازه موردنظر}\right) \leq$..... $\Longrightarrow$.....

روز۱۵۷ **حل فیشهای: ۲۰۹۱-۲۰۹۴-۲۰۹۶-۲۰۹۸-۲۰۹۹-۲۱۰۲-۲۱۰۳**

روز۱۵۸ **نمایش‌های دیگری از قضیه چی‌بی‌شف: روابط زیر رو با قدرمطلق بیان کنین:** ۲۱۰۵

۱) $P\left(\mu - k\delta \leq x \leq \mu + k\delta\right) \geq ۱ - \frac{۱}{k^۲}$ (حداقل)

۲) $P\left(x \leq \mu - k\delta \text{ یا } x \geq \mu + k\delta\right) \leq \frac{۱}{k^۲}$ (حداکثر)

روز۱۵۸ **قضیه چی‌بی‌شف در جامعه استاندارد:** ۲۱۱۱ ۲۰۱۲

۱) احتمال اینکه قدرمطلق یه متغیر استاندارد، **حداکثر** برابر k باشه، ..... است.

۲) احتمال اینکه قدرمطلق یه متغیر استاندارد، **حداقل** برابر k باشه، ..... است.

روز۱۵۸ **ترکیب‌های خطی از توزیع نرمال:** ۲۱۱۴ ۲۱۱۵

اگه: $x \sim N(\mu, \delta^۲) \xrightarrow{y = ax} y \sim N(\ldots, \ldots)$

اگه: $x \sim N(\mu_x, \delta_x^۲) \xrightarrow{y = ax + b} y \sim N(\ldots, \ldots)$

نتیجه‌گیری‌های مهم:

۱) *هرگونه ترکیب خطی از توزیع نرمال، دارای توزیع ..... خواهد بود.*

۲) *به‌طور کلی هر بلایی که سر داده‌ها بیاریم، دقیقاً همون بلا سر ..... شون هم میاد.*

۳) *..... هیچ تأثیری بر روی واریانس داده‌های جدید نخواهد داشت.*

روز۱۵۸ ۲۱۱۸ ۲۱۱۹

اگه: $\begin{cases} x_۱ \sim N(\mu_۱, \delta_۱^۲) \\ x_۲ \sim N(\mu_۲, \delta_۲^۲) \end{cases} \Longrightarrow y = X_۱ + X_۲ \sim N(\ldots\ldots, \ldots\ldots)$

اگه: $\begin{cases} x_۱ \sim N(\mu_۱, \delta_۱^۲) \\ x_۲ \sim N(\mu_۲, \delta_۲^۲) \end{cases} \Longrightarrow \boxed{y = ax_۱ + bx_۲ \sim N(\ldots\ldots\ldots, \ldots\ldots\ldots)}$

روز۱۵۸ **حل فیشهای: ۲۲۱۰۷-۲۱۰۹-۲۱۱۰-۲۱۱۷-۲۱۲۰-۲۱۲۱-۲۱۲۱-۲۱۲۲**

روز۱۵۹ اگه: $\begin{cases} X_۱ \sim N(\mu_۱, \delta_۱^۲) \\ X_۲ \sim N(\mu_۲, \delta_۲^۲) \end{cases} \xrightarrow{x_۱ \text{ و } x_۲ \text{ مستقل}} y = X_۱ - X_۲ \sim N(\ldots\ldots, \ldots\ldots)$ ۲۱۲۵

روز۱۵۹ **تعریف متغیر استاندارد:** ۲۱۲۷

میانگین و انحراف معیار متغیر استاندارد:

توجه: مقدار $\frac{\mu}{\delta}$ برابر یه مقدار ثابته، بنابراین انحراف معیارش مساوی .....

روز۱۵۹ **از متغیر استاندارد (z) برای مقایسه دو جامعه با ..... مختلف استفاده می‌کنیم.** ۲۱۲۸

روز۱۵۹ **تأثیر تغییرات مقادیر جامعه x_i بر روی متغیر استاندارد (z):** ۲۱۳۰

اگه به تمام داده‌ها مقدار **ثابت a** اضافه یا از اون کم بشه.	۱) $z_{x \pm a} = ...$
اگه تمام داده‌ها در مقدار **ثابت a** ضرب یا بر اون تقسیم بشن.	۲) $z_{\frac{x}{a}} = z_{ax} = \begin{cases} ..... \ (\text{اگه a مثبت}) \\ ..... \ (\text{اگه a منفی}) \end{cases}$
اگه a درصد از هر داده به اون داده اضافه یا اَزش کم بشه.	۳) $z_{x \pm \frac{a}{100} x} = ...$

روز۱۵۹ **فرمول تبدیل متغیر نرمال به متغیر نرمال استاندارد:** ۲۱۳۵

مقایسه نمودار توزیع نرمال با نمودار توزیع نرمال استاندارد: ۲۱۳۶

روز۱۵۹ **نحوه تغییر مبدأ و مقیاس اندازه‌گیری از متغیر نرمال (x) به متغیر نرمال استاندارد (z) با رسم شکل:** ۲۱۳۷

روز۱۵۹ **حل فیشهای: ۲۱۳۴-۲۱۳۸-۲۱۳۹-۲۱۴۰**

روز۱۶۰ **درصدهای منحنی نرمال استاندارد z:** ۲۱۴۳ ۲۱۴۴

$p \ -۰/۵ < z < +۰/۵ \simeq .....$

$p \ -۱ < z < +۱ = ...$ $p \ -۲ < z < +۲ = ...$

$p \ -۳ < z < +۳ = ...$ $p \ z < -۳ \ or \ z > +۳ \simeq .....$

$p \ -۴ < z < +۴ = p \ -۵ < z < +۵ = ...$

روز۱۶۰ **یادآوری:** توزیع نرمال، یه توزیع **پیوسته** است و در توزیع‌های پیوسته، احتمال در یه **نقطه خاص**، مساوی .....، بنابراین: ۲۱۴۶

$p \ z = z_i = ...$

در نتیجه نوشتن یا ننوشتن علامت **مساوی** در کنار علامت‌های (< یا >) هیچ تأثیری در محاسبه احتمال نداره، یعنی:

$$\begin{cases} p \ z \geq z_i = ... \\ p \ z \leq z_i = ... \end{cases}$$

منظور از **کوانتیل یا صدک ۹۵ اُم** در توزیع نرمال استاندارد، مقداری از متغیر z است که ..... هستن، یعنی:

صدک ۹۵ اُم : $p_{۹۵} = p \ z < z_i = F \ z_i = ۰/۹۵$

که مقدار صدک ۹۵ اُم در توزیع z برابره با: $z = ...$

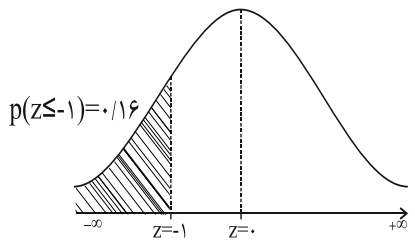
روز ۱۶۰

حالت‌های مختلف نمایش سطح زیر منحنی نرمال استاندارد (z): در شکلهای زیرمساحت ناحیه هاشورخورده رو به ۳ طریق بیان کنین:

۲۱۵۰ : نمایش اول

: نمایش دوم

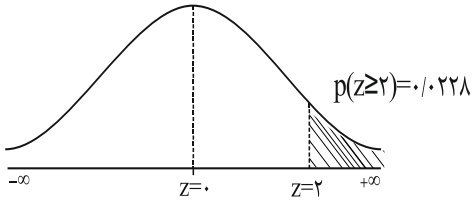
:نمایش سوم



۲۱۵۱ : نمایش اول

: نمایش دوم

:نمایش سوم



توجه :در نمایش سوم، اون اندیسی که برای z می‌نویسیم نشون دهندهٔ ..... (و نشون دهندهٔ .....نیست) و در حالتی که z ما منفی است (مثلاً $z_{./۱۶} = -۱$)، این اندیس (یعنی ۰/۱۶) در واقع بیانگر ..... است که معادل با ..... در منحنی نرماله و اگه z_i **مثبت** باشه (مثلاً $z_p = ۲ > ۰$)، اون وقت مساحت سمت .....z برابر با احتمال p_i خواهد بود. تو این حالت هم (یعنی اگه z_i **مثبت** باشه) باز هم مقدار p_i نشون دهندهٔ .....، اما نه ..... .

روز ۱۶۰

نحوهٔ محاسبه احتمال در توزیع نرمال(استفادهٔ مستقیم از جدول نرمال استاندارد):

احتمال‌های زیر رو با رسم منحنی نرمال نشون بدین:

۲۱۵۴ $۱)p\ \ x < a\ \ =$ .....

$۲)p\ \ x > a\ \ =$ .....

۲۱۵۵ $۳)p\ \ a < x < b\ \ =$ .....

روز ۱۶۰ **حل فیشهای: ۲۱۴۷-۲۱۴۹-۲۱۵۷**

روز ۱۶۱ **با توجه به متقارن بودن توزیع نرمال استاندارد حول محور $z = ۰$ حاصل عبارات زیر را با رسم شکل نشان دهید.**

۲۱۶۶ $p\ \ z > a\ \ = p$ .....

$p\ \ z < a\ \ = p$ .....

روز ۱۶۱ **حل فیشهای: ۲۱۵۸-۲۱۶۰-۲۱۶۱-۲۱۶۲-۲۱۶۵-۲۱۶۸-۲۱۷۰-۲۱۷۲**

روز ۱۶۲ **تقریب توزیع پواسن به وسیلهٔ توزیع نرمال:**

۲۱۸۲ **۱)** اگه ..... به حدی بزرگ بشه که ..... باشه، اون وقت توزیع نرمال تقریب مناسبی برای توزیع پواسن خواهد بود.به عبارت دیگه، حدّ توزیع پواسن، هنگامی که .....، به سمت توزیع نرمال میل می‌کند.

۲۱۸۴ ۲)میانگین، واریانس و انحراف معیار توزیع نرمال بعد از تقریب :

۳) نحوهٔ تبدیل متغیر نرمال به متغیر نرمال استاندارد(پس از تقریب پواسن):

$$z=\frac{x-\mu}{\delta}=\xrightarrow[\mu=\ldots,\ \delta=\ldots]{\text{تقریب پواسون به کمک نرمال}} z=\frac{x-\ldots}{\ldots}$$

روز ۱۶۲ **حل فیشهای: ۲۱۷۴-۲۱۷۶-۲۱۷۸-۲۱۸۰-۲۱۸۵**

روز ۱۶۳ **تقریب توزیع دوجمله‌ای به وسیله توزیع نرمال:**

۲۱۸۷ ۲ شرط (۲ وضعیت) برای استفاده از این تقریب:

۲۱۸۸ حالت الف)

حالت ب)

نحوهٔ تبدیل متغیر نرمال به متغیر نرمال استاندارد(پس از تقریب):

۲۱۸۹

$$z=\frac{x-\mu}{\delta}\xrightarrow[\mu=\ldots,\ \delta=\ldots]{\text{تقریب دوجمله‌ای به کمک نرمال}} z=\frac{x-\ldots}{\ldots}$$

روز ۱۶۳ **تصحیح پیوستگی [دوجمله‌ای و پواسن]**

۲۲۰۱

احتمال در توزیع دوجمله‌ای	احتمال در توزیع نرمال (بعد از تصحیح پیوستگی)
$p\ \ x=a$	
$p\ \ a\le x\le b$	
$p\ \ a<x<b$	
$p\ \ x\ge a$	
$p\ \ x>a$	
$p\ \ x\le a$	
$p\ \ x<a$	

توجه: در حل تست‌ها، فقط باید زمانی از «**تصحیح پیوستگی**» استفاده کنیم که .....

تبصره: هنگام محاسبه احتمال در توزیع نرمال، اگر از ما احتمال ..... رو بخواهند، باید قبل از تغییر متغیر از X به Z، عمل «تصحیح پیوستگی» رو انجام بدیم.

روز ۱۶۳ **حل فیشهای: ۲۱۹۰-۲۱۹۲-۲۱۹۴-۲۲۰۲-۲۲۰۵**

روز ۱۶۴ **پارامترهای توزیع کای دو:** ۲۲۰۷

نحوه نمایش توزیع کای دو:

روز ۱۶۴ **امید و واریانس توزیع کای دو:**

۲۲۰۸

۱) **امید ریاضی (میانگین)**
۲) **واریانس**
۳) **انحراف معیار**
۴) **ضریب تغییرات**

روز ۱۶۴ **مجموع و تفاضل دو متغیر** χ^2: مجموع یا تفاضل این دو متغیرکای دو، دارای توزیع ..... با درجه آزادی ..... خواهد بود:

۲۲۱۱

اگه $\begin{cases} x\sim\chi^2_m \\ y\sim\chi^2_n \end{cases}$ $\longrightarrow$ $x+y\sim\ldots\ldots\ldots\ldots$ ، $x-y\sim\ldots\ldots\ldots\ldots$

۲۲۱۱

روز ۱۶۴	**ارتباط بین درجهٔ آزادی و شکل توزیع** χ^2 : **حالت الف)** اگه درجه آزادی کم باشه $n \le .....$ ، توزیع χ^2 دارای چولگی ..... است. **حالت ب)** اگه درجه آزادی بزرگ باشه $n > .....$ ، چولگی توزیع کای دو ..... میشه و در نتیجه توزیع χ^2 ..... شده و به سمت ..... میل می‌کنه.	۲۲۱۳
	رابطه بین توزیع χ^2 **و توزیع نرمال استاندارد:** $1)\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2 = z^2 = \ldots$ $2)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu_i}{\delta_i}\right)^2 = \sum z_i^2 \xrightarrow{x_i \text{ ها و } z_i \text{ هامستقل از هم‌اند}}$	۲۲۱۵
روز ۱۶۴	**حل فیشهای: ۲۲۰۹-۲۲۱۰-۲۲۱۲-۲۲۱۷**	

حالا یک دفترچه ۷۲ صفحه‌ای بسیار کامل و جامع از آمار ۱ در اختیار دارید که همیشه در طول زندگی علمی خود می‌توانید به آن رجوع کنید.

این هدیه‌ای بود از طرف DLM برای شما عضو و همراه همیشگی

امید است مورد قبول و توجه شما قرار گرفته باشد.

برنامه زمان‌بندی بر مبنای «یک مطالعه ملایم، آرام و عمیق» پیشنهاد شده است. شما می‌توانید دو روز (یا سه روز) را در یک روز بخوانید. این امر، هیچ خللی در روش مطالعه ایجاد نمی‌کند. فقط ناچار خواهید بود در طول روز، زمان بیشتری را به مطالعه آمار اختصاص دهید. توجه داشته باشید مرورها نه از روی فلش‌کارت‌ها بلکه از باکس CTS انجام می‌پذیرند.				پس از اتمام هر مرحله مطالعه در هر روز ، «یک تیک» در محل تعیین شده بزنید.		زمان‌بندی مرورها براساس طبیعت عملکرد مغز انسان و برمبنای انتقال مطالب از حافظه کوتاه مدت به حافظه دائمی طراحی شده است. سعی کنید زمان‌بندی مرورها را به دقت رعایت فرمایید.
روز	شماره فصل	فلش‌کارتهای جدید	مطالعه اول (مقدماتی)	مطالعه دوم (نیم‌چاشت)	مطالعه سوم (نهایی)	مرورها
۱	فصل ۱	۱ تا ۱۵	✓	✓	✓	----------
۲		۱۶ تا ۳۰				مرور فلش‌کارتهای روز اول (۱ تا ۱۵) از باکس CTS
۳		۳۱ تا ۵۰				مرور فلش‌کارتهای روز دوم (۱۶ تا ۳۰) از باکس CTS
۴		۵۱ تا ۶۶				مرور فلش‌کارت‌های روز سوم (۳۱ تا ۵۰) از باکس CTS
۵		۶۷ تا ۸۹				مرور فلش‌کارت‌های روز چهارم (۵۱ تا ۶۶) از باکس CTS
۶	پایان فصل ۱	----------				**کل فصل ۱ را از خود آزمون بگیرید.**
۷	فصل ۲	۹۰ تا ۱۰۹				----------
۸		۱۱۰ تا ۱۲۸				مرور فلش‌کارتهای روز هفتم (۹۰ تا ۱۰۹) از باکس CTS
۹		۱۲۹ تا ۱۴۶				مرور فلش‌کارتهای روز هشتم (۱۱۰ تا ۱۲۸) از باکس CTS
۱۰		۱۴۷ تا ۱۵۹				مرور فلش‌کارتهای روز نهم (۱۲۹ تا ۱۴۶) از باکس CTS
۱۱	پایان فصل ۲	----------				**کل فصل۲ را از خود آزمون بگیرید.**
۱۲	فصل ۳	۱۶۰ تا ۱۷۶				----------
۱۳		۱۷۷ تا ۱۹۵				مرور فلش‌کارتهای روز دوازدهم (۱۶۰ تا ۱۷۶) از باکس CTS
۱۴		۱۹۶ تا ۲۱۰				مرور فلش‌کارتهای روز سیزدهم (۱۷۷ تا ۱۹۵) از باکس CTS
۱۵		۲۱۱ تا ۲۲۴				مرور فلش‌کارتهای روز چهاردهم (۱۹۶ تا ۲۱۰) از باکس CTS
۱۶		۲۲۵ تا ۲۳۹				مرور فلش‌کارتهای روز پانزدهم (۲۱۱ تا ۲۲۴) از باکس CTS
۱۷		۲۴۰ تا ۲۵۶				مرور فلش‌کارتهای روز شانزدهم (۲۲۵ تا ۲۳۹) از باکس CTS
۱۸		۲۵۷ تا ۲۷۲				مرور فلش‌کارتهای روز ۱۴و۱۳و۱۲ (۱۶۰ تا ۲۱۰) و نیز روز هفدهم (۲۴۰ تا ۲۵۶) از باکس CTS
۱۹		۲۷۳ تا ۲۸۸				مرور فلش‌کارتهای روز هجدهم (۲۵۷ تا ۲۷۲) از باکس CTS
۲۰		۲۸۹ تا ۳۰۱				مرور فلش‌کارتهای روز نوزدهم (۲۷۳ تا ۲۸۸) از باکس CTS
۲۱		۳۰۲ تا ۳۱۶				مرور فلش‌کارتهای روز ۱۷و۱۶و۱۵ (۲۱۱ تا ۲۵۶) و نیز روز بیستم (۲۸۹ تا ۳۰۱) از باکس CTS
۲۲		۳۱۷ تا ۳۳۰				مرور فلش‌کارتهای روز بیست و یکم (۳۰۲ تا ۳۱۶) از باکس CTS
۲۳		۳۳۱ تا ۳۴۷				مرور فلش‌کارتهای روز بیست و دوم (۳۱۷ تا ۳۳۰) از باکس CTS
۲۴		۳۴۸ تا ۳۶۴				مرور فلش‌کارتهای روز ۲۰و۱۹و۱۸ (۲۵۷ تا ۳۰۱) و نیز روز بیستم و سوم (۳۳۱ تا ۳۴۷) از باکس CTS
۲۵		۳۶۵ تا ۳۷۸				مرور فلش‌کارتهای روز بیست و چهارم (۳۴۸ تا ۳۶۴) از باکس CTS
۲۶		۳۷۹ تا ۳۹۴				مرور فلش‌کارتهای روز بیست و پنجم (۳۶۵ تا ۳۷۸) از باکس CTS
۲۷		۳۹۵ تا ۴۰۸				مرور فلش‌کارتهای روز ۲۳و۲۲و۲۱ (۳۰۲ تا ۳۴۷) و نیز روز بیستم و ششم (۳۷۹ تا ۳۹۴) از باکس CTS
۲۸		۴۰۹ تا ۴۲۸				مرور فلش‌کارتهای روز بیست و هفتم (۳۹۵ تا ۴۰۸) از باکس CTS
۲۹		۴۲۹ تا ۴۴۳				مرور فلش‌کارتهای روز بیست و هشتم (۴۰۹ تا ۴۲۸) از باکس CTS
۳۰		۴۴۴ تا ۴۵۸				مرور فلش‌کارتهای روز بیست و نهم (۴۲۹ تا ۴۴۳) از باکس CTS

۳۱		۴۵۹ تا ۴۶۷				مرور فلش‌کارتهای روز ۲۶و۲۵و۲۴ (۳۴۸ تا ۳۹۴) از باکس CTS
۳۲	**پایان فصل ۳**	----------				مرور فلش‌کارتهای روز۳۱و۳۰و۲۹و۲۸و۲۷ (۳۹۵ تا ۴۶۷) از باکس CTS
۳۳	**فصل ۴**	۴۶۸ تا ۴۸۳				----------
۳۴		۴۸۴ تا ۴۹۷				مرور فلش‌کارتهای روز سی و سوم (۴۶۸ تا ۴۸۳) از باکس CTS
۳۵		۴۹۸ تا ۵۱۳				مرور فلش‌کارتهای روز سی و چهارم (۴۸۴ تا ۴۹۷) از باکس CTS
۳۶		۵۱۴ تا ۵۲۷				مرور فلش‌کارتهای روز سی و پنجم (۴۹۸ تا ۵۱۳) از باکس CTS
۳۷		۵۲۸ تا ۵۴۴				مرور فلش‌کارتهای روز سی و ششم (۵۱۴ تا ۵۲۷) از باکس CTS
۳۸		۵۴۵ تا ۵۶۰				مرور فلش‌کارتهای روز ۳۵و۳۴و۳۳ (۴۶۸ تا ۵۱۳) از باکس CTS
۳۹		۵۶۱ تا ۵۷۵				مرور فلش‌کارتهای روز ۳۸و۳۷و۳۶ (۵۱۴ تا ۵۶۰) از باکس CTS
۴۰		۵۷۶ تا ۵۸۹				مرور فلش‌کارتهای روز سی و نهم (۵۶۱ تا ۵۷۵) از باکس CTS
۴۱		۵۹۰ تا ۶۰۳				مرور فلش‌کارتهای روز چهلم (۵۷۶ تا ۵۸۹) از باکس CTS
۴۲		۶۰۴ تا ۶۱۵				مرور فلش‌کارتهای روز چهل و یکم (۵۹۰ تا ۶۰۳) از باکس CTS
۴۳		۶۱۶ تا ۶۲۹				مرور فلش‌کارتهای روز چهل و دوم (۶۰۴ تا ۶۱۵) از باکس CTS
۴۴	**پایان فصل ۴**	----------				مرور فلش‌کارتهای روز۴۳و۴۲و۴۱و۴۰و۳۹ (۵۶۱ تا ۶۲۹) از باکس CTS
۴۵	**فصل ۵**	۶۳۰ تا ۶۴۵				----------
۴۶		۶۴۶ تا ۶۵۸				مرور فلش‌کارتهای روز چهل و پنجم (۶۳۰ تا ۶۴۵) از باکس CTS
۴۷		۶۵۹ تا ۶۷۴				مرور فلش‌کارتهای روز چهل و ششم (۶۴۶ تا ۶۵۸) از باکس CTS
۴۸		۶۷۵ تا ۶۸۸				مرور فلش‌کارتهای روز چهل و هفت (۶۵۹ تا ۶۷۴) از باکس CTS
۴۹		۶۸۹ تا ۷۰۰				مرور فلش‌کارتهای روز چهل و هشت (۶۷۵ تا ۶۸۸) از باکس CTS
۵۰		۷۰۱ تا ۷۱۵				مرور فلش‌کارتهای روز ۴۷و۴۶و۴۵ (۶۳۰ تا ۶۷۴) از باکس CTS
۵۱		۷۱۶ تا ۷۳۰				مرور فلش‌کارتهای روز ۵۰ و۴۹و۴۸ (۶۷۵ تا ۷۱۵) از باکس CTS
۵۲		۷۳۱ تا ۷۴۵				مرور فلش‌کارتهای روز پنجاه و یکم (۷۱۶ تا ۷۳۰) از باکس CTS
۵۳		۷۴۶ تا ۷۵۷				مرور فلش‌کارتهای روز پنجاه و دوم (۷۳۱ تا ۷۴۵) از باکس CTS
۵۴		۷۵۸ تا ۷۷۱				مرور فلش‌کارتهای روز پنجاه و سوم (۷۴۶ تا ۷۵۷) از باکس CTS
۵۵	**پایان فصل ۵**	----------				مرور فلش‌کارتهای روز ۵۴ و۵۳ و۵۲ و۵۱ (۷۱۶ تا ۷۷۱) از باکس CTS
۵۶	**فصل ۶**	۷۷۲ تا ۷۸۴				----------
۵۷		۷۸۵ تا ۸۰۰				مرور فلش‌کارتهای روز پنجاه و ششم (۷۷۲ تا ۷۸۴) از باکس CTS
۵۸		۸۰۱ تا ۸۱۷				مرور فلش‌کارتهای روز پنجاه و هفتم (۷۸۵ تا ۸۰۰) از باکس CTS
۵۹		۸۱۸ تا ۸۲۸				مرور فلش‌کارتهای روز پنجاه و هشتم (۸۰۱ تا ۸۱۷) از باکس CTS
۶۰		۸۲۹ تا ۸۳۹				مرور فلش‌کارتهای روز پنجاه و نهم (۸۱۸ تا ۸۲۸) از باکس CTS
۶۱	**پایان فصل ۶**		حالا کل «آمار توصیفی» فقط در ۲۵ صفحه در قالب جدول CTS در اختیار شما قرار دارد. (صفحات ۳ تا ۲۷)			**روز مخصوص مرور و جمع بندی فصول مربوط به «آمار توصیفی» : فصول ۱ تا ۶ از باکس CTS**
۶۲	**فصل ۷**	۸۴۰ تا ۸۵۴				----------
۶۳		۸۵۵ تا ۸۶۹				مرور فلش‌کارتهای روز شصت و دوم (۸۴۰ تا ۸۵۴) از باکس CTS
۶۴		۸۷۰ تا ۸۷۹				مرور فلش‌کارتهای روز شصت و سوم (۸۵۵ تا ۸۶۹) از باکس CTS
۶۵		۸۸۰ تا ۸۹۳				مرور فلش‌کارتهای روز شصت و چهارم (۸۷۰ تا ۸۷۹) از باکس CTS
۶۶	**پایان فصل ۷**	----------				**کل فصل ۷ را از خود آزمون بگیرید.**

۶۷	فصل ۸	۸۹۴ تا ۹۰۶				----------
۶۸		۹۰۷ تا ۹۲۲				مرور فلش‌کارتهای روز شصت و هفتم (۸۹۴ تا ۹۰۶) از باکس CTS
۶۹		۹۲۳ تا ۹۳۵				مرور فلش‌کارتهای روز شصت و هشتم (۹۰۷ تا ۹۲۲) از باکس CTS
۷۰		۹۳۶ تا ۹۵۰				مرور فلش‌کارتهای روز شصت و نه (۹۲۳ تا ۹۳۵) از باکس CTS
۷۱		۹۵۱ تا ۹۶۵				مرور فلش‌کارتهای روز هفتادم (۹۳۶ تا ۹۵۰) از باکس CTS
۷۲		۹۶۶ تا ۹۸۱				مرور فلش‌کارتهای روز ۶۹و ۶۸ و۶۷ (۸۹۴ تا ۹۳۵) از باکس CTS
۷۳		۹۸۲ تا ۹۹۴				مرور فلش‌کارتهای روز ۷۲ و ۷۱ (۹۵۱ تا ۹۸۱) از باکس CTS
۷۴		۹۹۵ تا ۱۰۰۶				مرور فلش‌کارتهای روز هفتاد و سوم (۹۸۲ تا ۹۹۴) از باکس CTS
۷۵		۱۰۰۷ تا ۱۰۲۲				مرور فلش‌کارتهای روز هفتاد و چهارم (۹۹۵ تا ۱۰۰۶) از باکس CTS
۷۶		۱۰۲۳ تا ۱۰۳۷				مرور فلش‌کارتهای روز هفتاد و پنجم (۱۰۰۷ تا ۱۰۲۲) از باکس CTS
۷۷		۱۰۳۸ تا ۱۰۵۲				مرور فلش‌کارتهای روز هفتاد و ششم (۱۰۲۳ تا ۱۰۳۷) از باکس CTS
۷۸		۱۰۵۳ تا ۱۰۶۰				مرور فلش‌کارتهای روز ۷۵و ۷۴ و۷۳ (۹۸۲ تا ۱۰۲۲) از باکس CTS
۷۹		۱۰۶۱ تا ۱۰۷۵				مرور فلش‌کارتهای روز ۷۷ و۷۶ (۱۰۲۳ تا ۱۰۵۲) از باکس CTS
۸۰	**پایان فصل ۸**	----------				مرور فلش‌کارتهای روز ۷۹ و۷۸ (۱۰۵۳ تا ۱۰۷۵) از باکس CTS
۸۱	فصل ۹	۱۰۷۶ تا ۱۰۹۱				----------
۸۲		۱۰۹۲ تا ۱۱۰۸				مرور فلش‌کارتهای روز هشتاد و یکم (۱۰۷۶ تا ۱۰۹۱) از باکس CTS
۸۳		۱۱۰۹ تا ۱۱۲۶				مرور فلش‌کارتهای روز هشتاد و دوم (۱۰۹۲ تا ۱۱۰۸) از باکس CTS
۸۴		۱۱۲۷ تا ۱۱۴۱				مرور فلش‌کارتهای روز هشتاد و سوم (۱۱۰۹ تا ۱۱۲۶) از باکس CTS
۸۵		۱۱۴۲ تا ۱۱۵۷				مرور فلش‌کارتهای روز هشتاد و چهارم (۱۱۲۷ تا ۱۱۴۱) از باکس CTS
۸۶		۱۱۵۸ تا ۱۱۷۰				مرور فلش‌کارتهای روز ۸۳ و۸۲ و۸۱ (۱۰۷۶ تا ۱۱۲۶) از باکس CTS
۸۷		۱۱۷۱ تا ۱۱۸۸				مرور فلش‌کارتهای روز ۸۶ و ۸۵ و۸۴ (۱۱۲۷ تا ۱۱۷۰) از باکس CTS
۸۸		۱۱۸۹ تا ۱۲۰۴				مرور فلش‌کارتهای روز هشتاد و هفتم (۱۱۷۱ تا ۱۱۸۸) از باکس CTS
۸۹		۱۲۰۵ تا ۱۲۱۶				مرور فلش‌کارتهای روز هشتاد و هشتم (۱۱۸۹ تا ۱۲۰۴) از باکس CTS
۹۰		۱۲۱۷ تا ۱۲۳۰				مرور فلش‌کارتهای روز هشتاد و نهم (۱۲۰۵ تا ۱۲۱۶) از باکس CTS
۹۱		۱۲۳۱ تا ۱۲۴۷				مرور فلش‌کارتهای روز ۸۷ و ۸۶ و ۸۵ (۱۱۴۲ تا ۱۱۸۸) از باکس CTS
۹۲		۱۲۴۸ تا ۱۲۶۵				مرور فلش‌کارتهای روز ۹۰ و ۸۹ و ۸۸ (۱۱۸۹ تا ۱۲۳۰) از باکس CTS
۹۳		۱۲۶۶ تا ۱۲۸۴				مرور فلش‌کارتهای روز ۹۲ و۹۱ (۱۲۳۱ تا ۱۲۶۵) از باکس CTS
۹۴		۱۲۸۵ تا ۱۲۹۷				مرور فلش‌کارتهای روز نود و سوم (۱۲۶۶ تا ۱۲۸۴) از باکس CTS
۹۵		۱۲۹۸ تا ۱۳۰۹				مرور فلش‌کارتهای روز نود و چهارم (۱۲۸۵ تا ۱۲۹۷) از باکس CTS
۹۶	**پایان فصل ۹**	----------				مرور فلش‌کارتهای روز ۹۵ و ۹۴ و ۹۳ و ۹۲ و ۹۱ و ۹۰ (۱۲۱۷ تا ۱۳۰۹) از باکس CTS
۹۷	فصل ۱۰	۱۳۱۰ تا ۱۳۲۴				----------
۹۸		۱۳۲۵ تا ۱۳۴۱				مرور فلش‌کارتهای روز نود و هفتم (۱۳۱۰ تا ۱۳۲۴) از باکس CTS
۹۹		۱۳۴۲ تا ۱۳۵۶				مرور فلش‌کارتهای روز نود و هشتم (۱۳۲۵ تا ۱۳۴۱) از باکس CTS
۱۰۰		۱۳۵۷ تا ۱۳۷۱				مرور فلش‌کارتهای روز نود و نهم (۱۳۴۲ تا ۱۳۵۶) از باکس CTS
۱۰۱		۱۳۷۲ تا ۱۳۸۷				مرور فلش‌کارتهای روز صدم (۱۳۵۷ تا ۱۳۷۱) از باکس CTS
۱۰۲		۱۳۸۸ تا ۱۳۹۸				مرور فلش‌کارتهای روز صد و یکم (۱۳۷۲ تا ۱۳۸۷) از باکس CTS
۱۰۳		۱۳۹۹ تا ۱۴۱۳				مرور فلش‌کارتهای روز صد و دوم (۱۳۸۸ تا ۱۳۹۸) از باکس CTS
۱۰۴	**پایان فصل ۱۰**	----------	حالا کل مبحث «آنالیز ترکیبی و احتمال» فقط در ۱۳ صفحه در قالب جدول CTS در اختیار شما قرار دارد. (صفحات ۲۸ تا ۴۰)			**روز مخصوص مرور و جمع بندی فصول مربوط به مبحث «آنالیز ترکیبی و احتمال» : فصول ۷ تا ۱۰ از باکس CTS**
۱۰۵	فصل ۱۱	۱۴۱۴ تا ۱۴۲۴				----------
۱۰۶		۱۴۲۵ تا ۱۴۴۷				مرور فلش‌کارتهای روز صد و پنجم (۱۴۱۴ تا ۱۴۲۴) از باکس CTS
۱۰۷		۱۴۴۸ تا ۱۴۶۳				مرور فلش‌کارتهای روز صد و ششم (۱۴۲۵ تا ۱۴۴۷) از باکس CTS
۱۰۸		۱۴۶۴ تا ۱۴۷۹				مرور فلش‌کارتهای روز صد و هفتم (۱۴۴۸ تا ۱۴۶۳) از باکس CTS

۱۰۹		۱۴۸۰ تا ۱۴۹۳				مرور فلش‌کارتهای روز صد و هشتم (۱۴۶۴ تا ۱۴۷۹) از باکس CTS
۱۱۰		۱۴۹۴ تا ۱۵۰۵				مرور فلش‌کارتهای روز صد و نهم (۱۴۸۰ تا ۱۴۹۳) از باکس CTS
۱۱۱	**پایان فصل ۱۱**	----------				**کل فصل ۱۱ را از خود آزمون بگیرید.**
۱۱۲	**فصل ۱۲**	۱۵۰۶تا ۱۵۲۱				----------
۱۱۳		۱۵۲۲ تا ۱۵۳۵				مرور فلش‌کارتهای روز صد و دوازدهم (۱۵۰۶ تا ۱۵۲۱) از باکس CTS
۱۱۴		۱۵۳۶ تا ۱۵۴۷				مرور فلش‌کارتهای روز صد و سیزدهم (۱۵۲۲ تا ۱۵۳۵) از باکس CTS
۱۱۵		۱۵۴۸ تا ۱۵۶۲				مرور فلش‌کارتهای روز صد و چهاردهم (۱۵۳۶ تا ۱۵۴۷) از باکس CTS
۱۱۶	**پایان فصل ۱۲**	----------				**کل فصل ۱۲ را از خود آزمون بگیرید.**
۱۱۷	**فصل ۱۳**	۱۵۶۳ تا ۱۵۷۸				----------
۱۱۸		۱۵۷۹ تا ۱۵۹۳				مرور فلش‌کارتهای روز صد و هفدهم (۱۵۶۳ تا ۱۵۷۸) از باکس CTS
۱۱۹		۱۵۹۴ تا ۱۶۰۹				مرور فلش‌کارتهای روز صد و هجدهم (۱۵۷۹ تا ۱۵۹۳) از باکس CTS
۱۲۰		۱۶۱۰ تا ۱۶۲۲				مرور فلش‌کارتهای روز صد و نوزدهم (۱۵۹۴ تا ۱۶۰۹) از باکس CTS
۱۲۱		۱۶۲۳ تا ۱۶۳۸				مرور فلش‌کارتهای روز صد و بیستم (۱۶۱۰ تا ۱۶۲۲) از باکس CTS
۱۲۲		۱۶۳۹ تا ۱۶۵۳				مرور فلش‌کارتهای روز۱۱۹و۱۱۸و۱۱۷ (۱۵۶۳ تا ۱۶۰۹) از باکس CTS
۱۲۳		۱۶۵۴ تا ۱۶۶۶				مرور فلش‌کارتهای روز۱۲۲و۱۲۱و۱۲۰ (۱۶۱۰ تا ۱۶۵۳) از باکس CTS
۱۲۴		۱۶۶۷ تا ۱۶۷۸				مرور فلش‌کارتهای روز ۱۲۳ (۱۶۵۴ تا ۱۶۶۶) از باکس CTS
۱۲۵	**پایان فصل ۱۳**	----------				**کل فصل ۱۳ را از خود آزمون بگیرید.**
۱۲۶	**فصل ۱۴**	۱۶۷۹ تا ۱۶۹۵				----------
۱۲۷		۱۶۹۶ تا ۱۷۱۰				مرور فلش‌کارتهای روز ۱۲۶ (۱۶۷۹ تا ۱۶۹۵) از باکس CTS
۱۲۸		۱۷۱۱ تا ۱۷۲۶				مرور فلش‌کارتهای روز ۱۲۷ (۱۶۹۶ تا ۱۷۱۰) از باکس CTS
۱۲۹		۱۷۲۷ تا ۱۷۴۲				مرور فلش‌کارتهای روز ۱۲۸ (۱۷۱۱ تا ۱۷۲۶) از باکس CTS
۱۳۰		۱۷۴۳ تا ۱۷۵۴				مرور فلش‌کارتهای روز ۱۲۹ (۱۷۲۷ تا ۱۷۴۲) از باکس CTS
۱۳۱		۱۷۵۵ تا ۱۷۶۵				مرور فلش‌کارتهای روز ۱۳۰ (۱۷۴۳ تا ۱۷۵۴) از باکس CTS
۱۳۲		۱۷۶۶ تا ۱۷۷۸				مرور فلش‌کارتهای روز ۱۳۱ (۱۷۵۵ تا ۱۷۶۵) از باکس CTS
۱۳۳	**پایان فصل ۱۴**	----------				**کل فصل ۱۴ را از خود آزمون بگیرید.**
۱۳۴	**فصل ۱۵**	۱۷۷۹ تا ۱۷۹۰				----------
۱۳۵		۱۷۹۱ تا ۱۸۰۹				مرور فلش‌کارتهای روز ۱۳۴ (۱۷۷۹ تا ۱۷۹۰) از باکس CTS
۱۳۶		۱۸۱۰تا ۱۸۱۷				مرور فلش‌کارتهای روز ۱۳۵ (۱۷۹۱ تا ۱۸۰۹) از باکس CTS
۱۳۷	**پایان فصل ۱۵**	----------	حالا کل مبحث «توابع احتمال متغیّرهای تصادفی» فقط در ۱۶ صفحه در قالب جدول CTS در اختیار شما قرار دارد. (صفحات ۴۱ تا ۵۶)			**روز مرور و جمع بندی فصول مربوط به «متغیرهای تصادفی گسسته و پیوسته و توابع احتمال آنها»: فصول ۱۱ تا ۱۵ از باکس CTS**
۱۳۸	**فصل ۱۶**	۱۸۱۸ تا ۱۸۳۵				----------
۱۳۹		۱۸۳۶ تا ۱۸۵۱				مرور فلش‌کارتهای روز ۱۳۸ (۱۸۱۸ تا ۱۸۳۵) از باکس CTS
۱۴۰		۱۸۵۲تا ۱۸۶۶				مرور فلش‌کارتهای روز ۱۳۹ (۱۸۳۶ تا ۱۸۵۱) از باکس CTS
۱۴۱		۱۸۶۷ تا ۱۸۸۰				مرور فلش‌کارتهای روز ۱۴۰ (۱۸۵۲ تا ۱۸۶۶) از باکس CTS
۱۴۲		۱۸۸۱ تا ۱۸۹۳				مرور فلش‌کارتهای روز ۱۴۱ (۱۸۶۷ تا ۱۸۸۰) از باکس CTS
۱۴۳		۱۸۹۴ تا ۱۹۰۵				مرور فلش‌کارتهای روز۱۴۰و۱۳۹و۱۳۸ (۱۸۱۸ تا ۱۸۶۶) از باکس CTS
۱۴۴		۱۹۰۶ تا ۱۹۲۳				مرور فلش‌کارتهای روز۱۴۳و۱۴۲و۱۴۱ (۱۸۶۷ تا ۱۹۰۵) از باکس CTS
۱۴۵		۱۹۲۴ تا ۱۹۳۶				مرور فلش‌کارتهای روز ۱۴۴ (۱۹۰۶ تا ۱۹۲۳) از باکس CTS
۱۴۶		۱۹۳۷ تا ۱۹۵۸				مرور فلش‌کارتهای روز ۱۴۵ (۱۹۲۴ تا ۱۹۳۶) از باکس CTS
۱۴۷		۱۹۵۹ تا ۱۹۷۱				مرور فلش‌کارتهای روز ۱۴۶ (۱۹۳۷ تا ۱۹۵۸) از باکس CTS

۱۴۸		۱۹۷۲ تا ۱۹۸۷				مرور فلش‌کارتهای روز ۱۴۷ (۱۹۵۹ تا ۱۹۷۱) از باکس CTS
۱۴۹		۱۹۸۸ تا ۲۰۰۸				مرور فلش‌کارتهای روز ۱۴۸ (۱۹۷۲ تا ۱۹۸۷) از باکس CTS
۱۵۰	**پایان فصل ۱۶**	----------				مرور فلش‌کارتهای روز ۱۴۹و۱۴۸و۱۴۷و۱۴۶و۱۴۵و۱۴۴و۱۴۳و۱۴۲ (۱۸۸۱ تا ۲۰۰۸) از باکس CTS
۱۵۱	**فصل ۱۷**	۲۰۰۹ تا ۲۰۲۱				----------
۱۵۲		۲۰۲۲ تا ۲۰۳۸				مرور فلش‌کارتهای روز ۱۵۱ (۲۰۰۹ تا ۲۰۲۱) از باکس CTS
۱۵۳		۲۰۳۹ تا ۲۰۵۲				مرور فلش‌کارتهای روز ۱۵۲ (۲۰۲۲ تا ۲۰۳۸) از باکس CTS
۱۵۴	**پایان فصل ۱۷**	----------				**کل فصل ۱۷ را از خود آزمون بگیرید.**
۱۵۵	**فصل ۱۸**	۲۰۵۳ تا ۲۰۶۷				----------
۱۵۶		۲۰۶۸ تا ۲۰۸۸				مرور فلش‌کارتهای روز ۱۵۵ (۲۰۵۳ تا ۲۰۶۷) از باکس CTS
۱۵۷		۲۰۸۹ تا ۲۱۰۴				مرور فلش‌کارتهای روز ۱۵۶ (۲۰۶۸ تا ۲۰۸۸) از باکس CTS
۱۵۸		۲۱۰۵ تا ۲۱۲۴				مرور فلش‌کارتهای روز ۱۵۷ (۲۰۸۹ تا ۲۱۰۴) از باکس CTS
۱۵۹		۲۱۲۵ تا ۲۱۴۲				مرور فلش‌کارتهای روز ۱۵۸ (۲۱۰۵ تا ۲۱۲۴) از باکس CTS
۱۶۰		۲۱۴۳ تا ۲۱۵۷				مرور فلش‌کارتهای روز۱۵۷و۱۵۶و۱۵۵ (۲۰۵۳ تا ۲۱۰۴) از باکس CTS
۱۶۱		۲۱۵۸ تا ۲۱۷۳				مرور فلش‌کارتهای روز۱۶۰و۱۵۹و۱۵۸ (۲۱۰۵ تا ۲۱۵۷) از باکس CTS
۱۶۲		۲۱۷۴ تا ۲۱۸۶				مرور فلش‌کارتهای روز ۱۶۱ (۲۱۵۸ تا ۲۱۷۳) از باکس CTS
۱۶۳		۲۱۸۷ تا ۲۲۰۶				مرور فلش‌کارتهای روز ۱۶۲ (۲۱۷۴ تا ۲۱۸۶) از باکس CTS
۱۶۴		۲۲۰۷ تا ۲۲۱۷				مرور فلش‌کارتهای روز ۱۶۳ (۲۱۸۷ تا ۲۲۰۶) از باکس CTS
۱۶۵	**پایان فصل ۱۸**					مرور فلش‌کارتهای روز ۱۶۴ و ۱۶۳ و ۱۶۲ و ۱۶۱ و ۱۶۰ و ۱۵۹ (۲۱۲۵ تا ۲۲۱۷) از باکس CTS

«امیدواریم توانسته باشیم تجربه یک مطالعه لذت‌بخش با روشی خلاقانه را برای شما به یادگار گذاشته باشیم.»

کارشـــــــناسی ارشـــــــــد و دکتـــــــــرا فقط فلش کارتهای

« **شاخص‌ها (یا معیارهای عددی)** »

از مشخص‌کننده‌های عددی (شاخص‌های عددی) به چه منظوری استفاده می‌شود؟

آمار کاربردی ۱، عالِم تبریز و احمد هژبر، ص ۱۵

آمار و کاربرد آن در مدیریت ۱، مسعود نیکوکار، ص ۵۷

مقدمه:

همان طور که گفته‌ایم، طبقه‌بندی، توصیف و تحلیل داده‌ها در آمار توصیفی با سه روش زیر انجام می‌گیرد:

۱) تهیه جداول توزیع فراوانی: که تو فصل قبل آنها را بررسی کردیم.

۲) توصیف هندسی مشاهدات (رسم نمودارهای آماری): که آنها را در فصلهای بعد مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۳) محاسبه شاخص‌های آماری: که در ادامهٔ این فصل آنها را بررسی خواهیم نمود.

پاسخ سؤال) اگر بخواهیم دو جامعه نوعی را با هم **مقایسه** کنیم، این مقایسه را می‌تونیم از طریق روشهای ۱ و ۲ در بالا انجام بدیم (یعنی مقایسه **جداول** فراوانی این دو جامعه و یا مقایسه **نمودار** مشاهدات این دو جامعه)؛ ولی این مقایسهٔ ما حالت کیفی (غیرعددی) داره.

*بنابراین برای اینکه بتوانیم دو جامعهٔ نوعی را به صورت کمّی (عددی) با هم مقایسه کنیم، باید از **اعدادی** استفاده کنیم که به این اعداد،* **شاخص‌ها (مشخص کننده‌ها)ی عددی** می‌گوئیم. پس:

شاخص‌ها (مشخص کننده‌ها)ی عددی، اعدادی هستند که به منظور **مقایسه** کمّی بین دو یا چند جامعه بکار می‌روند.

«انواع شاخص‌ها (یا معیارهای عددی) در علم آمار»

انواع شاخص‌های عددی کدامند؟

هر یک از آنها چه چیزی را نشان می‌دهند؟

آمار و احتمال، آموزشگاه پارسه، محسن طورانی، ص ۲۱

انواع شاخص‌های عددی عبارتند از:

۱- معیارهای ***مرکزی*** ۲- معیارهای ***پراکندگی مطلق***
۳- معیارهای ***پراکندگی نسبی***

که در ادامه به توضیح مختصر هر یک می‌پردازیم.

۱) معیارهای مرکزی (مکانی): شاخص‌های مرکزیت توزیع:

این شاخص‌ها میزان ***تمرکز (مرکزیت)*** مشاهدات را حول یک نقطه نشان می‌دهند، یعنی مشخص می‌کنند که بیشتر مشاهدات در کجا **متمرکز** شده‌اند. *از جمله شاخص‌های مرکزی عبارتند از: میانگین، میانه، مد و ...*

۲) معیارهای پراکندگی مطلق (شاخص‌های تغییرپذیری):

این شاخص‌ها میزان ***پراکندگی*** مشاهدات را نسبت به یک مبداء دلخواه (مانند میانگین: μ) نشان می‌دهند، یعنی مشخص می‌کنند که مشاهدات، نسبت به یک مبداء دلخواه، تا چه اندازه **پراکنده** هستند.

از جمله شاخص‌های پراکندگی می‌توان به دامنه تغییرات (R)، انحراف معیار (δ) و واریانس (δ^2) اشاره کرد.

۳) معیارهای پراکندگی نسبی (شاخص‌های تعیین شکل منحنی توزیع):

از این شاخص‌ها برای مقایسه پراکندگی دو جامعه و یا مقایسه شکل منحنی توزیع دو جامعه به لحاظ تقارن یا چولگی و به لحاظ کشیدگی استفاده می‌شود.

(ادامه تو فیش بعد)

از جمله شاخص‌های پراکندگی نسبی می‌توان به ضریب تغییرات (CV)، ضریب چولگی (SK) و ضریب کشیدگی (E) را نام برد.

توجه: در ادامه این فصل، تنها معیارهای **مرکزی** را مطرح خواهیم کرد و ۲ معیار دیگر را در فصلای بعد بررسی می‌کنیم.

انواع شاخص‌های عددی

- ۱- شاخص‌های **مرکزی**
  - ۱- مُد (نما)
  - ۲- میانه
  - ۳- چندک‌ها
    - ۱- چارک
    - ۲- دهک
    - ۳- صدک
  - ۴- میانگین
- ۲- شاخص‌های پراکندگی **مطلق**
  - ۱- دامنه تغییرات (R)
  - ۲- انحراف معیار (δ)
  - ۳- واریانس (δ^2)
  - ...
- ۳- شاخص‌های پراکندگی **نسبی**
  - ۱- ضریب تغییرات (ضریب پراکندگی): CV
  - ۲- ضریب چولگی (Sk)
  - ۳- ضریب کشیدگی (E)

ایستگاه تغذیه:

بادام زمینی:

بادام زمینی حاوی ماده‌ای مغذی به نام رسوراترول است.

این ماده، آنتی‌اکسیدانی طبیعی است که گیاه بادام زمینی آن را تولید می‌کند.

این ماده دارای خواص ضد پیری است و برای سلامتی ما مفید است.

«شاخص‌ها (یا معیارهای) مرکزی»

۱) *تعریف معیار (یا شاخص)* **مرکزی**:

۲) *انواع شاخص‌های* **مرکزی (مکانی):**

آمار و احتمال، آموزشگاه پارسه، محسن طورانی،ص ۲۱

آمار و کاربرد آن در مدیریت ۱، مسعود نیکوکار،ص ۵۹

«معیار مرکزی: Measure of Central»

۱) تعریف: هر شاخص یا معیار عددی که نشانگر **مرکز داده‌های جامعه** باشه و مشاهدات جامعه، در **اطرافش** قرار بگیرن، یه معیار **مرکزی** است.

به عبارت دیگر هدف از محاسبه شاخص‌های مرکزی این است که ببینیم اکثر داده‌های جامعه در اطراف کدوم داده متمرکز شده‌اند، یعنی به سمت چه عددی گرایش دارند.

---

۲) انواع معیارها یا شاخص‌های مرکزی (مکانی = گرایش به مرکز):

۱- مُد (Mode): *ضعیف‌ترین و کم اهمیت‌ترین شاخص مرکزی است.*

۲- میانه (Median)

۳- چندک‌ها (Quantile): شامل سه دسته چارک‌ها، دهک‌ها و صدک‌ها هستند.

۴- میانگین (Mean): **مهمترین** شاخص مرکزی است و شامل ۳ نوعه:

۱- میانگین **حسابی** ۲- میانگین **هارمونیک** ۳- میانگین **هندسی**

(ادامه تو فیش بعد)

(صرفا برای یادگیری بیشتر):

ویژگی‌های یک شاخص مرکزی خوب و مناسب:

۱- حساب کردنش ساده باشد.

۲- به سادگی قابل درک باشد.

۳- در محاسبه آن از تمامی داده‌ها استفاده شود (مثل شاخص میانگین).

٤- بتونیم بر روی آن عملیات جبری (+، -، × و ÷ و ...) را انجام بدیم (باز هم مثل: میانگین)

٥- مقداری که برای این شاخص حساب می‌کنیم از یک نمونه به نمونهٔ دیگر تغییرات زیادی نکنه، یعنی یه شاخص خوب، شاخصیه که **تغییرپذیری و پراکندگیش کم باشه** (باز هم مثل میانگین).

ایستگاه تغذیه:

بادام زمینی:

آهن موجود در بادام زمینی، برای عملکرد گلبول‌های قرمز خون ما مفید است و

کلسیم موجود در آن هم، به داشتن استخوان‌هایی سالم کمک می کند.

(مهم)

تعریف شاخص مرکزی **مُد (نُما)؛ Mode**

آمار و احتمال، آموزشگاه پارسه، محسن طورانی،ص ۲۲

آمار و کاربرد آن در مدیریت ۱، مسعود نیکوکار،ص ۹۰

۱) مـــد = نمـــا (Mode): داده‌ای (xای) اســـت کـــه **بیشـــترین فراوانی (تکـرار)** را نسـبت بـه سـایر داده‌هـا داشـته باشـد. مـد را بـه اختصار با نماد Mo نمایش می‌دهیم.

نکته ۱) مُد هر دسته از مشاهدات، اندازه‌ای از صفت متغیر (x_i) است؛ یعنی مُد (در صورت وجود)، **حتماً یکی از مشاهدات** است.

مثلاً اگر مشاهدات ۵، ۴، ۲ و ۲ و ۱ را داشته باشیم، آنگاه: $Mo = ۲$

زیرا این مشاهده $(x_i = ۲)$ **بیشترین تکرار (فراوانی)** را دارد (۲ بار تکرار شده).

نکته مهم: همان طور که در این مثال مشاهده کردیم مُد، یکی از داده‌های ما است (یعنی یکی از مقادیر متغیر x است) یعنی $Mo = ۲$ در بین مشاهدات ما وجود دارد و **هرگز امکان نداره که مُد، عددی باشه که در بین داده‌ها نیست** (مثل عدد ۳ و ۶ که در بین داده‌های بالا نیست).

اما در مورد سایر شاخص‌های مرکزی مانند میانه و میانگین بعداً خواهیم دید که گاهی اوقات میانه و میانگین ممکن است در بین خود مشاهدات وجود نداشته باشند، ولی مُد (در صورت وجود) حتماً یکی از مشاهدات است.

نکته ۲) مُد (Mode)، کلمه‌ای فرانسوی است که به معنای **رایج‌ترین** لباس یا سبک می‌باشد.

«محاسبهٔ مد در داده‌های نوع اول (حجم کم)»

(مدیریت ۷۴)

نمای اعداد ۹، ۱۴، ۱۰، ۹، ۵، ۳ و ۲ کدام عدد می‌باشد؟

۱) ۵

۲) ۷

۳) ۹

۴) ۱۴

گزینه ۳)

مُد را می‌تونیم برای هر ۳ نوع داده‌ها حساب کنیم، یعنی هم برای داده‌های نوع **اول** (حجم کم)، هم برای نوع **دوم** (حجم زیاد و تنوع کم) و هم برای نوع **سوم** (حجم زیاد و تنوع زیاد).

در ادامهٔ این فیش، ما مثالی را برای داده‌های نوع **اول** ذکـــر می‌کنیم و در فیش‌های بعدی، نحوهٔ محاسبه مُد برای داده‌های نوع **دوم و سوم** را نشان می‌دهیم.

برای شمارش فراوانی (تکرار) داده‌های خام (داده‌های نوع اول) برای پرهیز از اشتباه در شمارش، بهتر است ابتدا داده‌ها را ***از کوچک به بزرگ*** کنار هم قرار دهیم:

x_i : ۲,۳,۵,۹,۹,۱۰,۱۴ مرتب شده

۹ = مد

با توجه به داده‌های مرتب شده فوق، در این سؤال مد داده‌ها برابر ۹ است، زیرا همه داده‌ها یک بار تکرار شده‌اند، اما عدد ۹ بیشتر از بقیه (۲ بار) تکرار شده است.

توجه: همون‌طور که می‌بینین مُد (در صورت وجود)، ***حتماً یکی از مشاهدات است.***

محاسبهٔ مد برای داده‌های نوع دوم (حجم زیاد، تنوع کم):

مد (نما) مربوط به مشاهدات جدول زیر کدام است؟

x_i	-۱	۰	۱	۲	
F_i	۳۰	۴۰	۲۰	۱۰	$N=\sum F_i=۱۰۰$
f_i	۰/۳	۰/۴	۰/۲	۰/۱	$\sum f_i=۱$

۱) ۱- ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

آمار و احتمال، آموزشگاه پارسه، محسن طورانی،ص ۲۲

محاسبهٔ مد برای داده‌های نوع دوم (حجم زیاد، تنوع کم):

x_i	-۱	۰	۱	۲	
F_i	۳۰	۴۰	۲۰	۱۰	$N=\sum F_i=۱۰۰$
f_i	۰/۳	۰/۴	۰/۲	۰/۱	$\sum f_i=۱$

پاسخ: گزینه ۲ صحیح است: $Mo=۰$

زیرا در این جدول، دادهٔ $x_i=۰$ بیشترین فراوانی مطلق ($F_i=۴۰$) را دارد و در نتیجه بیشترین فراوانی نسبی (f_i) را در بین داده‌ها دارد.

توجه: در این مثال نیز $Mo=۰$، در بین مشاهدات وجود دارد.

نتیجهٔ مهم: از این مثال نتیجه می‌گیریم که داده‌ای که بیشترین تکرار را داشته باشه، مطمئناً بیشترین فراوانی **مطلق** (F_i) و در نتیجه بیشترین فراوانی **نسبی** (f_i) را خواهد داشت.

«محاسبه مد در مقیاس‌های مختلف»

۱) *شاخص مرکزی مد (نما) برای کدام یک از مقیاسها قابل محاسبه است؟*

۱) اسمی ۲) اسمی و ترتیبی
۳) فاصله‌ای و نسبی ۴) اسمی، ترتیبی، فاصله‌ای و نسبی

---

۲) *برای متغیرهایی با مقیاس* **کیفی اسمی**، *کدام یک از شاخص‌های مرکزی را می‌توان محاسبه نمود؟*

۱) مد و میانه ۲) میانه و میانگین
۳) فقط مد را می‌توان محاسبه کرد. ۴) هیچکدام

آمار و احتمال، آموزشگاه پارسه، محسن طورانی، ص ۲۲

«محاسبه مد در مقیاس‌های مختلف»

دو مثالی که در فیشـــهای قبل حل کردیم، محاســـبه مد را برای داده‌های **کمّی** نشـــان می‌دادند، ولی باید توجه داشـــت که مد را می‌تونیم برای داده‌هایی با مقیاس **کیفی** (*اسمی و ترتیبی*) هم حساب کرد.

مثال زیر محاسبه مد را برای یک متغیر **کیفی اسمی** (گروه خونی) نشان می‌دهد:

مثال ۱(مقیاس کیفی اسمی): *توزیع فراوانی گروه خونی ۳۵ نفر بصورت زیر است. مد یا نما را مشخص کنید:*

گروه خونی	A	B	O	AB	
فراوانی	۵	۷	۱۳	۱۰	$N = ۳۵$

۱) A ۲) B ۳) O ۴) AB

پاسخ: گزینه ۳ صحیح است: ($Mo = O$) ، زیرا گروه خونی «O» **بیشترین فراوانی** را دارد.

اکنون به ذکر مثالی برای محاسبه مد برای یک متغیر **کیفی ترتیبی** (مثل مدرک تحصیلی) می‌پردازیم:

(ادامه تو فیش بعد)

مثال۲(مقیاس کیفی ترتیبی): مد یا نما را برای جدول فراوانی زیر مشخص کنید:

مدرک تحصیلی	دیپلم	لیسانس	فوق لیسانس	دکترا	
فراوانی نسبی	۰/۲	۰/۴	۰/۳	۰/۱	$\sum f_i = ۱$

۱) دیپلم ۲) لیسانس ۳) فوق لیسانس ۴) لیسانس و فوق لیسانس

پاسخ: ***گزینه ۲:*** (لیسانس = Mo)، زیرا افراد دارای مدرک لیسانس ***بیشترین فراوانی نسبی*** (f_i) را دارند.

نتیجه مهم: شاخص مرکزی مد (نما) را می‌توان برای **همهٔ** مقیاس‌ها (***اسمی، ترتیبی، فاصله‌ای و نسبی***) محاسبه نمود (پاسخ سؤال ۱).

نکته: **پاسخ سؤال ۲)**

مُد (نما) تنها شاخص مرکزی است که می‌توان آن را برای داده‌هایی با مقیاس کیفی اسمی حساب کرد.

زیرا همان طور که بعداً خواهیم گفت برای متغیرهای کیفی اسمی ***نمی‌توان*** سایر شاخصهای مرکزی مثل میانه و میانگین را محاسبه نمود.

دانستنی‌های مفید:

برای جلوگیری از یخ زدگی پا در حین انجام فعالیت ورزشی در هوای سرد، از پوشیدن کفش‌های تنگ بپرهیزید.

زیرا کفش تنگ، یکی از عوامل اصلی یخ زدگی پاها است.

(مهم)

با توجه به جدول توزیع فراوانی زیر، مشخص کنید مُد این ۱۰۰ داده کدام است؟

x_i	-۱	۰	۱	۲
F_i	۱۰	۵۰	۹۰	۱۰۰

۱) ۲

۲) ۱۰۰

۳) ۰ و ۱

۴) ۱ و ۲

تست تألیفی

گزینه ۳) با توجه به اینکه فراوانی آخرین طبقه $(x_i = ۲)$ برابر $N = ۱۰۰$ است، پس می‌توان نتیجه گرفت که این جدول، **فراوانی تجمعی** را نشان می‌دهد و نه فراوانی مطلق یا نسبی را.

بنابراین چون مد، داده‌ای است که بیشترین فراوانی مطلق یا نسبی را دارد، پس برای تعیین مد، اول باید فراوانی **مطلق** داده‌ها را بدست آوریم.

نکته: فراوانی مطلق هر طبقه از تفاضل فراوانی تجمعی آن طبقه از فراوانی تجمعی طبقه قبل بدست می‌آید:

$$F_i = F_{c_i} - F_{c_i - ۱}$$

x_i	-۱	۰	۱	۲
فراوانی تجمعی F_{c_i}	۱۰	۵۰	۹۰	N=۱۰۰
فراوانی مطلق F_i	۱۰	50-10=40	۹۰-50=40	100-90=10

بنابراین مشاهده می‌شود که ۱ و ۰=Mo است، یعنی جامعه ما دو مدی است، زیرا مشاهدات ۰ و ۱ بیشتر از سایر مشاهدات تکرار شده‌اند(۴۰ بار).

نکته مهم: باید توجه داشت که مد، **همیشه از بین x_iها** انتخاب می‌شود **و نه از بین F_iها یا f_iها**. یعنی مد، یک مشاهده (x_i) است نه یک فراوانی (F_i یا f_i).

(برنامه‌ریزی شهری (۸)

برای داده‌های زیر:

x	۲	۳	۴	۵	۶
f	۳	۴	۸	۷	۵

مقدار نما کدام است؟

۱) ۳

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۸

گزینه ۲) زیرا $x_i = ۴$ دارای بیشترین فراوانی است $(f_i = ۸)$

x	۲	۳	۴	۵	۶
f	۳	۴	۸	۷	۵

توجه: منظور طراح سؤال از f، در واقع همان فراوانی **مطلق** (F) است. زیرا همان طور که قبلاً گفته‌ایم، در بعضی کتاب‌ها، فراوانی مطلق را با f و فراوانی تجمعی را با F نمایش می‌دهند، که البته تشخیص آنها به سادگی از روی اعداد جدول امکان‌پذیر است، زیرا همان طور که می‌دانیم:

۱) فراوانی **مطلق** همواره عددی ***صحیح و بزرگتر مساوی یک*** است:

$F_i \geq ۱$

۲) فراوانی **نسبی** همواره عددی اعشاری (کسری) و ***بین صفر و یک*** است:

$۰ < f_i < ۱$

۳) فراوانی **تجمعی** نیز همواره حالت ***صعودی (افزایشی)*** دارد، یعنی اعداد جدول، از چپ به راست افزایش می‌یابند تا جایی که فراوانی تجمعی طبقه آخر برابر N = تعداد داده‌ها می‌شود.

نکته: گزینه ۴ غلط است، زیرا یک فراوانی رو نشون میده (فراوانیِ x=۴) و نه یه x رو، در حالیکه می‌دانیم مد، **یک داده** (یعنی x_i) است که بیشترین فراوانی را دارد و **نه یک فراوانی** (F_i یا f_i).

(مهم):

ویژگی‌های مُد (نما):

ابتدا شاخص مرکزی مُد را برای مثال زیر بدست آورید.

ثانیاً بیان کنید که این مثال، کدام ویژگی شاخص مد را نشان می‌دهد؟

مثال: *مد (نما) مربوط به مشاهدات*

۷ و ۲ و ۹ و ۲ و ۷ و ۲ و ۴ و ۳ و ۷ و ۳ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۷ ۳) ۲ و ۷ ۴) وجود ندارد.

آمار و احتمال، آموزشگاه پارسه، محسن طورانی،ص ۲۲ و ۲۳

آمار و کاربرد آن در مدیریت ۱، مسعود نیکوکار،ص ۹۱

پاسخ مثال) گزینه «۳»

نکته ۱: شاخص مرکزی مُد (نما) ***لزوماً منحصر بفرد نیست***، یعنی ممکن است بیش از ۱ مُد داشته باشیم.
یعنی اگر دو یا چند داده (**نه همه داده‌ها**) بیشترین تکرار را داشته باشند، اون‌وقت **همه** آن داده‌ها را به عنوان مد مشاهدات در نظر می‌گیریم.

در این مثال، مشاهداتِ $x_i = ۲,۷$، بیشترین تکـرار را نسبت به بقیه داده‌ها دارند (۳ بار)، پس این توزیع **دو مُد** دارد:

$$x_i : ۳,۷,۳,۴,۲,۷,۲,۹,۲,۷ \Rightarrow \boxed{Mo = ۲,۷}$$

توجه: اگر دو یا چند مد داشته باشیم توزیع را **دو مُدی (دو نمایی) یا چند مُدی (چند نمایی)** می‌گوییم و در این صورت شاخص مد، دیگر نقطه تمرکز داده‌ها نیست.

(مهم):

ویژگی‌های مُد (نما):

ابتدا شاخص مرکزی مُد را برای مثال زیر بدست آورید.

ثانیاً بیان کنید که این مثال، کدام ویژگی شاخص مد را نشان می‌دهد؟

مثال : *مُد (نما) مربوط به مشاهدات*

۷ و ۲ و ۲ و ۴ و ۷ و ۲ و ۴ و ۷ و ۴ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) وجود ندارد

آمار و احتمال، آموزشگاه پارسه، محسن طورانی، ص ۲۲ و ۲۳

پاسخ مثال) گزینه ۴

نکته: اگر **تمامی** داده‌ها (x_i ها) به یک اندازه تکرار شده باشند (یعنی **فراوانی مطلق یا نسبی یکسانی** داشته باشند)، آنگاه جامعه **مد (Mo) نخواهد داشت.**

یعنی در این حالت، **مد جامعه تهی** است که آن را به صورت زیر نشان می‌دهیم: $Mo = \{\ \}$ یا $Mo = \{\phi\}$

در این مثال، تمام، داده‌ها (۲، ٤ و ۷) ***به یک اندازه تکرار شده‌اند*** *(۳ بار)، یعنی* ***فراوانی مطلق و نسبی یکسانی*** *دارند، بنابراین این مشاهدات* ***مد ندارند*** *(مد این مشاهدات تهی است):* $Mo = \{\ \}$ یا $Mo = \{\phi\}$

$x_i = ۴,۷,۴,۲,۷,۴,۲,۲,۷$

(مهم):

ویژگی‌های مُد (نما):

ابتدا شاخص مرکزی مُد را برای مثال زیر بدست آورید.

ثانیاً بیان کنید که این مثال، کدام ویژگی شاخص مد را نشان می‌دهد؟

مثال: *اگر مشاهدات ما ٦ و ٥ و ٥ و ٢ و ١ باشند آنگاه مد مشاهدات* $(-\frac{۱}{۲}x_i + ۳)$ *کدام است؟*

۱) ۵ ۲) $-\frac{۵}{۲}$ ۳) ۸ ۴) $\frac{۱}{۲}$

آمار و احتمال، آموزشگاه پارسه، محسن طورانی، ص ۲۲ و ۲۳

گزینه ۳) با توجه به اینکه فراوانی آخرین طبقه $(x_i = ۲)$ برابر $N = ۱۰۰$ است، پس می‌توان نتیجه گرفت که این جدول، **فراوانی تجمعی** را نشان می‌دهد و نه فراوانی مطلق یا نسبی را.

بنابراین چون مد، داده‌ای است که بیشترین فراوانی مطلق یا نسبی را دارد، پس برای تعیین مد، اول باید فراوانی **مطلق** داده‌ها را بدست آوریم.

نکته: فراوانی مطلق هر طبقه از تفاضل فراوانی تجمعی آن طبقه از فراوانی تجمعی طبقه قبل بدست می‌آید:

$$F_i = F_{c_i} - F_{c_{i-۱}}$$

x_i	-۱	۰	۱	۲
فراوانی تجمعی F_{c_i}	۱۰	۵۰	۹۰	N=۱۰۰
فراوانی مطلق F_i	۱۰	50-10=40	۹۰-50=40	100-90=10

بنابراین مشاهده می‌شود که ۱ و ۰=Mo است، یعنی جامعه ما دو مدی است، زیرا مشاهدات ۰ و ۱ بیشتر از سایر مشاهدات تکرار شده‌اند(۴۰ بار).

نکته مهم: باید توجه داشت که مد، **همیشه از بین x_iها** انتخاب می‌شود **و نه از بین F_iها یا f_iها**. یعنی مد، یک مشاهده (x_i) است نه یک فراوانی (F_i یا f_i).

(مهم):

اگر کل داده‌ها بر ۲- تقسیم شوند، مد جامعه چه تغییری خواهد کرد؟

۱) ۲برابر می‌شود.

۲) تغییری نمی‌کند.

۳) نصف می‌شود.

۴) $-\frac{۱}{۲}$ برابر می‌شود.

توجه: پس از پاسخگویی به این سؤال، حتماً به نکته‌ای که در پاسخ سؤال آمده ، دقت کنید.

آمار و احتمال، آموزشگاه پارسه، محسن طورانی، ص ۲۳

گزینه ۴) اگر کل داده‌ها بر عددی تقسیم شوند، مد این داده‌ها هم بر همین عدد تقسیم می‌شود:

$$\begin{cases} x_i : x_1, x_2, \ldots, x_n \Rightarrow y_i = -\frac{1}{2} x_i \\ \Downarrow \\ Mo = Mo_{x_i} \qquad \boxed{Mo_y = -\frac{1}{2} Mo_x} \end{cases}$$

توجه: اگر در صورت سؤال گفته می‌شد، تنها **برخی** از داده‌ها بر ۲- تقسیم شوند، آنگاه دیگر **نمی‌توانستیم** با قاطعیت بگوئیم که مد بر ۲- تقسیم می‌شود.

مثلاً اگر مشاهدات ما به صورت ۷ و ۶ و ۶ و ۴ و ۲ و ۱ باشند، آنگاه:

۱) اگر **تنها دو دادهٔ** $x_i = ۲,۴$، نصف شوند، مد مشاهدات تغییری نخواهد کرد و هم چنان $Mo = 6$ خواهد بود.

۲) اما اگر **فقط مُد** (یعنی دو دادهٔ $x_i = ۶,۶$) را نصف کنیم، آنگاه اگرچه تمام مشاهدات تغییر نکرده‌اند، ولی چون مُد تغییر کرده، پس مد مشاهدات جدید (یعنی مُد داده‌های: ۷ و ۳ و ۳ و ۴ و ۲ و ۱) هم تغییر می‌کند، یعنی در این حالت مد نیز نصف می‌شود:

$$Mo_{y_i} = \frac{1}{2} Mo_x \Rightarrow \frac{1}{2}(6) = \frac{6}{2} = 3$$

نتیجه: تغییر مد، به این امر بستگی دارد که کدام داده تغییر کرده.

مهم:

خاصیت مهم مُد (نما):

*از آنجا که مد، مشاهده‌ای است با بیشترین فراوانی، پس هنگامی که از مد به عنوان نماینده و تخمین مقدار عددی تک تک مشاهدات آماری استفاده می‌کنیم، آنگاه ..... **حداقل** می‌شود.*

آمار و احتمال، آموزشگاه پارسه، محسن طورانی،ص ۲۲ و ۲۳

جواب: تعداد تخمین‌های اشتباه (تعداد خطاها در تخمین : N_e)

توضیح: از آنجا که مُد مشاهده‌ای است که بیشترین فراوانی را دارد، پس اگر از **مد** به عنوان نماینده (برای تخمین مقدار عددی تک تک مشاهدات) استفاده کنیم، آنگاه ***تعداد تخمین‌های اشتباه (تعداد خطاها در تخمین: N_e) حداقل خواهد بود.***

به عبارت دیگر اگر تعداد تخمین‌های اشتباه را با N_e نشان دهیم، به ازای استفاده از **مد بجای تک تک داده‌ها،** $N_e = \min$ خواهد شد.

مثال: داده‌های مقابل را در نظر بگیرید: ۵ و ۹ و ۹ و ۹ و ۹ و ۲ و ۲

در این داده‌ها مد مساوی $Mo = ۹$ است.

۱) اگر بجای تمام داده‌ها مقدار ۲ را قرار دهیم، اون وقت در تخمین ۵ داده (۵ و ۹ و ۹ و ۹ و ۹) اشتباه کرده‌ایم (زیرا تنها دو دادهٔ ۲ و ۲ را درست تخمین زده‌ایم).

۲) و اگر بجای تمام داده‌ها مقدار ۹ (مد مشاهدات) را قرار دهیم، اون وقت فقط در تخمین ۳ داده (۵ و ۲ و ۲) اشتباه می‌کنیم.

۳) و اگر بجای تمام داده‌ها مقدار ۵ را قرار دهیم، اون وقت در تخمین ٦ داده (۹ و ۹ و ۹ و ۹ و ۲ و ۲) اشتباه می‌کنیم.

نتیجه مهم: با قرار دادن مُد (۹) به جای سایر داده‌ها، **تعداد تخمین‌های اشتباه، حداقل می‌شود.**

$$Mo=۹ \longrightarrow N_e = \min$$

تعداد تخمین‌های اشتباه **حداقل**

«محاسبه مد در داده‌های نوع سوم (حجم زیاد و تنوع زیاد)»

مثال ((طبقات پیوسته):

مد در داده‌های جدول زیر کدام است؟

حدود طبقات	۲ -۴	۴ –۶	۶ –۸	۸ –۱۰
فراوانی	۱۰	۱۴	۸	۳

۱) ۵/۵ ۲) ۴/۸ ۳) ۴ ۴) ۵/۲

آمار و احتمال، آموزشگاه پارسه، محسن طورانی، ص ۲٤

محاسبه مد در داده‌های نوع سوم (حجم زیاد و تنوع زیاد):

در فیشهای قبل با نحـــوهٔ محاســبه مد در داده‌های نوع **اول** (حجـم کم) و نوع **دوم** (حجم زیاد و تنوع کم) آشنا شدیم و اکنون قصد داریم به محاسبه مد در داده‌های نوع **سوم** (حجم زیاد، تنوع زیاد) بپردازیم:

مراحل محاسبه مد در داده‌های نوع سوم:

الف- انتخاب **طبقه مد دار** (طبقه‌ای که بیشترین فراوانی مطلق (F_i) یا فراوانی نسبی (f_i) را دارد).

ب- یافتن حدود **واقعـی** مـد دار (**پیوسـته** کـردن طبقـه مـد دار در صورت گسسته بودن)

ج- محاسبه مد از رابطهٔ زیر:

طول یا فاصله طبقه $\times \dfrac{d_1}{d_1+d_2} +$ **حد پایین واقعی طبقه مد دار = Mo**

$$\Rightarrow \boxed{Mo = L_{Mo} + \frac{d_1}{d_1+d_2} \times I}$$

که در رابطه بالا:

(ادامه تو فیش بعد)

L_{Mo} : حد پایین **واقعی** طبقه مدار

$d_۱$: تفاضل فراوانی طبقه مد دار از فراوانی طبقه **قبل**:

$\boxed{d_۱ = f_i - f_{i-۱}}$ یا $\boxed{d_۱ = F_i - F_{i-۱}}$

$d_۲$: تفاضل فراوانی طبقه مد دار از فراوانی طبقه **بعد**:

$\boxed{d_۲ = f_i - f_{i+۱}}$ یا $\boxed{d_۲ = F_i - F_{i+۱}}$

I: فاصله طبقات که همیشه با طول طبقات برابره.

اکنون با ذکر ۲ مثال، مراحل فوق را گام به گام انجام می‌دهیم.

مثال اول بیانگر زمانی است که طبقات جدول **پیوسته** هستند و بنابراین دیگر **لازم نیست** طبقه مد دار را پیوسته کنیم.

در مثال دوم، طبقات جدول **گسسته** هستند، بنابراین ابتدا بایستی **طبقه مد دار** را پیوسته کنیم:

مثال ۱: (طبقات پیوسته):

مد در داده‌های جدول زیر کدام است؟

حدود طبقات	۲ − ۴	۴ − ۶ (طبقه مد دار)	۶ − ۸	۸ − ۱۰
فراوانی	۱۰ ($d_۱$=۴)	$\boxed{۱۴}$	۸ ($d_۲$=۶)	۳

۱) ۵/۵ ۲) ۴/۸ ۳) ۴ ۴) ۵/۲

(ادامه تو پشت فیش)

پاسخ: گزینه ۲. مراحل کار به صورت زیر است:

الف) طبقه (۶ – ۴) طبقه مد دار است، زیرا **بیشترین فراوانی** را دارد (۱۴). با توجه به طبقه مد دار می‌تونیم بگیم که مد عددی بین ۴ تا ۶ است.

ب) با توجه به اینکه طبقات **پیوسته** هستند، نیازی به پیوسته کردن آنها **نیست**.

ج) محاسبه مد از رابطه زیر:

$$\boxed{Mo = L_{Mo} + \frac{d_۱}{d_۱ + d_۲} \times I} \Rightarrow Mo = ۴ + \frac{(۱۴-۱۰)}{(۱۴-۱۰)+(۱۴-۸)} \times ۲$$

$$\Rightarrow Mo = ۴ + (\frac{۴}{۴+۶}) \times ۲ \quad \Rightarrow \quad ۴ + (\frac{۴}{۱۰}) \times ۲ \quad \Rightarrow \quad ۴ + \frac{۸}{۱۰}$$

$$\Rightarrow Mo = ۴ + ۰/۸ \quad \Rightarrow \quad \boxed{Mo = ۴/۸}$$

توجه: همواره برای اطمینان از صحت محاسباتمان، باید به این نکته توجه داشته باشیم که مقدار مدی که از فرمول فوق بدست می‌آوریم، **باید حتماً بین حد پایین و بالای طبقه مد دار قرار داشته باشد**.

در مثال فوق نیز مُد (یعنی ۴/۸) بین حد پایین طبقه مد دار (یعنی ۴) و حد بالای این طبقه (یعنی ۶) قرار داره: $\boxed{۴ < Mo = ۴/۸ < ۶}$

«محاسبه مد در داده‌های نوع سوم (حجم زیاد و تنوع زیاد)»

مثال ۲ (طبقات گسسته):

مد داده‌های جدول زیر کدام است؟

حدود طبقات	۲ -۴	۵ –۷	۸ –۱۰	۱۱ –۱۳
فراوانی	۱۰	۱۴	۸	۳

۱) ۵/۲ ۲) ۵/۷ ۳) ۴/۵ ۴) ۶/۵

آمار و احتمال، آموزشگاه پارسه، محسن طورانی،ص ۲٤

حدود طبقات	۲ — ۴	۵ — ۷ (طبقه مد دار)	۸ — ۱۰	۱۱ — ۱۳
فراوانی	۱۰	$\boxed{۱۴}$	۸	۳

$d_۱=۴$ $d_۲=۶$

۱) ۵/۲ ۲) ۵/۷ ۳) ۴/۵ ۴) ۶/۵

پاسخ: **گزینه ۲**. مراحل محاسبه مد بصورت زیر است:

الف) *طبقه (۷ — ۵) طبقه مد دار است، زیرا* **بیشترین فراوانی** *(۱۴) را دارد.*

ب) *به علت* **گسسته** *بودن طبقات، بایستی حدود واقعی طبقه مد دار را بدست آوریم.*

برای این منظور بایستی نصف فاصله حد بالای طبقه مد دار از حد پایین طبقه بعدیش را بدست آورده و یا نصف فاصله حد پایین طبقه مد دار از حد بالای طبقه قبلیش را بدست بیاریم و سپس این مقدار را به حد بالای طبقه مد دار اضافه و از حد پایینش کم کنیم:

(ادامه تو فیش بعد)

نصف این فاصله $\frac{۱}{۲}$ نصف این فاصله

C - L	۲ — ۴	۵ — ۷	۸ — ۱۰	۱۱ — ۱۳
F_i	۱۰	۱۴	۸	۳

فاصله = ۱ فاصله = ۱

پس بـایـد عـدد $\frac{۱}{۲}=۰/۵$ رو از حـد پـایین طبقـه مـد دار کم کنیم $(۵-۰/۵=۴/۵)$ و بـه حـد بـالای طبقـه مـد دار اضـــافـه کنیم $(۷+۰/۵=۷/۵)$ تا با این کار، اون فاصـــلهٔ یک واحدی که بین طبقات وجود داره، از بین بره و در نتیجه طبقات ما از حالت گسـسـته (جدا از هم) به حالت پیوسته (چسبیده بهم) در بیان، تا بعدش بتونیم مُد رو از طریق فرمولش حساب کنیم.

پس حدود **واقعی** طبقه مد دار برابره با: $\boxed{(۴/۵,۷/۵)}$

در نتیجه جدول **پیوسته** ما بصورت زیر درمیاد:

C - L	۱/۵-۴/۵	۴/۵-۷/۵ (طبقه مد دار)	۷/۵-۱۰/۵	۱۰/۵-۱۳/۵
F_i	۱۰	۱۴	۸	۳

$d_۱=۴$ $d_۲=۶$

(ادامه تو پشت فیش)

ج) محاسبه مقدار مد از رابطه زیر:

$$\boxed{Mo = L_{Mo} + \frac{d_۱}{d_۱ + d_۲} \times I} \Rightarrow ۴/۵ + \frac{(۱۴-۱۰)}{(۱۴-۱۰)+(۱۴-۸)} \times ۳$$

$$\Rightarrow ۴/۵ + \frac{۴}{۴+۶} \times ۳ \Rightarrow ۴/۵ + \frac{۴}{۱۰} \times ۳ \Rightarrow ۴/۵ + \frac{۱۲}{۱۰} \Rightarrow$$

$$۴/۵ + ۱/۲ \Rightarrow \boxed{Mo = ۵/۷}$$

توجه: طول طبقات که با **فاصله** طبقات برابره، بصورت زیر بدست میاد:

$\Longrightarrow$ تفاضل حد بالای دو طبقه متوالی = تفاضل حد پایین دو طبقه متوالی= I

فاصله (طول) طبقات:

$$I = L_۲ - L_۱ = U_۲ - U_۱ \Rightarrow$$

$$I = ۵ - ۲ = ۷ - ۴ \Rightarrow \boxed{I = ۳}$$

چند نکتهٔ خفن، ظریف و باحال دربارهٔ مد:

نکته ۱) قبلاً در مورد محاسبه مد برای داده‌های نوع اول و دوم، گفتیم که مد حتماً در بین داده ها قرار دارد، اما برای داده های نوع سوم که بصورت **فاصله‌ای** (یعنی بصورت C-L) طبقه‌بندی می شوند، ممکن است مد، اصلاً در بین مشاهدات ما وجود نداشته باشد.

مثلاً در مثال ۱ (در سوال دو- سه فیش قبلی) ممکن است واقعاً دادهٔ $Mo = ۴/۸$ در بین داده‌ها نباشد و یا در مثال ۲ ممکن است لزوماً دادهٔ $Mo = ۵/۷$ در بین داده‌ها نباشد، **(ادامه تو فیش بعد)**

به همین دلیل اســت که در برخی منابع، فرمول مد را بصــورت **تقریبی** (یعنی با نماد $\approx$ به معنای **تقریباً مساوی است با**) نشان می‌دهند:

$$Mo \approx L_{Mo} + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times I$$

نکته ۲) روش معمولی (کم دقت) برای محاسبه مد در داده‌های نوع سوم که بصورت **فاصله‌ای** طبقه‌بندی شده‌اند، این است که **مرکز طبقه مد دار** را به عنوان مد بپذیریم، یعنی مثلاً در مثال ۲، مد از روش معمولی (کم دقت) برابر است با:

$$Mo = \frac{5+7}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

اما روش **دقیقتر** استفاده از فرمول زیر است:

$$Mo = L_{Mo} + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times I$$

در واقع این روش سعی شده تا مد توزیع، بجای آنکه دقیقاً در مرکز طبقه مد دار (یعنی در وسط طبقهٔ ۷ – ۵ که برابر ۶ است) واقع شود ، **به سمت کرانه‌ای که همسایه آن فراوانی بیشتری دارد، متمایل‌تر (نزدیک‌تر) باشد.**

در مثال ۲ نیز همسایه کران ۷ دارای فراوانی ۸ و همسایه کران ۵ دارای فراوانی ۱۰ است، بنابراین مد، به کرانه ۴ که فراوانی بیشتری دارد، متمایل‌تر و نزدیک‌تر است (تا به کرانه ۸ که فراوانی کمتری دارد). **(ادامه تو پشت فیش)**

اما اینکه این تمایل به چه اندازه باشد به نسبت $d_۱$ و $d_۲$ در فرمول مد بستگی دارد.

نکته ۳) اگر **طبقه اول** جدول، طبقه مد دار باشد، آنگاه:

فراوانی طبقه مد دار $= F_۱ = d_۱ =$ تفاضل فراوانی طبقه مد دار از فراوانی طبقه **قبل**

زیرا در این حالت، قبل از طبقه اول، دیگر طبقه‌ای وجود ندارد که فراوانی‌ای داشته باشد، بنابراین می‌تونیم فراوانی طبقه ماقبل اول رو صفر در نظر بگیریم و در نتیجه بنویسیم:

$$d_۱ = F_{\text{اول}} - F_{\text{ماقبل اول}} \Rightarrow d_۱ = F_۱ - ۰ \Rightarrow \boxed{d_۱ = F_۱}$$

برای درک بهتر این موضوع به مثال زیر توجه کنین:

مثال (برای حالتی که طبقه مد دار، طبقه اول باشه):

C –L	طبقه مد دار ۲ – ۴	۴ – ۶	۶ – ۸
F_i	۱۰	۵	۴

$d_۲=۵$

$d_۱=۱۰$

پس مد برابره با:

(ادامه تو فیش بعد)

$$\boxed{Mo = L_{Mo} + \frac{d_۱}{d_۱ + d_۲} \times I} \Rightarrow Mo = ۲ + \frac{۱۰}{۱۰+۵} \times ۲ \Rightarrow$$

$$۲ + \frac{۱۰ \times ۲}{۱۵} \Rightarrow Mo = ۲ + \frac{۲۰}{۱۵} \Rightarrow ۲ + \frac{۴}{۳} \Rightarrow ۲ + ۱/۳۳$$

$$\Rightarrow \boxed{Mo = ۳/۳۳}$$

توجه کنین که: در مثال بالا، چون **طبقه اول**، طبقه مد دار بود، پس $d_۱$ با $F_۱$ مساوی شد، یعنی:

$$d_۱ = F_۱ - F_{\text{ماقبل اول}} \Rightarrow d_۱ = ۱۰ - ۰ = ۱۰ \Rightarrow \boxed{d_۱ = F_۱ = ۱۰}$$

و اگر **طبقه آخر**، طبقه مد دار باشد، آنگاه:

فراوانی طبقه مد دار : $F_{\text{آخر}} = d_۲ =$ تفاضل فراوانی طبقه مد دار از فراوانی طبقه **بعد**

زیرا در این وضعیت، بعد از طبقه آخر، دیگر طبقه‌ای وجود ندارد، در واقع فراوانی طبقات بعدی صفر است:

$$d_۲ = F_{\text{آخر}} - F_{\text{بعدی}} \Rightarrow d_۲ = F_{\text{آخر}} - ۰ \Rightarrow d_۲ = F_{\text{آخر}}$$

(ادامه تو پشت فیش)

مثال (برای حالتی که طبقه مد دار، طبقه آخر باشه):

C - L	2 − 4	4 − 6	$\overbrace{6-8}^{\text{طبقه مد دار}}$
F_i	۴	۵	۱۰

$d_۱=۵$ $d_۲=۱۰$

$$Mo = ۶ + \frac{۵}{۵+۱۰} \times ۲ \Rightarrow ۶ + \frac{۵ \times ۲}{۱۵} \Rightarrow ۶ + \frac{۱۰}{۱۵}$$

$$\Rightarrow Mo = ۶ + \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۶ + ۰/۶۶ \Rightarrow \boxed{Mo = ۶/۶۶}$$

توجه کنین که: تو مثال بالا $d_۲$ با $F_{\text{آخر}}$ برابر شد:

$$d_۲ = F_{\text{آخر}} - F_{\text{بعدی}} \Rightarrow d_۲ = ۱۰ - ۰ = ۱۰ \Rightarrow \boxed{d_۲ = F_{\text{آخر}} = 10}$$

(مهم):

(مدیریت ۷۶)

داده‌های طبقه‌بندی شده زیر را در نظر بگیرید. مقدار مد را محاسبه کنید.

فاصله طبقات CL	-۱۰-۰	۰-۱۰	۱۰-۲۰
فراوانی F_i	۳۰	۲۰	۲۰

۱) -۱۰

۲) ۲/۵

۳) -۲/۵

۴) ۰

گزینه ۳)

گام ۱) مشخص کردن طبقه مد دار:

C-L	۰ — ۱۰ (طبقه مد دار)	۱۰ — ۲۰ ($I=۱۰$)	۲۰ — ۳۰
F_i	$d_۱=۳۰$	$d_۲=۱۰$	۲۰

یادآوری: طبقه مـد دار، طبقه اوّله، پس $d_۱$ را مسـاوی $F_۱$ در نظـر می‌گیریم (یعنی: $d_۱ = F_۱ = ۳۰$)، چون فراوانی طبقه ماقبل اول، صفر در نظر گرفته میشه: $d_۱ = F_۱ - ۰ \Rightarrow d_۱ = ۳۰ - ۰ = ۳۰$

گام ۲) پیوسته کردن طبقات (در صورت نیاز): طبقات ما پیوسته هستن و حدود واقعی طبقه مد دار به صورت ۱۰,۰- است.

همچنین چون طبقات ما پیوسته هستن، پس فاصله طبقات (I) با عرض طبقات برابره، پس: $\boxed{I = ۱۰ - ۰ = ۱۰}$

گام ۳) محاسبه مُد:

$$\text{Mo} = \text{حد پایین } \textbf{واقعی} \text{ طبقه مد دار} + \frac{d_۱}{d_۱ + d_۲} \times \text{فاصله (طول) طبقه}$$

(ادامه تو فیش بعد)

$$Mo = -۱۰ + \frac{۳۰}{۳۰+۱۰} \times ۱۰ \Rightarrow Mo = -۱۰ + \frac{۳۰}{۴۰} \times ۱۰ \Rightarrow$$

$$Mo = -۱۰ + \frac{۳}{۴} \times ۱۰ \Rightarrow -۱۰ + \frac{۳۰}{۴} \Rightarrow -۱۰ + \frac{۱۵}{۲} \Rightarrow$$

$$Mo = -۱۰ + ۷/۵ \Rightarrow \boxed{Mo = -۲/۵}$$

روش تستی: همون طور که تو فیشای قبل یاد گرفتیم، روش معمولی و کم دقت برای محاسبه مد در جداول طبقه‌بندی شده (که به صورت (L-Uهستن) اینه که **مرکز طبقه مد دار** رو به عنوان مد مشاهدات در نظر بگیریم که تو این سؤال درواقع برابره با مرکز طبقه (۰-۱۰-) که ۵- است:

$$\boxed{\text{مرکز طبقه مد دار} : \frac{-۱۰+۰}{۲} = \frac{-۱۰}{۲} = -۵}$$

اما واقعیت اینه که مقدار واقعی و دقیق مد، دقیقاً در مرکز طبقه مد دار قرار نمی‌گیره، بلکه **به سمت طبقهٔ مجاوری که بیشترین فراوانی رو داره متمایل میشه.**

یعنی تو این سؤال، طبقات مجاور طبقه اول، یکی طبقه ماقبل اوله که مسلماً فراوانیش صفره و دیگری، طبقه دومه که فراوانیش ۲۰ است. پس مقدار غیردقیق مد که ۵- بود، باید به سمت طبقه دوم که فراوانی بیشتری نسبت به طبقه ماقبل اول داره، نزدیک بشه **(ادامه تو پشت فیش)**

و این یعنی اینکه مقدار مد باید کمی از ۵- بزرگتر باشه که چنین وضعیتی فقط تو گزینه ۳ $(Mo = -۲/۵)$ دیده میشه.

نکته تستی : گزینه‌های ۲ و ۴ از همون اول و بدون هیچ محاسبه‌ای قابل حذف بودن، چون ما می‌دونیم که مقدار مد، همیشه باید بین حد پایین و بالای طبقه مد دار باشه،

یعنی تو این سؤال، مد باید حتماً مقدارش بین ۱۰- و ۰ باشه $(-۱۰ < Mo < ۰)$ ولی اعداد ۲/۵ و ۰ در این فاصله قرار ندارن.

(GI S ۸۵)

در جدول داده‌های زیر، مُد جامعه کدام است؟

x_i	۱۲-۱۶	۱۶-۲۰	۲۰-۲۴	۲۴-۲۸	۲۸-۳۲
f_i	۵	۱۲	۱۸	۹	۶

۱) ۲۱/۳

۲) ۲۱/۶

۳) ۲۲/۱

۴) ۲۲/۴

گام ۱) مشخص کردن طبقه مد دار : طبقه سوم (۲۴-۲۰)، طبقه مد داره، چون **بیشترین فراوانی** رو داره: $F_i = ۱۸$

C-L	I=۴ ۱۲-۱۶	۱۶-۲۰	طبقه مد دار ۲۰-۲۴	۲۴-۲۸	۲۸-۳۲
F_i	۵	۱۲ $\xleftrightarrow{d_۱=۶}$	$\boxed{۱۸}$	$\xleftrightarrow{d_۲=۹}$ ۹	۶

گام ۲) پیوسته کردن طبقات *(در صورت نیاز)*:

طبقات ما پیوسته هستن، پس دیگه نیازی به این کار نیست. بنابراین حدود واقعی طبقه مد دار به صورت (۲۴-۲۰) خواهد بود.

دقت کنین که: چون طبقات ما **پیوسته** هستن، پس فاصله طبقات (I) با عرض طبقات برابره، پس: $\boxed{I = ۱۶ - ۱۲ = ۴}$

گام ۳) محاسبه مد:

فاصله (طول) طبقات $\times \dfrac{d_۱}{d_۱ + d_۲} +$ حد پایین **واقعی** طبقه مد دار = **مُد**

$$\boxed{Mo = L_{Mo} + \frac{d_۱}{d_۱ + d_۲} \times I}$$

$$\Rightarrow Mo = ۲۰ + \frac{(۱۸ - ۱۲)}{(۱۸ - ۱۲) + (۱۸ - ۹)} \times ۴ \Rightarrow$$

(ادامه تو فیش بعد)

$$\Rightarrow Mo = ۲۰ + \frac{۶}{۶+۹} \times ۴ \Rightarrow ۲۰ + \frac{۶}{۱۵} \times ۴ \Rightarrow$$

$$۲۰ + \frac{۲}{۵} \times ۴ \Rightarrow Mo = ۲۰ + \frac{۸}{۵} \xrightarrow{\frac{۸}{۵} = \frac{۱۶}{۱۰}}$$

$$Mo = ۲۰ + \frac{۱۶}{۱۰} \Rightarrow ۲۰ + ۱/۶ \Rightarrow \boxed{Mo = ۲۱/۶}$$

نکته تستی: مقدار مد از روش معمولی و کم دقت برابر با **مرکز طبقه مد داره**، یعنی:

$$\boxed{\textbf{مرکز طبقه مد دار} : \frac{۲۰+۲۴}{۲} = \frac{۴۴}{۲} = ۲۲}$$

اما مقدار دقیق‌تر مُد به سمت طبقهٔ **مجاوری** که **فراوانی بیشتری** داشته باشه، نزدیک میشه.

در این سؤال، طبقات مجاور طبقه مد دار، طبقات دوم و سوم هستن که طبقه دوم فراوانی بیشتری نسبت به طبقه سوم داره (۹<۱۲)، پس مقدار مد باید از ۲۲ به سمت طبقه دوم متمایل بشه، یعنی باید مقدارش یه خرده کمتر بشه؛ به عبارت بهتر، مقدار دقیق مد باید کمتر از مرکز طبقه مد دار (۲۲) باشه، یعنی $Mo < ۲۲$ *که این وضعیت فقط تو گزینه‌های ۱ و ۲ دیده میشه. بنابراین از همون اول می‌تونستیم گزینه‌های ۳ و ٤ رو خیلی سریع حذف کنیم:*

(ادامه تو پشت فیش)

CL	۱۲-۱۶	طبقه **مجاور** ۱۶-۲۰	طبقه مد دار ۲۰-۲۴	طبقه **مجاور** ۲۴-۲۸	۲۸-۳۲
F_i	۵	$\boxed{۱۲}$	۱۸	۹	۶

مقایسه فراوانی‌ها

۱۲ > ۹

⇓

پس مقدار دقیق مد باید از مرکز طبقه مد دار (۲۲) به سمت **مقادیر کمتر** (یعنی به سمت طبقه دوم) متمایل بشه؛ یعنی مد باید کمتر از ۲۲ باشه.

(حسابداری ۸۴)

در جدول داده‌های زیر اندازه مُد (Mo) کدام است؟

حدود دسته	۸-۱۱	۱۱-۱۴	۱۴-۱۷	۱۷-۲۰	۲۰-۲۳
فراوانی	۴	۱۰	۱۸	۱۲	۶

۱) ۱۵/۵

۲) ۱۵/۶

۳) ۱۵/۷

۴) ۱۵/۸

گام ۱) مشخص کردن طبقه مد دار : طبقه سوم(۱۴-۱۷) ، طبقه مد داره، چون **بیشترین فراوانی** رو داره (۱۸):

C-L	I=۳ ۸-۱۱	۱۱-۱۴	طبقه مد دار ۱۴-۱۷	۱۷-۲۰	۲۰-۲۳
F_i	۴	۱۰ $\xleftrightarrow{d_1=۸}$	$\boxed{۱۸}$	$\xleftrightarrow{d_2=۶}$ ۱۲	۶

گام ۲) پیوسته کردن طبقات (در صورت لزوم):

چون طبقات جدول ما، **پیوسته** هستن، پس دیگه نیازی به این کار نیست و در نتیجه حدود **واقعی** طبقه مد دار، همون (۱۷ و ۱۴) هستن.

توجه کنین که: چون طبقات ما پیوسته هستن، پس فاصله طبقات (I) با عرض طبقات برابر میشه، در نتیجه: $\boxed{I = ۱۱ - ۸ = ۳}$

گام ۳) محاسبه مد:

فاصله (طول) طبقات $\times \dfrac{d_1}{d_1 + d_2} +$ حد پایین **واقعی** طبقه مد دار = **مُد**

$$\boxed{Mo = L_{Mo} + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times I}$$

(ادامه تو فیش بعد)

$$\Rightarrow Mo = ۱۴ + \frac{(۱۸-۱۰)}{(۱۸-۱۰)+(۱۸-۱۲)} \times ۳$$

$$\Rightarrow Mo = ۱۴ + \frac{۸}{۸+۶} \times ۳ \Rightarrow$$

$$۱۴ + \frac{۸}{۱۴} \times ۳ \Rightarrow ۱۴ + \frac{۴}{۷} \times ۳$$

$$\Rightarrow Mo = ۱۴ + \frac{۱۲}{۷} \Rightarrow$$

$$۱۴ + ۱/۷۱ \Rightarrow \boxed{Mo = ۱۵/۷۱ \approx ۱۵/۷}$$

توجه: چون تمام گزینه‌ها تا یک رقم اعشار هستند، پس ما هم باید مقدار ۱۵/۷۱ را تا یک رقم اعشار گرد کنیم که میشه ۱۵/۷.

ایستگاه تغذیه و تناسب اندام:

بعد از شروع به خوردن غذا، حدوداً ۲۰ دقیقه زمان لازم است تا پیام سیری از معده به مغز منتقل شود.

پس آهسته و آرام غذا بخوریم و غذا خوردمان را طول بدهیم.

(مدیریت ۸۲)

در توزیع زیر مُد کدام است؟

C-L	۳-۵	۶-۸	۹-۱۱	**جمع**
F_i	۴	۲۰	۱۲	۳۶

۱) ۶/۳۳

۲) ۶/۵۳

۳) ۷/۵

۴) ۲۰

گام ۱) پیدا کردن طبقه مد دار:

CL	۳ − ۵	۶ − ۸ (طبقه مد دار)	۹ − ۱۱
F_i	۴	$\xleftrightarrow{d_1=۱۶}$ $\boxed{۲۰}$ $\xleftrightarrow{d_2=۸}$	۱۲

گام ۲) پیوسته کردن طبقه مد دار: برای این کار، کافیه که فاصله حد پایین طبقه مد دار (یعنی ۶) تا حد بالای این طبقه (یعنی ۵) رو نصف کنیم $\left(\frac{۶-۵}{۲}=\frac{۱}{۲}=۰/۵\right)$ و این ۰/۵ واحد رو از حد پایین طبقه مد دار کم و به حد بالای طبقه مد دار اضافه کنیم:

$$\begin{cases} \text{۶ :حد پائین} \\ \text{۸ :حد بالا} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \text{حد پایین واقعی: } ۶ - ۰/۵ = ۵/۵ \\ \text{حد بالای واقعی: } ۸ + ۰/۵ = ۸/۵ \end{cases}$$

پس:

(۸/۵ و ۵/۵) :حدود واقعی طبقه مد دار

حالا بعد از پیوسته کردن طبقه مد دار، می‌تونیم فاصله طبقات (I) رو هم خیلی راحت بدست بیاریم: $\boxed{I = ۸/۵ - ۵/۵ = ۳}$

(ادامه تو فیش بعد)

گام ۳) محاسبه مد:

$$\text{Mo} = \text{حد پایین واقعی طبقه مد دار} + \frac{d_۱}{d_۱ + d_۲} \times \text{فاصله (طول) طبقات}$$

بنابراین داریم:

$$\Rightarrow Mo = ۵/۵ + \frac{(۲۰-۴)}{(۲۰-۴)+(۲۰-۱۲)} \times ۳$$

$$\Rightarrow Mo = ۵/۵ + \frac{۱۶}{۱۶+۸} \times ۳ \Rightarrow$$

$$۵/۵ + \frac{۱۶ \times ۳}{۲۴} \Rightarrow ۵/۵ + \frac{۴۸}{۲۴}$$

$$\Rightarrow Mo = ۵/۵ + ۲ \Rightarrow \boxed{Mo = ۷/۵}$$

توجه: *گزینه ۴ غلط است، زیرا نشان دهندهٔ فراوانی طبقه مددار است، در حالیکه می‌دانیم، مد یک داده (x_i) است، نه یک فراوانی.*

(ادامه تو پشت فیش)

روش تستی (۵ ثانیه‌ای): مقدار غیردقیق مد برابره با:

$$\boxed{\text{مرکز طبقه مد دار}}: \frac{۶+۸}{۲} = \frac{۱۴}{۲} = ۷$$

CL	طبقه **مجاور**	طبقه مد دار	طبقه **مجاور**
	۳ — ۵	۶ — ۸	۹ — ۱۱
F_i	۴	۲۰	$\boxed{۱۲}$

مقایسه فراوانی‌ها

$۱۲ > ۴$

$\Downarrow$

پس مقدار مد باید از ۷ **به سمت مقادیر بیشتر** (یعنی به سمت طبقه سوم) متمایل و نزدیک بشه $Mo > ۷$ که چنین وضعیتی فقط تو گزینه ۳ دیده میشه: $Mo = ۷ / ۵ > ۷$:**گزینه ۳**

دقت کنین: *اینکه میگیم مقدار مد باید به سمت طبقه سوم نزدیک بشه و مد بزرگتر از ۷ باشه، این بزرگتر بودن باید به حدی باشه که مقدار مد در فاصله حد پایین و بالای طبقه مد دار (۸-۶) قرار داشته باشه. بنابراین یه وقت اشتباهاً نگین گزینه ٤ هم می‌تونه درست باشه، با این استدلال که مقدارش از ۷ بیشتره. چون در گزینه ٤، مقدار مد برابر ۲۰ است و این در حالیه که مقدار مد باید حتماً عددی بین ٦ و ۸ باشه، یعنی بین حد پایین و بالای طبقه مد دار (۸-٦).*

(مهم):

(حسابداری و مدیریت ۸۷)

در جدول توزیع فراوانی دسته‌بندی شده، اگر مد جامعه ۱۶ باشد، فراوانی مطلق دسته‌ی چهارم کدام است؟

حدود دسته	۹-۱۲	۱۲-۱۵	۱۵-۱۸	۱۸-۲۱
فراوانی مطلق	۸	۱۲	۱۵	a

۱) ۷

۲) ۹

۳) ۱۰

۴) ۱۱

جواب: گزینه «۲»

توضیح: چون تو صورت سؤال به ما مقدار مُد رو داده ($Mo = ۱۶$)، پس می‌تونیم از فرمول مد برای بدست آوردن فراوانی مطلق طبقه چهارم استفاده کنیم:

$$\boxed{Mo = L_{Mo} + \frac{d_۱}{d_۱ + d_۲} \times I}$$

خب، با توجه به جدول زیر می‌بینیم که ما مقدار L_{Mo}، $d_۱$ و $d_۲$ و I رو داریم: $\boxed{d_۲ = ۱۵ - a}$ و $\boxed{d_۱ = ۱۵ - ۱۲ = ۳}$

همچنین چون طبقات ما **پیوسته** است، پس می‌تونیم بگیم که:

اولاً: حد پایین **واقعی** طبقه مد دار، همون $L_{Mo} = ۱۵$ است که در جدول نوشته شده.

ثانیاً: با توجه به **پیوسته** بودن طبقات، فاصله طبقات (I) با عرض طبقات برابره، یعنی: $\boxed{I = ۱۸ - ۱۵ = ۳}$

CL	۹ − ۱۲	۱۲ − ۱۵	۱۵ − ۱۸ (طبقه مد دار)	۱۸ − ۲۱
F_i	۸	۱۲ $\xleftrightarrow{d_۱=۳}$	$\boxed{۱۵}$ $\xleftrightarrow{d_۲=۱۵-a}$	a

(ادامه تو فیش بعد)

توضیح:

چون مقدار مد $(Mo = ۱۶)$ در فاصـــله حد پایین و بالای طبقه **سـوم** (۱۸-۱۵) قرار داره، پس این طبقه (**طبقه سوم**)، طبقه مد داره.

پس:

$$\boxed{Mo = L_{Mo} + \frac{d_۱}{d_۱ + d_۲} \times I} \Rightarrow$$

$$۱۶ = ۱۵ + \frac{۳}{۳ + (۱۵ - a)} \times ۳ \Rightarrow$$

$$۱۶ = ۱۵ + \frac{۳ \times ۳}{۱۸ - a} \Rightarrow$$

$$۱۶ = ۱۵ + \frac{۹}{۱۸ - a} \Rightarrow$$

$$۱۶ - ۱۵ = \frac{۹}{۱۸ - a} \Rightarrow ۱ = \frac{۹}{۱۸ - a}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} ۱۸ - a = ۹ \Rightarrow ۱۸ - ۹ = a \Rightarrow \boxed{a = ۹}$$

$$\boxed{a = F_۴ = ۹ : \textbf{فراوانی طبقه چهارم}}$$

بدانیم تا بهتر زندگی کنیم:

انجام **تمرینات ورزشی**، سه بار در هفته، استرس و فشار عصبی را کاهش می‌دهد.

با انجام تمرینات ورزشی، مغز ما مواد شیمیایی‌ای ترشح می‌کند (مثل **اندورفین**) که احساس **شادی** در ما ایجاد می‌کند و کمک شایانی به رفع استرس و تنش عصبی ما می‌کند.

در ایامی که برای کنکور درس می‌خونیم، برای شروع تمرینات ورزشی می‌تونیم از روزی ۵ دقیقه شروع کنیم و کم کم اونو به روزی ۱۵ دقیقه برسونیم.

توجه: این کار اصلاً اتلاف وقت نیست، بلکه انرژی‌ای که از این کار در شما ایجاد میشه، باعث میشه مطالعهٔ شما کاراتر و موثرتر انجام بشه.

یعنی ورزش روزانه کوتاه مدت، یه سرمایه گذاری عالیه! پس اونو جدی بگیرین.

(بسیار مهم):

در جدول زیر مقدار مد برابر با ۱۲۳/۵ می‌باشد، مقدار مجهول a کدام است؟

حدود طبقات	۱۰۰-۱۰۹	۱۱۰-۱۱۹	۱۲۰-۱۲۹	۱۳۰-۱۳۹
F_i	۵	۶	a	۴

۱) ۴

۲) ۱۰

۳) ۸

۴) ۱۲

آمار و احتمالات، آموزشگاه مدرسان شریف، ص ۱۷، مثال ۶۵

جواب: گزینه «۳»

اول باید مقدار L_{Mo} ، d_1 و d_2 و I رو بدست بیاریم و اونا رو تو فرمول مد قرار بدیم و از اونجا مقدار a (یعنی فراوانی طبقه سوم) رو بدست بیاریم.

اولاً: چون مقدار مد $(Mo = ۱۲۳/۵)$ در فاصله (۱۲۹-۱۲۰) قرار داره، پس این طبقه (یعنی طبقه سوم)، طبقهٔ مد داره.

ثانیاً: طبقات ما **گسسته** اند، پس ما باید اونا رو پیوسته کنیم (البته برای سرعت عمل بیشتر، **فقط طبقه مد دار** رو پیوسته می‌کنیم):

$$\text{طبقه مد دار}: (۱۲۰-۱۲۹) \xrightarrow{\text{حدود واقعی}} \underset{L_{Mo}}{(۱۱۹/۵-۱۲۹/۵)}$$

L_{Mo} : حد پایین **واقعی** طبقه مد دار

ثالثاً: *بعد از پیوسته شدن طبقات می‌تونیم بگیم که فاصله طبقات (I) با عرض طبقات برابره، پس:* $\boxed{I = ۱۲۹/۵ - ۱۱۹/۵ = ۱۰}$

(ادامه تو فیش بعد)

CL	100-109	110-119	120-129 (طبقه مد دار)	130-139
F_i	۵	۶ $\xleftarrow{d_1=a-6}$	$\boxed{a}$	$\xrightarrow{d_2=a-4}$ ۴

$$\boxed{Mo = L_{Mo} + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times I} \Rightarrow$$

$$۱۲۳/۵ = ۱۱۹/۵ + \frac{a-۶}{(a-۶)+(a-۴)} \times ۱۰ \Rightarrow$$

$$۱۲۳/۵ = ۱۱۹/۵ + \frac{۱۰(a-۶)}{a+a-۶-۴} \Rightarrow$$

$$۱۲۳/۵ = ۱۱۹/۵ + \frac{۱۰a-۶۰}{۲a-۱۰} \Rightarrow$$

$$۱۲۳/۵ - ۱۱۹/۵ = \frac{۱۰a-۶۰}{۲a-۱۰} \Rightarrow$$

$$۴ = \frac{۱۰a-۶۰}{۲a-۱۰} \Rightarrow \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} ۴(۲a-۱۰) = ۱۰a-۶۰ \Rightarrow$$

$$۸a-۴۰ = ۱۰a-۶۰ \Rightarrow -۴۰+۶۰ = ۱۰a-۸a \Rightarrow ۲۰ = ۲a$$

$$a = \frac{۲۰}{۲} = ۱۰ \Rightarrow \boxed{a = F_3 = ۱۰ : \text{فراوانی طبقه سوم (طبقه مد دار)}}$$

(ادامه تو پشت فیش)

نکتهٔ ظریف مصوّر:

تو این ســـؤال، a در واقع نشـــون دهندهٔ فراوانی طبقه مُدداره و ما می‌دونیم که فراوانی طبقهٔ مددار باید از فروانی بقیهٔ طبقات، بیشتر باشه.

پس تو این سـؤال هم، از همـون اول می‌تونستیم بگیم که مقدار a باید از ٦ بزرگتر باشـــه (٦ بزرگترین فراوانی در جدول است)؛

بنابراین با استفاده از همین نکته، براحتی می‌تونستیم بفهمیم که گزینه ۱ $(a = ۴)$ قطعاً غلطه.

در یک جدول فراوانی:

$$L = ۲ \ , \ d_۲ = ۲ \ , \ d_۱ = ۴ \ , \ Mo = ۲ / ۶۷$$

مقدار طول طبقه کدام است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

آمار و احتمالات، آموزشگاه مدرسان شریف، ص ۱۱۷، تست ۱۱

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به داده‌های مسئله:

$L = ۲$ = حد پایین طبقه مد دار و $Mo = ۲ / ۶۷$: مد

$d_۲ = ۲$ و $d_۱ = ۴$

با توجه به داده‌های بالا، باید از فرمول مد استفاده کنیم:

$$\boxed{Mo = L_{Mo} + \frac{d_۱}{d_۱ + d_۲} \times I} \Rightarrow$$

$$۲ / ۶۷ = ۲ + \frac{۲}{۲ + ۴} \times I \Rightarrow$$

$$۲ / ۶۷ = ۲ + \frac{۲}{۶} \times I \Rightarrow$$

$$۲ / ۶۷ = ۲ + \frac{۱}{۳} \times I \Rightarrow$$

$$۲ / ۶۷ = ۲ + \frac{I}{۳} \Rightarrow$$

$$۲ / ۶۷ - ۲ = \frac{I}{۳} \Rightarrow ۰ / ۶۷ = \frac{I}{۳} \xRightarrow{\text{طرفین وسطین}}$$

طول طبقه: $I = ۳ \times ۰ / ۶۷ \Rightarrow \boxed{I = ۲ / ۰۱ \approx ۲}$

نحوهٔ محاسبه مُد را از طریق **نمودار بافت نگار (هیستوگرام = مستطیلی)** با رسم شکل نشان دهید.

آمار و احتمال، آموزشگاه پارسه، محسن طورانی، ص ۱۲۶

آمار و کاربرد آن در مدیریت، عادل آذر و منصور مؤمنی، جلد ۱، ص ۱۰۳

«**نمودار بافت نگار (مستطیلی = هیستوگرام)**: ***Histogram chart***»

در رسم نمودار بافت نگار:
*بر روی محور افقی، حدود **واقعی** طبقات (**کرانه**های طبقات) قرار می گیرد*
*و بر روی محور عمودی هم، **فراوانی** (نسبی یا مطلق) قرار می گیرد.*

هر یک از طبقات جدول فراوانی به شکل یک مستطیل نشان داده می‌شوند که:

پهنا (عرض) هر مستطیل نشان دهندهٔ **عرض** اون طبقه است (**یادآوری**: عرض طبقه، یعنی: فاصله حد بالا و پایین طبقه).
و **ارتفاع** هر مستطیل نیز بیانگر **فراوانی** (مطلق یا نسبی) آن طبقه است.

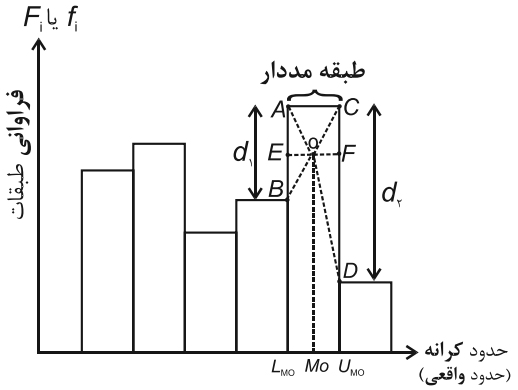
توجه:

از اون‌جایی که طبقات (مستطیل‌ها) را با حدود **واقعی‌شان** نشان می‌دهیم، بنابراین طبقات (مستطیل‌ها) حالت **پیوسته** (بدون فاصله) پیدا می‌کنند، یعنی تمام طبقات (مستطیل‌ها) بهم چسبیده‌اند.

(ادامه تو فیش بعد)

محاسبه مُد از طریق نمودار بافت نگار (هیستوگرام = مستطیلی):

با توجه به اینکه ارتفاع هر مستطیل، همان فراوانی مطلق یا نسبی آن طبقه است، پس **بلندترین** مستطیل، در واقع **بیشترین فراوانی** را داشته و بنابراین **طبقه مد دار** است، یعنی مد داده‌ها بین حد پایین و بالای این طبقه (مستطیل) قرار می‌گیرد:



نکته: چون در رسم بافت نگار از حدود **واقعی** طبقات استفاده می‌کنیم، بنابراین طبقات (مستطیل‌ها) حالت **پیوسته** دارند و در نتیجه همواره:

طول طبقات = **عرض** طبقات = **فاصله** طبقات = I

بنابراین **عرض یا پهنای تمام مستطیل‌ها (تمام طبقات) با هم برابر خواهد بود.**

(ادامه تو پشت فیش)

یافتن مد در شکل فوق (در نمودار هیستوگرام):

بعد از اینکه **طبقه مد دار (بلندترین مستطیل)** را مشخص کردیم، میاییم دوتا خط مورب را از دو گوشهٔ این مستطیل به طبقات مجاورش رسم می‌کنیم. **محل تقاطع این دو خط**، نقطه‌ای را بر روی محور افقی مشخص می‌کند که همان **مد** داده‌ها است.

نحوهٔ ترسیم دو خط مورب:

خط اول را از گوشهٔ سمت راست بلندترین مستطیل (طبقه مد دار) به گوشه سمت راست مستطیل سمت چپ آن می‌کشیم (از نقطه C به B).

خط مورب دوم را نیز از گو شه سمت چپ بلندترین مستطیل به گو شه سمت چپ مستطیل سمت راستی رسم می‌کنیم (از نقطه A به D).

از **محل تقاطع** این دو خط مورب، نقطه‌ای ایجاد می‌شود (نقطه O) که اگر آنرا بر محور افقی عمود کنیم، ***بر روی محور افقی***، مقدار **مُد** مشخص می‌شود.

(**یادآوری**: *مد، یک داده است، نه یک فراوانی؛ پس باید جایش همیشه روی محور افقی باشه، نه روی محور عمودی*).

(ادامه تو فیش بعد)

توجیه هندسی فرمول محاسبه مد از طریق نمودار بافت نگار:

اگر L_{Mo} حد پایین **واقعی** طبقه مد دار و U_{Mo} نیز حد بالای **واقعی** طبقه مد دار باشد و d_1, d_2 نیز به ترتیب اختلاف فراوانی طبقه مد دار را از طبقه **ماقبل** و **مابعد** خود باشد و I هم فاصله طبقه را نشان دهد، می‌خواهیم ثابت کنیم که:

$$\boxed{Mo \approx L_{Mo} + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right) \times I}$$

(**توضیح:** بخاطر سپردن **اثبات** این فرمول الزامی نیست و صرفاً برای آشنایی شما با نحوه بدست آمدن آن، گفته می‌شود):

دو مثلث AOB و COD متشابه هستند، پس طبق قواعد تشابه مثلث‌ها داریم:

$$\frac{\text{قاعده مثلث AOB}}{\text{ارتفاع مثلث AOB}} = \frac{\text{قاعده مثلث COD}}{\text{ارتفاع مثلث COD}} \Rightarrow$$

$$\frac{AB}{OE} = \frac{CD}{OF} \Rightarrow \frac{d_1}{Mo - L_{Mo}} = \frac{d_2}{U_{Mo} - Mo} \Rightarrow$$

با توجه به شکل مشخص است که:

فاصله طبقات + حد پایین طبقه مد دار = حد بالای طبقه مد دار

$$U_{Mo} = L_{Mo} + I$$

(ادامه تو پشت فیش)

بنابراین اگر این مقدار را به جای U_{Mo} در رابطه بـالا قـرار دهـیم، خـواهیم داشت:

$$\xrightarrow{U_{Mo}=L_{Mo}+I} \frac{d_1}{Mo-L_{Mo}} = \frac{d_2}{(L_{Mo}+I)-Mo} \xRightarrow{\text{طرفین وسطین}}$$

$$d_1(L_{Mo}+I-Mo) = d_2(Mo-L_{Mo}) \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{d_1 \text{ و } d_2 \text{ را در پرانتزها ضرب می‌کنیم}}$$

$$d_1L_{Mo}+d_1I-d_1Mo = d_2Mo-d_2L_{Mo} \Rightarrow$$

عبارات شامل L_{Mo} *را در سمت چپ و عبارات شامل* Mo *را در سمت راست نگه می‌داریم:* $d_1L_{Mo}+d_2L_{Mo}+d_1I = d_2Mo+d_1Mo$

از Mo *و* L_{Mo} *در طرفین تساوی فوق فاکتور می‌گیریم:*

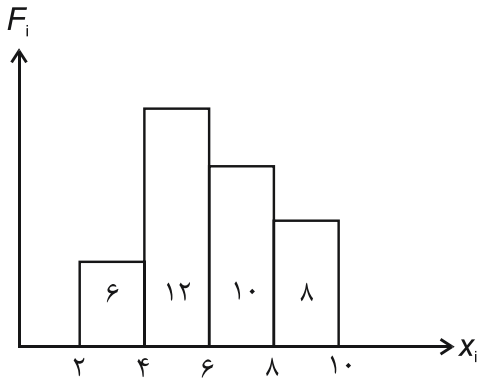
$$L_{Mo}(d_1+d_2)+d_1I = Mo(d_1+d_2) \Rightarrow$$

$$Mo = \frac{L_{Mo}(d_1+d_2)+d_1I}{(d_1+d_2)} \Rightarrow$$

$$Mo = \frac{L_{Mo}\cancel{(d_1+d_2)}}{\cancel{(d_1+d_2)}} + \frac{d_1I}{(d_1+d_2)}$$

$$\Rightarrow \boxed{Mo \approx L_{Mo} + \left(\frac{d_1}{d_1+d_2}\right)\times I}$$

فرض کنید هیستوگرام زیر بدست آمده است. اعداد درون مستطیلها، فراوانی‌های متناظر را نشان می‌دهند. مد کدام است؟



۱) ۵/۵

۲) ۶

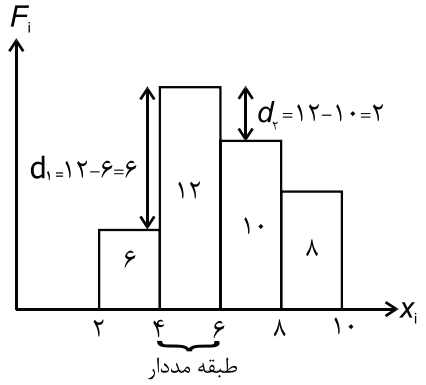
۳) ۱۲

۴) ۴

آمار و احتمالات، آموزشگاه مدرسان شریف، ص ۱۲۰، تست ۴۷

پاسخ: گزینه ۱

۱) راه تستی: با توجه به شکل، طبقه دوم (۶-۴)، طبقه مد دار است چون **پیشترین فراوانی (پیشترین ارتفاع)** رو داره، یعنی مقدار مُد بایستی بین ۴ و ۶ باشد $(۴ < Mo < ۶)$، بنابراین گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ حذف می‌شوند و تنها گزینه ۱ صحیح است، زیرا: $۴ < Mo = ۵ / ۵ < ۶$



۲) راه حل محاسباتی:

$$\text{مد دار : Mo} = \text{حد پایین طبقه مد دار} + \frac{d_۱}{d_۱ + d_۲} \times \text{(طول طبقه) فاصله}$$

$$Mo = ۴ + \frac{۶}{۶+۲} \times ۲ \Rightarrow Mo = ۴ + \frac{۶}{\cancel{۲}} \times \cancel{۲} \Rightarrow ۴ + \frac{۶}{۴}$$

$$Mo = ۴ + \frac{۳}{۲} \Rightarrow Mo = ۴ + ۱/۵ \Rightarrow \boxed{Mo = ۵/۵}$$

مزایا و معایب شاخص مرکزی مد:

اصول و روش‌های آماری، فرشادفر، ص ۱۰۳

کاربرد آمار در مدیریت ترافیک، ص ۱۵۰

الف) مزایای نما (مد):

۱- به سادگی قابل محاسبه است (با یافتن داده یا طبقه‌ای که **پیشترین** فراوانی مطلق یا نسبی را دارد).

۲- به آسانی می‌توان آن را از طریق **هندسی (نمودار بافت نگار)** تعیین کرد.

۳- معمولاً از مُد در امور **بازرگانی** استفاده می‌شود.

به عنوان مثال زمانی که یک تاجر لباس مایل است بداند که کدام مارک یا مدل، **پیشترین** فروش را برایش به همراه دارد یا یک فروشنده کفش، مایل است بداند که چه سایزی از کفش‌ها، **پیشترین** فروش را دارند، از شاخص مرکزی **مُد** استفاده می‌کند.

۴- حتی اگر طبقات اول یا آخر، **باز** باشند (در صورتی که مد در این طبقات قرار نداشته باشد)، باز هم **می‌توان** مد را محاسبه کرد.

توجه: اگر مد در یک طبقهٔ **باز** واقع شده باشد، از آنجا که فاصله طبقه باز با طبقه مجاورش نامعلوم است (I نامعلوم است)، پس نمی‌تونیم از فرمول مد برای محاسبه آن استفاده کنیم، در نتیجه مد از طریق فرمول قابل محاسبه **نیست**.

۵- مد را می‌توان برای **همه مقیاس‌ها** اعم از **کمی** یا **کیفی** بدست آورد.

(ادامه تو فیش بعد)

۶- موقعی که داده‌ها به صورت ***فاصله‌ای*** (حد بالا **−** حد پایین) طبقه‌بندی میشن، می‌تونیم بدون نیاز به هیچ محاسبه‌ای بگیم که مقدار مد حتماً ***در حدود طبقه مد دار*** قرار دارد (بین حد پایین و بالای طبقه مد دار).

۷- اگر در مشاهدات، داده‌های فرین (تعداد ***کمی*** مشاهدهٔ ***بسیار کوچک*** یا ***بسیار بزرگ*** نسبت به سایر مشاهدات) وجود داشته باشد، اون وقت مقدار مُد تحت تأثیر بزرگی یا کوچیکی این داده‌ها قرار نمی‌گیره.

به عنوان مثال مد مشاهداتِ ۵ و ۲ و ۲ و ۱ برابر Mo=2 است؛ حال اگر ۲ مشاهدهٔ فرین را به این داده‌ها اضافه کنیم، می‌بینیم که ***مد تحت تأثیر مقدار آنها قرار نمی‌گیرد و تغییر نمی‌کند***:

$$\begin{cases} ۱,۲,۲,۵ \\ Mo = ۲ \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \boxed{-۱۰۰۰},۱,۲,۲,۵,\boxed{۱۰۰۰۰۰} \\ Mo = ۲ \end{cases}$$

نکته:

اما بعداً در بحث شاخص مرکزی میانگین می‌بینیم که شاخص ***میانگین*** (برخلاف مُد) ***به شدت تحت تأثیر مقادیر فرین قرار می‌گیره*** و این یک ***نقطه ضعف*** برای میانگین محسوب می‌شود. (در نتیجه در مواقعی که توزیع داده‌ها، دارای چند مقدار فرین است، شاخص مرکزی مُد بر میانگین ترجیح داده می‌شود.

(ادامه تو پشت فیش)

ب) معایب نما (مد):

۱- مُد بر مبنای کلیه مشـــاهدات نیســـت، یعنی ***در محاســـبه آن از همه داده‌ها استفاده نمی‌شود***، بلکه تنها از اطلاعات مربوط به طبقه مد دار استفاده می‌شود.

۲- بر روی مد، ***نمی‌توان عملیات جبری*** (مانند +، -، × و ÷ و غیره) را انجام داد. و به همین خاطره که **مد کم اهمیت‌ترین و کم ارزش‌ترین شاخص مرکزی است**.

۳- مقدار مد، از یک نمونه به نمونه دیگر، به مقدار قابل توجهی تغییر می‌کند، یعنی ***پراکندگی و تغییرپذیری مد بالا است*** و در نتیجه ***پایداری و ثبات آن کم*** اســـت، به همین علت **مد را** *ناپایدارترین* **شـــاخص مرکزی** قلمداد می‌کنند.

مثلاً اگر جامعه (کل) مشاهدات ما به صورت ۵ و ۴ و ۴ و ۲ و ۲ و ۲ و ۱ باشد و ما چهار نمونه ۴ عضوی از این جامعه انتخاب کنیم، خواهیم داشت:

نمونه اول : ۱,۲,۲,۵ → Mo = ۲

نمونه دوم : ۱,۲,۴,۴ → Mo = ۴

نمونه سوم : ۲,۲,۴,۴ → Mo = ∅

نمونه چهارم : ۱,۲,۴,۵ → Mo = ∅

یعنی مشاهده می‌شود که با تغییر داده‌ها از یک نمونه به نمونه دیگر، مقدار مد دائماً در حال تغییر است، ولی بعداً در ادامه این فصل یاد می‌گیریم که **(ادامه تو فیش بعد)**

مقدار شاخص‌های مرکزی میانه و میانگین، برخلاف مد، از یک نمونه به نمونه‌ای دیگر، به میزان کمتری تغییر می‌کنند، یعنی تغییرپذیری یا پراکندگی آنها نسبت به مد کمتره و برعکس پایداری آنها نسبت به مد بیشتر است:

میانگین < میانه < مد : براساس پراکندگی و تغییرپذیری

(کمترین) (بیشترین)

مد < میانه < میانگین : براساس ثبات و پایداری

(بی ثبات ترین) (پایدار ترین)

۴- برای داده‌های نوع سوم که به صورت فاصله‌ای (C-L) طبقه‌بندی می‌شوند، **نمیشه** مقدار دقیق مُد را بدست آورد، بلکه فقط می‌تونیم مقدار اونو **بطور تقریبی** برآورد کنیم (تخمین بزنیم):

$$Mo \approx L_{\hat{M}o} + (\frac{d_۱}{d_۱ + d_۲})I$$

۵- بعضی وقتا **ممکنه اصلاً مد نداشته باشیم** و بعضی وقتا هم ممکنه همزمان **چند تا مد** داشته باشیم.

مثال: x_i : ۱,۲,۳,۴ $\Rightarrow Mo =$ $\rightarrow$ **مد نداریم**

x_i : ۱,۲,۲,۳,۴,۴,۵,۶,۶ $\Rightarrow \hat{M}o =$ ۲,۴,۶ $\rightarrow$ ۳ تا مد داریم

دانستنی‌های مفید و کاربردی:

درد پاشنه یا کف پا:

برای رهایی از درد پاشنه یا کف پا می‌توانید پای خود را بر روی یك بطری یا میله قرار دهید و آن را روی بطری به جلو و عقب حرکت دهید تا ماساژ داده شود.

با این کار، جریان خون در کف پا بهبود یافته و درد پای شما کاهش می‌یابد.

(اقتصاد ۷۳)

نظر گروهی از سوادآموزان راجع به زمان پخش برنامه نهضت سوادآموزی از سیمای جمهوری اسلامی جمع‌آوری شده است.

کدام شاخص مرکزی برای آن داده‌ها مناسب‌تر است؟

۱) میانگین

۲) میانه

۳) نما

۴) چارک اول

پاسخ: گزینه ۳

نکته: کاربرد مد (نما):

هر گاه در یک جامعه، **بیشترین فراوانی (تکرار)**، معیار سنجش و انتخاب ما باشه (مثلاً هنگام **نظرسنجی**، **رأی‌گیری**، **انتخابات** و ...) اون وقت باید از شاخص مرکزی **مد (نما)** استفاده کنیم.

در این سؤال، با توجه به اینکه معیار ما برای انتخاب بهترین زمان پخش برنامه، براساس **بیشترین** درخواست سوادآموزان است، پس مناسب‌ترین معیار مرکزی برای درخواست‌ها، شاخص **مد (نما)** است.

(بسیار مهم):

«**میانه**: Median»

۱) تعریف شاخص مرکزی **میانه**:

۲) مثال: *در صورتی که میانه نمره دانش‌آموزان یک کلاس ۱۲ باشد، آنگاه نمرات ۵۰ درصد دانش‌آموزان ..... است.*

۱) کمتر یا مساوی ۱۲
۲) مساوی ۱۲
۳) بیشتر از ۱۲
۴) ۱ و ۳

آمار و احتمال، آموزشگاه پارسه، محسن طورانی، ص ۲۵

انواع شاخص‌های مرکزی عبارتند از:

۱- مد	۲- میانه	۳- چندک	۴- میانگین

در فیش‌های قبلی، با شاخص مرکزی مد آشنا شدیم؛ اکنون به بررسی دومین شاخص مرکزی، یعنی میانه می‌پردازیم:

«میانه *(Median)=Md* یا *Me*»

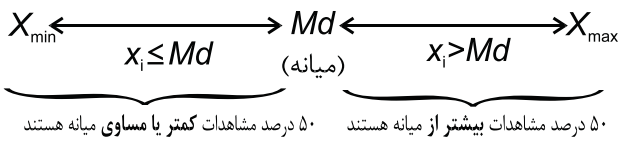
۱) تعریف: اگر داده ها (x های) یک جامعه رو به صورت صعودی (غیرنزولی) مر تب کنیم، اون و قت داده‌ای که **در وسط** قرار می‌گیره و مشاهدات جامعه را به **دو نیمه مساوی تقسیم** می‌کنه، **میانهٔ** مشاهدات خواهد بود. یعنی:

*۵۰ درصد (نصف) مشاهدات، **قبل از میانه** قرار دارن (کوچکتر از میانه‌اند) و*
*۵۰ درصد (نصف) مشاهدات هم **بعد از میانه** قرار دارن (بزرگتر از میانه‌اند).*

توجه: *میانه را به اختصار با نماد* Md یا Me *نشان می‌دهیم.*

نکته بسیار مهم: شاخص میانه (**Md**) جزء ۵۰ در صد **مشاهدات قبل از خودش** است. به عبارت دیگر:

(ادامه تو فیش بعد)



برای درک بهتر نکته فوق به مثال زیر توجه فرمایید:

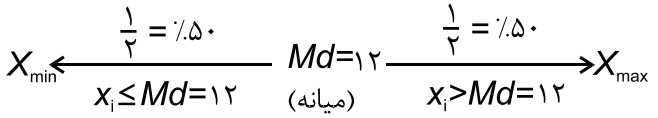
مثال: *در صورتی که میانه نمره دانش‌آموزان یک کلاس ۱۲ باشد، آنگاه نمرات ۵۰ درصد دانش‌آموزان ..... است:*

۱) کمتر یا مساوی ۱۲ ۲) مساوی ۱۲

۳) بیشتر از ۱۲ ۴) ۱ و ۳

پاسخ: گزینه ۴

در صورتی که میانه نمرات دانش‌آموزان یک کلاس Md=۱۲ باشد، به این مفهوم است که اگر نمرات دانش‌آموزان کلاس را به صورت **صعودی (غیرنزولی)** مرتب کنیم، آنگاه:



(ادامه تو پشت فیش)

یعنی ۵۰ درصد نمرات کلاس ***کمتر یا مساوی*** *۱۲ است* (حداکثر برابر ۱۲ است: $x_i \leq ۱۲$) *و ۵۰ درصد نمرات* ***بیشتر از*** *۱۲ است* ($x_i > ۱۲$).

نکته بسیار مهم: *در بیان میانه، فقط می‌توان از عبارت زیر استفاده کرد:*

۱- ۵۰ درصد مشاهدات ***کمتر یا مساوی*** میانه ($\leq$) هستند
(یعنی ۵۰ درصد مشاهدات، **حداکثر** برابر میانه هستند)
۲- ۵۰ درصد مشاهدات ***بیشتر از*** میانه ($<$) هستند.

اما در بیان میانه به هیچ وجه نمی‌توان از عبارات زیر استفاده کرد:

۱- ۵۰ درصد مشاهدات ***بیشتر یا مساوی*** میانه ($\geq$) هستند
(یعنی ۵۰ درصد مشاهدات، **حداقل** برابر میانه هستند).
۲- ۵۰ درصد مشاهدات ***کمتر از*** میانه ($<$) هستند.

علت برقراری روابط فوق در مورد میانه این است که:
میانه جزء ۵۰ درصد مشاهدات قبل از خود (نه بعد از خود) است، بنابراین موقع تفسیر میانه، بجای $>$ باید حتماً از نماد $\leq$ استفاده کنیم.
هم چنین چون میانه جزء ۵۰ درصد مشاهدات بعد از خودش نیست، پس بجای نماد $\geq$ هم باید از نماد $<$ استفاده کنیم (یعنی نباید از علامت مساوی استفاده کنیم).

توجه: *در فیش‌های بعدی، ابتدا با نحوهٔ محاسبه میانه در داده‌های نوع اول (حجم کم) آشنا می‌شویم. سپس به بررسی میانه در داده‌های نوع دوم و سوم می‌پردازیم.*

«نحوهٔ محاسبه میانه در داده‌های نوع اول (با حجم کم)»

مثال: *میانه داده‌های زیر را محاسبه کنید:*

الف) ۶، ۷، ۹، ۰، ۱-

ب) ۹، ۷، ۵ ،۰، ۴ ، ۱-

آمار و احتمال، آموزشگاه پارسه، محسن طورانی، ص ۲۵ و ۲۶

«نحوهٔ محاسبه میانه در داده‌های نوع اول (با حجم کم)»

همان طور که گفته شد، اگر مشاهدات (x_i ها) رو به صورت صعودی (غیرنزولی) مرتب کنیم، آنگاه **دادهٔ وسط**، برابر میانه خواهد بود.

مثال الف) اگه ۵ داده شامل ۶، ۷، ۹، ۰، ۱- داشته باشیم، برای یافتن میانه این داده‌ها، ابتدا باید آنها را **صعودی** مرتب کنیم و سپس **دادهٔ وسطی** را پیدا کنیم:

$$-۱,۰,۹,۷,۶ \xrightarrow{\text{صعودی}} -۱,۰,\boxed{۶},۷,۹$$

دادهٔ وسط = میانه

بنابراین دادهٔ سوم $(x_i = ۶)$ برابر میانه خواهد بود، زیرا از لحاظ مقداری **دقیقاً در وسط** مشاهدات قرار گرفته است، یعنی داده‌های ۰ و ۱- کوچکتر از آن و داده‌های ۷ و ۹ بزرگتر از آن قرار دارند.

مثال ب) اگه داده‌های ما به صورت ۹، ۷، ۵ ، ۰، ۴ ، ۱- باشند، یعنی تعداد داده‌ها **زوج** باشد، آنگاه بعد از مرتب کردن داده‌ها به صورت صعودی، خواهیم دید که بجای یک داده، **دو داده در وسط** مشاهدات قرار می‌گیرند:

$$-۱,۴,۰,۵,۷,۹ \xrightarrow{\text{صعودی}} -۱,۰,۴,۵,۷,۹$$

دو دادهٔ وسط

بنابراین در این حالت (که N زوج است)، باید **متوسط یا میانگین دو دادهٔ وسط** را به عنوان میانه داده‌ها در نظر بگیریم، یعنی:

(ادامه تو فیش بعد)

$$\text{میانه} = Md = \frac{۴+۵}{۲} = \frac{۹}{۲} = ۴/۵ \leftarrow \text{اگر N } \textbf{زوج} \text{ باشد}$$

که در این حالت نیز، سه دادهٔ ۴ و ۰ و ۱- کوچکتر از میانـه (۴/۵) هسـتن و سه دادهٔ ۹، ۷ و ۵ نیز بزرگتر از میانه (۴/۵) هستن، پس در اینجـا هـم مـی-بینیم که میانه در وسط داده‌ها قرار می‌گیرد.

خب، حالا می‌خواهیم توضیحات فوق را به زبان ریاضی نشون بدیم:

۱) اگر n **فرد** باشه:

$$x_۱ \le x_۲ \le \ldots \le \underbrace{x_{\frac{n}{۲}+\frac{۱}{۲}}}_{\textbf{دادهٔ وسط = میانه: Md}} \le \ldots \le x_n$$

۲) اگر n **زوج** باشه:

$$x_۱ \le \ldots \le \underbrace{x_{\frac{n}{۲}} \le x_{\frac{n}{۲}+۱}}_{\textbf{دو دادهٔ وسط=میانه}} \le \ldots \le x_n$$

که در این حالت:

$$\textbf{میانه}: Md = \textbf{میانگین دو دادهٔ وسط} = \frac{x_{\frac{n}{۲}} + x_{\frac{n}{۲}+۱}}{۲}$$

حال برای درک بهتر، می‌خواهیم کاربرد دو رابطه بالا را تو اون دو مثالی که اول این فیش حل کردیم، نشون بدیم:

در مثال (**الف**)، تعداد داده ها **فرد** است $(n = ۵)$ و مشاهدات مـا عبارتنـد از: ۹، ۷، ۶، ۰ و ۱-، پس داریم: **(ادامه تو پشت فیش)**

دادهٔ سوم = محل میانه

$$-۱ < ۰ < \underset{\text{ب}}{۶} < ۷ < ۹$$

دادهٔ وسط = میانه

یعنی در این حالت (که N فرد است)، محل دادهٔ وسط از رابطهٔ زیر بدست می-آید:

$$\textbf{محل دادهٔ وسط} = \frac{n}{۲} + \frac{۱}{۲} \xrightarrow{n=۵} \frac{۵}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۳ : \textbf{دادهٔ سوم}$$

یعنی پس از مرتب کردن داده‌ها به صورت صعودی، دادهٔ سوم برابر میانه خواهد بود:

$$\boxed{\textbf{میانه} : Md = x_{\frac{n}{۲}+\frac{۱}{۲}}} \Rightarrow x_{\frac{۵}{۲}+\frac{۱}{۲}} = x_{\frac{۶}{۲}} = \boxed{x_۳ = ۶}$$

اما در مثال **(پ)** که تعداد داده‌ها **زوج** است (N :زوج) و مشاهدات بعد از مرتب شدن به صورت ۹، ۷، ۵، ۴، ، ۰ و ۱- هستن، داریم:

دادهٔ سوم **دادهٔ چهارم**

$$-۱ < ۰ < \underbrace{۴ < ۵}_{\textbf{دو دادهٔ وسط}} < ۷ < ۹$$

یعنی اگر **n زوج** باشد، محل دو دادهٔ وسط از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\boxed{\textbf{محل دو دادهٔ وسط} = \frac{n}{۲}, \frac{n}{۲}+۱} \xrightarrow{n=۶} \frac{۶}{۲}, \frac{۶}{۲}+۱ \Rightarrow ۳, ۴$$

(ادامه تو فیش بعد)

یعنی داده‌های سوم و چهارم در وسط قرار دارند، بنابراین **میانگین** آنها برابر میانه خواهد بود:

$$\boxed{\textbf{میانه} : Md = \frac{x_{\frac{n}{۲}} + x_{\frac{n}{۲}+۱}}{۲}} = \frac{x_۳ + x_۴}{۲} = \frac{۴+۵}{۲} = \frac{۹}{۲} = ۴/۵$$

با توجه به توضیحات فوق، می‌توان مراحل محاسبه میانه در داده‌های نوع اول را به صورت زیر بیان نمود:

گام ۱) مرتب کردن داده‌ها بصورت **صعودی (غیرنزولی)** و کدگذاری آنها از ۱ تا N.

گام ۲) یافتن **محل میانه:**

داده **وسط** = محل میانه ⟵ اگه N **فرد** باشه

دقیقاً **بین ۲ دادهٔ وسط** = محل میانه ⟵ اگه N **زوج** باشه

گام ۳) مشخص کردن مقدار میانه از بین داده‌های صعودی مرتب شده

ایستگاه ورزش:

بهترین شیوه برای گرم کردن بدن پیش از شروع تمرینات ورزشی، پیاده روی آرام به مدت ۵ دقیقه است.

توجه:

انجام حرکات کششی پیش از فعالیت اصلی ورزشی و پیش از گرم شدن کامل بدن، ممکن است به ماهیچه‌ها و تاندون‌های ما آسیب برساند.

یادآوری:

انجام ۱۰-۱۵ دقیقه ورزش روزانه،دارای فواید زیر است:

۱.کمک به **بهبود یادگیری** (بواسطه اکسیژن رسانی بیشتر به مغز)

۲. **افزایش انرژی و حوصله** شما برای مطالعه (بواسطه ترشح هورمونهای نشاط بخش از جمله اندورفین)

۳.تغییر روحیه شما و **رهایی شما از استرس و نگرانی**

(اقتصاد ۸۳)

برای مقادیر متغیر تصادفی **X** *به شرح زیر:*

x : ۶۰,۴۰,۶۰,۸۰

۱) فقط میانگین حسابی و میانه با هم برابرند.

۲) فقط میانگین حسابی و نما با هم برابرند.

۳) میانگین حسابی، میانه و نما با هم برابرند.

۴)) فقط میانه و نما با هم برابرند.

پاسخ: گزینه ۳

گام ۱) صعودی مرتب کردن داده‌ها و کدگذاری آنها از ۱ تا N:

کد $\Rightarrow$ (۱) (۲) (۳) (۴)

x_i : ۴۰ , $\underbrace{۶۰ \ , \ ۶۰}_{\text{دو دادهٔ وسط}}$, ۸۰

گام ۲) تعیین محل میانه:

چون تعداد داده‌ها **زوج** است (N=۴)، **دو** مشاهده (دوم و سوم) در وسط قرار می‌گیرند و بنابراین میانه، برابر با **میانگین دو دادهٔ وسط** خواهد بود:

$$Md = \frac{x_۲ + x_۳}{۲} = \frac{۶۰+۶۰}{۲} = \frac{۱۲۰}{۲} \Rightarrow \boxed{Md = ۶۰}$$

خب، حالا میریم سراغ میانگین:

$$\text{میانگین حسابی} = \mu = \frac{\text{جمع مشاهدات}}{\text{تعداد مشاهدات}} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{۴۰+۶۰+۶۰+۸۰}{۴}$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{۲۴۰}{۴} \Rightarrow \boxed{\mu = ۶۰}$$

و حالا نوبت مُده: $\boxed{Mo = ۶۰}$: مُد

همانطور که می‌بینیم مقدار هر سه پارامتر مرکزی میانگین حسابی، میانه و نما (مد) برابر ۶۰ شده است: $\boxed{\mu = Md = Mo = ۶۰}$

(ادامه تو فیش بعد)

راه حل تستی:

تو این ســـؤال داده‌های ما حالت **متقارن** دارن، یعنی دو دادهٔ ۶۰ و ۶۰ در وســـط توزیع قرار دارن و دو دادهٔ دیگه (۴۰ و ۸۰) هر کدوم **با فاصـــله مساوی** از دادهٔ وسط، در دو طرفش قرار گرفته‌اند:

۲۰ واحد فاصله **۲۰ واحد فاصله**

x_i : ۴۰ , ۶۰ , ۶۰ , ۸۰

دو دادهٔ وسط

به این جور توزیع‌ها، توزیع **متقارن** می‌گیم.

نکته تســـتی: بعدها یاد می‌گیریم که ***در توزیع‌های متقارن، همه شاخص‌های مرکزی با هم برابرن،*** یعنی:

$\mu = Md = Mo$: در توزیع **متقارن**

پس تو این سؤال هم:

داده وسط $= ۶۰ = Mo = Md = \mu \Rightarrow$ توزیع **متقارن**

ایستگاه معنویت:

وضو:
کسی که وضو می‌گیرد و با حوله خشک کند، یک حسنه برایش نوشته می‌شود و کسی که وضو بگیرد و صبر کند تا دست و رویش خودبخود خشک شود، سی حسنه برایش نوشته می‌شود.
کسی که برای غیر نماز، وضوی خود را تجدید کند (دوباره وضو بگیرد)، خداوند ، توبه او را بدون استغفار تجدید می‌کند.
امام صادق (علیه السلام)

«نحوهٔ محاسبه میانه در داده‌های نوع دوم (حجم زیاد، تنوع کم) با داشتن فراوانی مطلق»

مثال : میانه در جدول زیر کدام است؟

x_i	۴	۱	۰	۷
F_i	۳	۸	۵	۹

۱) ۷/۵ ۲) ۶/۵

۳) ۴ ۴) ۱

آمار و احتمال، آموزشگاه پارسه، محسن طورانی، ص ۲۷ و ۲۸

محاسبه میانه در داده‌های نوع دوم (حجم زیاد، تنوع کم)

با در اختیار داشتن فراوانی مطلق

در این حالت برای محاسبه میانه به صورت زیر عمل می‌کنیم:

الف) مرتب کردن x_i ها (طبقات جدول) به صورت **صعودی**.
ب) یافتن **محل** میانه: $C_{Md} = \frac{N}{۲} + \frac{۱}{۲}$: **محل میانه**
ج) محاسبه فراوانی **تجمعی** طبقات F_{C_i}: $F_{C_i} = F_i + F_{C_{i-۱}}$
د) یافتن **طبقه میانه دار** (طبقه‌ای که میانه در آن قرار دارد): *اولین طبقه جدول از چپ به راست ، که در آن* $F_{C_i} \geq \frac{N}{۲} + \frac{۱}{۲}$ *باشد.*

تو این فیش و فیشای بعد، می‌خوایم مراحل بالا را در قالب ۳ مثال متفاوت بیان کنیم:

در مثال ۱ تعداد داده‌ها **فرده** $n = ۲۵$

در مثال ۲ تعداد داده‌ها **زوجه** $n = ۲۶$

در هر دو مثال فوق، میانه **در یک طبقه** (طبقه میانه دار) قرار می‌گیرد، ولی در مثال ۳، میانه **در فاصلهٔ بین دو طبقه** قرار می‌گیرد.

بدین ترتیب شما با انواع حالات ممکن در محاسبه میانه آشنا خواهید شد:

(ادامه تو فیش بعد)

حل مثال: **پاسخ: گزینه ۴**

x_i	۴	۱	۰	۷	
F_i	۳	۸	۵	۹	$N = ۲۵$

الف) صعودی مرتب کردن طبقات (x_i ها):

(این کارو تو جدول پشت این فیش انجام داده‌ایم).

ب) یافتن **محل** میانه:

محل میانه : $C_{Md} = \frac{N}{۲} + \frac{۱}{۲} \xrightarrow{N = \sum F_i = ۲۵}$

۳(اُمین داده: $C_{Md} = \frac{۲۵}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۱۲/۵ + ۰/۵ = ۱۳$: **محل میانه**

یعنی دادهٔ ۱۳اُمی، میانه است.

ج) محاسبه فراوانی **تجمعی** طبقات (F_{C_i}):

که در جدول پشت فیش مشخص شده.

د) یافتن **طبقه میانه‌دار: اولین** طبقه‌ای که در آن $F_{C_i} \geq \frac{N}{۲} + \frac{۱}{۲}$ است: $(F_{C_i} \geq ۱۳)$، یعنی طبقه **دوم**: $(x = ۱)$ طبقه میانه داره:

(ادامه تو پشت فیش)

(دادهٔ ۶اُم تا ۳۱اُم) (دادهٔ اول تا ۵اُم)

x_i **صعودی**	۰	۱	۴	۷	
F_i	۵	۸	۳	۹	$\sum F_i = N = ۲۵$
F_{C_i}	۵	(۸+۵) $\boxed{۱۳}$	(۳+۱۳) ۱۶	(۹+۱۶) ۲۵	

همان طور که در جدول بالا مشخص شده است:

از داده اول تا ۵اُم در طبقه اول $(x = ۰)$ *قرار گرفته*

و از دادهٔ ۶اُم تا ۳۱اُم در طبقه دوم $(x = ۱)$

کد: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰ ۱۱ ۱۲ ۱۳

$$x_i = \underbrace{۰ , ۰ , ۰ , ۰ , ۰}_{\text{طبقه } \textbf{اول}} , \underbrace{۱ , ۱ , ۱ , ۱ , ۱ , ۱ , ۱ , \boxed{۱}}_{\text{طبقه } \textbf{دوم}} , ۴ , ۴ , ۴ , ...$$

بنابراین میانه (دادهٔ ۱۳اُم) در طبقه دوم قرار می‌گیرد، پس طبقه دوم $(x = ۱)$ **طبقه میانه دار** *است. بنابراین میانه برابر* $\boxed{x = ۱}$ *است، زیرا دقیقاً در وسط مشاهدات قرار می‌گیرد (۱۲ مشاهده قبلش و ۱۲ مشاهده نیز بعدش قرار میگیرن).*

«نحوهٔ محاسبه میانه در داده‌های نوع دوم (حجم زیاد، تنوع کم)

با داشتن فراوانی مطلق»

توضیح: در مثال ۱ (در فیش قبل)، تعداد داده‌ها **فرد** بود $(n = ۲۵)$، اما حالا در مثال ۲، حالتی را برر سی می‌کنیم که تعداد داده‌ها **زوج** ا ست $(n = ۲۶)$:

مثال ۲: *میانه در جدول زیر کدام است؟*

x_i	۴	۱	۰	۷
F_i	۸	۴	۵	۹

۱) ۶/۵ ۲) ۴

۳) ۰/۵ ۴) ۱

آمار و احتمال، آموزشگاه پارسه، محسن طورانی، ص ۲۷ و ۲۸

پاسخ: گزینه ۲

x_i	۴	۱	۰	۷	
F_i	۸	۴	۵	۹	$N=۲۶$

گام ۱) مرتب کردن طبقات (x_i ها) به صورت صعودی (غیرنزولی)

(به جدول فیش بعد توجه کنین)

گام ۲) یافتن محل میانه:

$$C_{Md}=\frac{N}{۲}+\frac{۱}{۲}\xrightarrow{N=\sum F_i=۲۶}$$: **محل** میانه

$$C_{Md}=\frac{۲۶}{۲}+\frac{۱}{۲}=۱۳+۰/۵=۱۳/۵$$ **۱۳/۵(اُمین داده:**

یعنی میانه، دادهٔ ۱۳/۵اُمی است. یعنی چون تعداد داده‌ها **زوج** است، پس **دو** دادهٔ ۱۳اُم و ۱۴اُم در وســـط قرار می‌گیرند، بنابراین میانه در **بین این دو داده** قرار می‌گیرد (یعنی ۱۳/۵اُمین داده).

گام ۳) یافتن طبقه میانه دار: از چپ به راست، اولین طبقه‌ای که در آن فراوانی تجمعی **بزرگتر یا مساوی** $C_{Md}=۱۳/۵$ **است** $(F_{C_i}\geq\frac{N}{۲}+\frac{۱}{۲}=۱۳/۵)$**، یعنی طبقه سوم** $(x=۴)$ **را به عنوان طبقه میانه دار انتخاب می‌کنیم.** **(ادامه تو فیش بعد)**

کد: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰ ۱۱ ۱۲ ۱۳ ۱۴ ۱۵ ۱۶ ۱۷

x_i: ۰ , ۰ , ۰ , ۰ , ۰ , ۱ , ۱ , ۱ , ۱ , ۴ , ۴ , ۴ , $\boxed{۴}$, $\boxed{۴}$, ۴ , ۴ , ۴ , ۷,۷,...

طبقه **اول** طبقه **دوم** طبقه **سوم**

همون طور که می‌بینین، چون داده ۱۳/۵ اُمی (میانه) **بین** دو دادهٔ ۱۳ اُم $(x = ۴)$ و ۱٤ اُم $(x = ۴)$ است، پس میانه **در وسط آنها** یعنی **بین** $x_{۱۴} = ۴ , x_{۱۳} = ۴$ قرار می‌گیره، یعنی در واقع میانه، میانگین این دو دادهٔ وسط است:

گام ۴) محاسبه میانه:

$$\text{Md}: \textbf{میانه} = \textbf{میانگین دو دادهٔ وسط} = \frac{x_{۱۳} + x_{۱۴}}{۲} = \frac{۴+۴}{۲} = \frac{۸}{۲} = ۴$$

روش سریعتر:

تو گام ۲ فهمیدیم که میانه، ۱۳/۵ اُمین داده است، یعنی میانه دقیقاً در وسط دادهٔ ۱۳ اُم و ۱٤ اُم قرار داره.

با نگاه به جدول می‌بینیم که از دادهٔ ۱۰ اُم تا ۱۷ اُم، همگی در طبقه سوم $(x = ۴)$ قرار دارن، پس نتیجه می‌گیریم که داده‌های ۱۳ اُم و ۱٤ اُم هم در همین طبقه $(x = ۴)$ قرار دارن و بنابراین مقدار هر دوی اونا مساوی ٤ است. در نتیجه نقطه وسط اونا هم حتماً مساوی ٤ خواهد شد، یعنی میانه مساوی ٤ است ،به همین راحتی، به همین خوش مزگی!!!

(ادامه تو پشت فیش)

(دادهٔ اول تا ۵ اُم) (دادهٔ ۱۰ اُم تا ۱۷ اُم)

(۶ اُم تا ۹ اُم)

x_i صعودی	۰	۱	$\boxed{۴}$	۷	
F_i	۵	۴	۸	۹	$\sum F_i = N = ۲۶$
F_{C_i}	۵	(۴+۵) $\boxed{۹}$	(۸+۹) ۱۷	(۹+۱۷) ۲۶	

یادآوری:

برای محاسبه فراوانی **تجمعی** هر طبقه (F_{C_i})، فراوانی **مطلق** آن طبقه (F_i) را با فراوانی **تجمعی طبقه قبلش** $(F_{C_{i-۱}})$ جمع می‌کنیم:

$$F_{C_i} = F_i + F_{C_{i-۱}} \xrightarrow{\text{مثلاً در طبقه ۲}} F_{C_۲} = F_۲ + F_{C_۱} = ۴ + ۵ = ۹$$

توجه: در این مثال و مثال فیش قبل (مثال ۱)، ما حالتی را بررسی کردیم که میانه دقیقاً **در یک طبقه** (x_i) قرار می‌گرفت (**نه بین دو طبقه**) ولی تو فیش بعد (در مثال ۳) حالتی را بررسی می‌کنیم که میانه **بین** دو طبقه (**بین دو** x_i **متمایز**) قرار می‌گیره.

«نحوهٔ محاسبه میانه در داده‌های نوع دوم (حجم زیاد، تنوع کم) با داشتن فراوانی مطلق»

مثال ۳: *میانه در جدول زیر کدام است؟*

x_i	۴	۱	۰	۷
F_i	۳	۸	۵	۱۰

۱) ۴ ۲) ۰/۵

۳) ۲/۵ ۴) ۶

آمار و احتمال، آموزشگاه پارسه، محسن طورانی، ص ۲۷ و ۲۸

پاسخ: گزینه ۳

x_i	۴	۱	۰	۷	
F_i	۳	۸	۵	۱۰	$N=۲۶$

گام ۱) صعودی کردن طبقات (x_i ها): جدول صعودی شده در فیش بعد رسم شده.

گام ۲) یافتن محل میانه:

$$\textbf{محل میانه}: C_{Md}=\frac{N}{۲}+\frac{۱}{۲} \xrightarrow{N=\sum F_i=۲۶}$$

$$C_{Md}=\frac{۲۶}{۲}+\frac{۱}{۲}=۱۳/۵ \Rightarrow$$ میانه ۱۳/۵اُمین داده است.

کد: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰ ۱۱ ۱۲ ۱۳ ۱۴ ۱۵ ۱۶

x_i: ۰ , ۰ , ۰ , ۰ , ۰ , ۱ , ۱ , ۱ , ۱ , ۱ , ۱ , ۱ , $\boxed{۱}$, $\boxed{۴}$, ۴ , ۴ , ۷,۷,...

طبقه اول — طبقه دوم — طبقه سوم

گام ۳) یافتن طبقه میانه دار:

میانه، ۱۳/۵اُمین دادهٔ ماست، یعنی میانه **دقیقاً در وسط** دادهٔ ۱۳اُم و ۱۴اُم قرار داره. خب، با نگاه به جدول فیش بعد می‌بینیم که:

(ادامه تو فیش بعد)

اولاً: دادهٔ ۱۳ اُم در طبقه دوم (x=۱) قرار داره، پس مقدار دادهٔ ۱۳ اُم مساوی ۱ است: $\boxed{x_{۱۳} = ۱}$

ثانیاً: دادهٔ ۱٤ اُم در طبقه سوم ($x = ۴$) قرار داره، پس مقدارش مساوی ٤ است: $\boxed{x_{۱۴} = ۴}$

خب، پس اینکه گفتیم میانه دقیقاً در وسط داده ۱۳اُم و ۱٤اُم قرار داره، یعنی میانه دقیقاً در وســط $x = ۱$, $x = ۴$ قرار داره، یعنی برای محا سبه میانه، باید میانگین $x = ۱$, $x = ۴$ (یعنی همون نقطه وسط $x = ۱$, $x = ۴$) رو بدست بیاریم:

(اول تا ۵اُم) (۶اُم تا ۱۳اُم) (۱۴اُم تا ۱۶اُم)

x_i صعودی	۰	۱	۴	۷	
F_i	۵	۸	۳	۱۰	$\sum F_i = N$
F_{C_i}	۵	(۸+۵) ۱۳	(۳+۱۳) ۱۶	(۱۰+۱۶) ۲۶	

گام ۴) محاسبه مقدار میانه:

$$\textbf{میانه}: Md = \frac{x_{۱۳} + x_{۱۴}}{۲} = \frac{۱ + ۴}{۲} = \frac{۵}{۲} = ۲/۵ \Rightarrow \boxed{Md = ۲/۵}$$

نجوا با خداوند:

خدایا تا وقتی شما پشتم هستید، دیگر مهم نیست چه کسانی جلویم ایستاده‌اند،

تا وقتی تکیه ام به شماست، احساس کوهی را دارم که زلزله هم تکانش نمی‌دهد،

تا وقتی دســـت یاری شـــما را حس می‌کنم، معنی بی کســـی و بی‌پناهی را نمی‌فهمم،

و تا وقتی به من اجازه می‌دهید دوست‌تان باشم، دیگر برایم مهم نیست چه کسانی برای رفاقت دست رد به سینه‌ام می‌زنند.

(حسابداری ۸۲)

جمعیت خانواده‌های یک روستا به صورت زیر است:

جمعیت خانواده	۱	۲	۳	۴	۵	۶	جمع
تعداد	۵	۱۰	۴۰	۲۵	۱۵	۵	۱۰۰

میانه جمعیت خانواده، چقدر است؟

۱) ۳

۲) ۳۲/۵

۳) ۳/۵

۴) ۴

جواب: گزینه «۱»

گام ۱) صعودی کردن طبقات (x_i ها): تو این سؤال، به طور خودبخود، طبقات ما حالت صعودی دارن.

(۱ تا ۵ اُمی) (۶ تا ۵۵ اُمی) (۱۶ اُم تا ۵۵ اُمی)

x_i صعودی	۱	۲	۳	۴	۵	۶	
F_i	۵	۱۰	۴۰	۲۵	۱۵	۵	$\sum F_i = N = ۱۰۰$
F_{C_i}	۵	(۱۰+۵) ۱۵	(۴۰+۱۵) $\boxed{۵۵}$				

گام ۲) یافتن محل میانه:

$$C_{Md} = \frac{N}{۲} + \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۱۰۰}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۵۰ + ۰/۵ = ۵۰/۵ \ : \textbf{محل میانه}$$

یعنی میانه، ۵۰/۵ اُمین داده اســـت و این بدین مفهومه که میانه دقیقاً در وسط دو دادهٔ ۵۰اُم و ۵۱اُم است.

خب، حالا با نگاه به جدول (و سطر F_{C_i}) می‌بینیم که دادهٔ ۱۶ تا ۵۵اُم در طبقه ســـوم $(x = ۳)$ قرار دارن، پس مســـلماً دادهٔ ۵۰/۵ اُم هم باید در همین طبقه $(x = ۳)$ قرار داشـــته باشـــه، بنابراین مقدار دادهٔ ۵۰/۵اُم هم حتماً مساوی ۳ است، یعنی:

میانه: دادهٔ ۵۰/۵اُم $\Longrightarrow$ طبقه سوم $\Rightarrow \boxed{Md = x = ۳}$

(ادامه تو فیش بعد)

توجه: روش دیگه برای بدست آوردن میانه، اینه که بگیم:

اولین طبقه‌ای که فراوانی **تجمعی**اش **بزرگتر یا مساوی** $\frac{N}{۲}+\frac{۱}{۲}=۵۰/۵$ باشه: $(F_{C_i} \geq ۵۰/۵)$، میانه ماست.

خب، با نگاه به جدول می‌بینیم که: اولین طبقه‌ای از جدول که در اون $F_{C_i} \geq ۵۰/۵$ است، طبقه سومه $(x=۳)$، پس میانه برابره با:

$$F_{C_۳}=۵۵ \geq ۵۰/۵ \xrightarrow{\text{طبقه سوم}} \boxed{Md=x=۳}$$

دانستنیهای جالب و کاربردی:

۱) برای درخشندگی مو یک قاشق سرکه به موهای خود زده، سپس آب بکشید.

۲) برای پاک کردن آدامس از روی لباس لباس را به مدت یک ساعت در فریزر قرار دهید.

۳) برای جلوگیری از ریزش اشک هنگام پوست کندن پیاز آدامس بجوید.

۴) برای جوشاندن سریع تخم مرغ به آب آن نمک اضافه کنید.

۵) برای امتحان تازگی تخم مرغ آن را در آب بگذارید اگر به صورت افقی قرار گرفت تازه است.
اگر به صورت کج قرار گرفت ۳-٤ روزه است.
و اگر عمودی قرار گرفت ۱۰ روزه است.
و اگر برروی سطح آب ایستاد، کهنه است.

(حسابداری ۸۳)

میانه داده‌های جدول زیر کدام است؟

x_i	۵	۱۲	۱۵	۲۰
f_i	۶	۸	۱۲	۴

۱) ۱۰

۲) ۱۳/۵

۳) ۱۵

۴) هیچکدام

جواب: گزینه «۳»

توجه: در این ســـؤال منظور از f_i در واقع همان فراوانی **مطلق** (F_i) است، چون:

اولاً: این فراوانی‌ها اعداد صحیح و بزرگتر از یک هستند.

ثانیاً این فراوانی‌ها به صورت اعشاری (یعنی بین صفر و یک) نیستن، پس نمی‌تونن فراوانی نسبی باشن.

گام ۱) صعودی کردن طبقات: طبقات ما خودشون حالت صعودی دارن.

(۷اُم تا ۴(اُم) (۲۴ اُم تا ۲۶ اُم)

x_i صعودی	۵	۱۲	۱۵	۲۰	
F_i	۶	۸	۱۲	۴	$\sum F_i = N = ۳۰$
F_{C_i}	۶	۸+۶ ۱۴	۱۲+۱۴ $\boxed{۲۶}$		

گام ۲) یافتن محل میانه:

$$\boxed{\textbf{محل میانه}: C_{Md} = \frac{N}{۲} + \frac{۱}{۲}} \Rightarrow \frac{۳۰}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۱۵ + ۰/۵ = ۱۵/۵$$

یعنی میانه، داده **۱۵/۵**(اُمی است. **(ادامه تو فیش بعد)**

خب، با نگاه به جدول بالا می‌بینیم که از دادهٔ ۱۵اُم تا ۲۶اُم در طبقه سوم $(x = ۱۵)$ قرار دارن، پس نتیجه می‌گیریم که دادهٔ ۱۵/۵اُمی هم تو همین طبقه $(x = ۱۵)$ قرار داره، یعنی:

میانه: دادهٔ ۱۵/۵اُم $\xrightarrow{\text{طبقه سوم}} \Rightarrow \boxed{Md = x = ۱۵}$

راه حل دوم:

میانه برابره با **اولین** طبقه‌ای که فراوانی **تجمعیش** بزرگتر یا مساوی $\frac{N}{۲} + \frac{۱}{۲}$ است:

$$\boxed{F_{C_i} \geq \frac{N}{۲} + \frac{۱}{۲}} \rightarrow F_{C_i} \geq ۱۵/۵ \xrightarrow{\text{طبقه سوم}} F_{C_۳} = ۲۶ \geq ۱۵/۵$$

یعنی اولین طبقه‌ای که F_{C_i} اون بزرگتر یا مساوی ۱۵/۵ است، طبقه سومه $(x = ۱۵)$، پس: $\boxed{Md = x = ۱۵}$

امام علی علیه السلام
لا ادَبَ مَعَ غَضَبٍ
غررالحکم - ح ۱۰۵۲۹
با خشم ، تربیت ممکن نیست.
چون خشم و غضب حماقتی مُزمن نیست
حسد و قهر و غضب، از صفت مُومن نیست
فرمود امام عارفان، حضرت عشق
در حالت خشم، تربیت مُمکن نیست
4Ohadis.vcp.ir

«نحوهٔ محاسبه میانه در داده‌های نوع دوم (حجم زیاد، تنوع کم)

با در اختیار داشتن فراوانی نسبی»

مثال: *میانه در جدول داده‌های زیر کدام است؟*

x_i	۴	۱	۰	۷
f_i	۰/۳	۰/۱	۰/۴	۰/۲

۱) ۴

۲) ۲/۵

۳) ۱

۴) صفر

آمار و احتمال، آموزشگاه پارسه، محسن طورانی،ص ۲۸

«نحوهٔ محاسبه میانه در داده‌های نوع دوم (حجم زیاد، تنوع کم)

با داشتن فراوانی نسبی»

در این حالت برای محاسبه میانه به صورت زیر عمل می‌کنیم:

گام ۱) مرتب کردن طبقات (x_iها) به صورت ***صعودی (غیرنزولی)***

گام ۲) محاسبه فراوانی ***تجمعی نسبی*** طبقات (f_{C_i}):

$$f_{C_i} = f_i + f_{C_{i-1}}$$

گام ۳) *یافتن طبقه میانه دار: اولین* طبقه‌ای که فراوانی تجمعی نسبی آن ***بیشتر از*** $\frac{1}{2} = 0/5$ باشد ($f_{C_i} \geq 0/5$)، بیانگر میانه داده‌ها است، زیرا میانه مشاهده‌ای است که ۵۰ درصد یا ۰/۵ مشاهدات قبل از آن قرار دارند.

مثال: میانه در جدول داده‌های زیر کدام است؟

x_i	۴	۱	۰	۷
f_i	۰/۳	۰/۱	۰/۴	۰/۲

۱) ۴ ۲) ۲/۵

۳) ۱ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۳ *(ادامه تو فیش بعد)*

توجه: *چون فراوانی‌ها بصورت اعشاری‌اند و جمع آنها برابر یک است، پس بیانگر فراوانی نسبی هستند.*

گام ۱) ابتدا طبقات (x_i ها) را **به ترتیب صعودی** مرتب می‌کنیم (به صورت جدول زیر):

گام ۲) فراوانی **تجمعی نسبی** طبقات را بدست می‌آوریم:

x_i **صعودی**	۰	$\boxed{۱}$	۴	۷	
f_i	۰/۴	۰/۱	۰/۳	۰/۲	$\sum f_i = ۱$
f_{C_i}	۰/۴	$\boxed{۰/۵}$	۰/۸	۱	

گام ۳) اولین طبقه‌ای که در آن $f_{C_i} \geq ۰/۵$ باشد، طبقه دوم ($x_۲ = ۱$) است. بنابراین میانه در این طبقه قرار دارد و مقدار آن برابر $x = ۱$ است: $\boxed{Md = ۱}$

ایستگاه تغذیه:

برای داشتن تغذیه سالم باید باهوش باشیم و با آگاهی انتخاب کنیم.

*مثلاً برای دریافت کلسیم الزامی ندارد خودمان را مجبور به مصرف شیر کنیم؛ اگر شیر را دوست نداریم، می توانیم همین کلسیم را با مصرف **بادام، کلم** یا حتی **استخوان ماهی** جبران کنیم.*

(مهم):

«نحوهٔ محاسبه میانه در داده‌های نوع سوم (حجم زیاد، تنوع زیاد)

با داشتن فراوانی مطلق»

مثال ۱ (طبقات پیوسته): *در جدول زیر میانه برابر است با:*

حدود	۱-۵	۵-۹	۹-۱۳	۱۳-۱۷
F_i	۵	۱۰	۳	۲

۱) ۵ ۲) ۷

۳) ۹ ۴) ۱۳

آمار و احتمال، آموزشگاه پارسه، محسن طورانی، ص ۲۹

نحوهٔ محاسبه میانه در داده‌های نوع سوم (حجم زیاد، تنوع زیاد) با داشتن فراوانی مطلق

در مورد داده‌های نوع ســـوم، به دلیل تنوع زیاد آنها، امکان در نظر گرفتن یک طبقه مجزا برای هر نوع داده (x_i) وجود نداره، بنابراین در این حالت میایم داده‌ها را در قالب طبقاتی که دارای حد پایین و بالا (L-U) هستند، به صورت **فاصله‌ای یا پیوسته** طبقه‌بندی می‌کنیم.

مراحل محاسبه میانه برای این نوع از داده‌ها به صورت زیره:

گام ۱) محاسبه فراوانی **تجمعی** طبقات: $F_{C_i} = F_i + F_{C_{i-1}}$

گام ۲) یافتن **محل میانه (طبقه میانه دار):** اولین طبقه‌ای از چپ به راست که فراوانی **تجمعی**اش بیشتر یا مساوی $\frac{N}{2}$ باشد $(F_{C_i} \geq \frac{N}{2})$ طبقه میانه دار است.

گام ۳) یافتن **مقدار** میانه از رابطه زیر:

$$\text{میانه} = \text{حد پایین واقعی طبقه میانه دار} + \left(\frac{\frac{N}{2} - \text{فراوانی تجمعی طبقه قبل}}{\text{فراوانی مطلق طبقه میانه دار}}\right) \times \text{طول طبقه (فاصله طبقه)}$$

$$\Rightarrow Md = L_{Md} + \frac{\frac{N}{2} - F_{C_{i-1}}}{F_{Md}} \times I$$

(ادامه تو فیش بعد)

L_{Md}: حد پایین **واقعی** طبقه میانه دار

$F_{C_{i-۱}}$: فراوانی **تجمعی** طبقه قبل از طبقه میانه دار

F_{Md}: فراوانی **مطلق** طبقه میانه دار

I: فاصله طبقات (طول طبقات) است که در طبقات پیوسته، با عرض طبقات نیز برابر است.

تذکر: اگر طبقات **گسسته** باشند، بایستی بعد از اجرای گام ۲، یعنی بعد از یافتن طبقه میانه دار، آن را **پیوسته** کنیم. یعنی باید حدود **واقعی** طبقه میانه دار را بدست بیاریم و بعدش گام (۳) را انجام دهیم.

برای درک بهتر مراحل فوق ۲ مثال را ذکر می‌کنیم که مثال ۱، مربوط به طبقات پیوسته و مثال ۲ مربوط به طبقات گسسته است که مربوط به فیش بعدی است:

مثال ۱ (طبقات پیوسته): **پاسخ: گزینه ۲**

گام ۱) محاسبه فراوانی تجمعی طبقات: $\boxed{F_{C_i} = F_i + F_{C_{i-۱}}}$

گام ۲) یافتن طبقه میانه دار: اولین طبقه‌ای که در آن $F_{C_i} \geq \frac{N}{۲} = \frac{۲۰}{۲} = ۱۰$ باشه، طبقه (۹-۵) است، پس این طبقه، طبقه میانه داره.

((ادامه تو پشت فیش))

توجه: چون طبقات ما **پیوسته** هستن، پس دیگه نیازی به یافتن حدود واقعی طبقه میانه دار نیست.

گام ۳) یافتن مقدار میانه از رابطه زیر:

Md= حد پایین **واقعی** طبقه میانه دار + $\frac{\frac{N}{۲} - F_{C_{i-۱}}}{F_i}$ × فاصله (طول) طبقات

$$Md = L_{Md} + \frac{\frac{N}{۲} - F_{C_{i-۱}}}{F_i} \times I$$

$$Md = ۵ + \frac{\frac{۲۰}{۲} - ۵}{۱۰} \times ۴ \Rightarrow$$

$$Md = ۵ + \frac{۱۰ - ۵}{۱۰} \times ۴ \Rightarrow ۵ + \frac{\cancel{۵}}{\cancel{۱۰}} \times ۴ \Rightarrow$$

$$Md = ۵ + \frac{۱}{۲} \times ۴ \Rightarrow ۵ + ۲ \Rightarrow \boxed{Md = ۷}$$

حدود	۱-۵	۵-۹	۹-۱۳	۱۳-۱۷	
F_i	۵	۱۰	۳	۲	$\sum F_i = N = ۲۰$
F_{C_i}	۵	۱۵	۱۸	۲۰	

(مهم):

«نحوهٔ محاسبه میانه در داده‌های نوع سوم (حجم زیاد، تنوع زیاد)

با داشتن فراوانی مطلق»

مثال ۲ (طبقات گسسته): *در جدول زیر، مقدار میانه کدام است؟*

حدود طبقات	۵-۸	۹-۱۲	۱۳-۱۶	۱۷-۲۰
F_i	۵	۱۲	۱۴	۱۰

۱) ۱۴ ۲) ۱۳

۳) ۱۳/۵ ۴) ۱۴/۲

آمار و احتمالات، آموزشگاه مدرسان شریف،ص ۱۵

پاسخ: گزینه ۳

گام ۱) محاسبه فراوانی تجمعی طبقات (به صورت جدول زیر).

گام ۲) یافتن محل میانه (طبقه میانه دار): اولین طبقه‌ای که در آن $F_{C_i} \geq \frac{N}{۲} = \frac{۴۱}{۲} = ۲۰/۵$ برقرار است، طبقه (۱۶-۱۳) است، و این طبقه، طبقه میانه داره.

توجه: با توجه به گسسته بودن طبقات، قبل از انجام گام سوم، باید اول طبقه میانه دار را پیوسته کنیم:

گام ۳) یافتن مقدار میانه:

$$\boxed{Md = L_{Md} + \frac{\frac{N}{۲} - F_{C_{i-۱}}}{F_i} \times I} \Rightarrow$$

$$Md = ۱۲/۵ + \frac{\frac{۴۱}{۲} - ۱۷}{۱۴} \times ۴ \Rightarrow ۱۲/۵ + \frac{۲۰/۵ - ۱۷}{۱۴} \times ۴ \Rightarrow$$

$$Md = ۱۲/۵ + \frac{۳/۵}{۱۴} \times ۴ \Rightarrow ۱۲/۵ + \frac{۱۴}{۱۴} \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{میانه} : Md = ۱۲/۵ + ۱ = ۱۳/۵}$$

CL	۵-۸	۹-۱۲	۱۳-۱۶	۱۷-۲۰	
F_i	۵	۱۲	۱۴	۱۰	$\sum F_i = N = ۴۱$
F_{C_i}	۵	۱۷	۳۱	۴۱	

(مدیریت ۷۳)

میانه داده‌های جدول زیر کدام است؟

CL (فاصله طبقات)	۲۰-۲۹	۳۰-۳۹	۴۰-۴۹
F_i (فراوانی)	۳	۶	۷

۱) ۳۴/۶

۲) ۳۴/۵

۳) ۳۷/۸

۴) ۳۷/۳

پاسخ: گزینه ۳

گام ۱) محاسبه فراوانی تجمعی طبقات (به صورت جدول زیر):

CL	۲۰-۲۹	طبقه میانه دار ۳۰ – ۳۹	۴۰-۴۹	
F_i	۳	$\boxed{۶}$	۷	$\sum F_i = N = ۱۶$
F_{C_i}	$\boxed{۳}$	۹	۱۶	

گام ۲) یافتن محل میانه (طبقه میانه دار):

$$F_{C_i} \geq \frac{N}{۲} = \frac{۱۶}{۲} = ۸ \Rightarrow$$

$\xrightarrow{\text{طبقه دوم}} F_{C_۲} = ۹ \geq ۸ \Rightarrow$ پس طبقه دوم، طبقه میانه دار است

گام ۳) پیوسته کردن طبقه میانه دار: کافیه ۰/۵ واحد از حد پایین کم و ۰/۵ واحد به حد بالای طبقه میانه دار اضافه کنیم:

$$(۳۰ - ۳۹) \xrightarrow{\pm ۰/۵} \boxed{(۲۹/۵ - ۳۹/۵)}$$

گام ۴) محاسبه مقدار میانه:

$$\boxed{Md = L_{Md} + \frac{\frac{N}{۲} - F_{C_{i-۱}}}{F_i} \times I}$$

$$Md = ۲۹/۵ + \frac{\frac{۱۶}{۲} - ۳}{۶} \times ۱۰ \Rightarrow ۲۹/۵ + \frac{۸ - ۳}{۶} \times ۱۰ \Rightarrow$$

$$Md = ۲۹/۵ + \frac{۵}{۶} \times ۱۰ \Rightarrow ۲۹/۵ + \frac{۵۰}{۶} \Rightarrow ۲۹/۵ + ۸/۳ \Rightarrow \boxed{Md = ۳۷/۸}$$

بسیار مهم:

(حسابداری و مدیریت ۸۶)

میانه در توزیع آماری ۵۰ مشاهده دسته‌بندی شده برابر ۴۱ می‌باشد. اگر طول دسته‌ها ۵، فراوانی طبقه میانه دار ۱۰ و مجموع فراوانی‌های ماقبل طبقه میانه دار برابر ۱۸ باشد، حدود دسته میانه دار کدام است؟

۱) (۴۱/۵ و ۳۶/۵)

۲) (۴۲ و ۳۷)

۳) (۴۲/۵ و ۳۷/۵)

۴) (۴۳ و ۳۸)

پاسخ: گزینه ۳

گام ۱) نوشتن داده‌های مسئله:

تعداد داده‌ها : $N = ۵۰$

میانه : $Md = ۴۱$

طول دسته : $I = ۵$

فراوانی طبقه میانه دار : $F_i = F_{Md} = ۱۰$

فراوانی تجمعی دسته ماقبل میانه : $F_{C_{i-۱}} = F_{C_{Md-۱}} = ۱۸$

حدود دسته میانه دار : $(L_{Md} - U_{Md}) = ?$

گام ۲) استفاده از فرمول میانه:

$$\boxed{Md = L_{Md} + \frac{\frac{N}{۲} - F_{C_{i-۱}}}{F_i} \times I} \Rightarrow$$

$$۴۱ = L_{Md} + \frac{\frac{۵۰}{۲} - ۱۸}{۱۰} \times ۵ \Rightarrow$$

$$۴۱ = L_{Md} + \frac{۲۵ - ۱۸}{۱۰} \times ۵ \Rightarrow \quad ۴۱ = L_{Md} + \frac{۷ \times ۵}{۱۰} \Rightarrow$$

$$۴۱ = L_{Md} + \frac{۳۵}{۱۰} \Rightarrow ۴۱ = L_{Md} + ۳/۵ \Rightarrow ۴۱ - ۳/۵ = L_{Md} \Rightarrow$$

(ادامه تو فیش بعد)

حد پایین **واقعی** طبقه میانه دار: $L_{Md} = ۳۷ / ۵$

خب، چون فاصله حد پایین هر طبقه از حد بالای خودش به اندازه طول طبقات (I) است، پس برای بدست آوردن حد **بالای** طبقه میانه دار، کافیه که حد پایین این طبقه رو به طول طبقات (I=۵) اضافه کنیم:

حد بالای **واقعی** طبقه میانه دار: $U_{Md} = L_{Md} + I = ۳۷ / ۵ + ۵ = ۴۲ / ۵$

بنابراین:

حدود **واقعی** طبقه میانه دار: $(۳۷ / ۵, ۴۲ / ۵)$

ایستگاه سلامت:

کیسه های نایلونی و نون داغ!

شاید شماها هم از اون دسته افرادی باشید که موقعی که بعد از خریدن نان، اونو تو کیسه نایلونی قرار میدن!

مشکلی که اینجاست اینه که نون داغ با ترکیبات داخل نایلون، واکنش های شیمیایی مضری میره که باعث سرطان یا مشکلات کبدی میشه.

خب، حالا راه حل چیه؟

بهترین راه اینه که نون رو که خریدیم اول بذاریم کمی خنک بشه و بعد اونو داخل پارچه سفید تمیز و بدون چاپ و نوشته حمل کنیم (بهتره از پارچه رنگی یا روزنامه هم استفاده نکنیم، چون رنگهای اونا به نون جذب میشه و دوباره همون داستان قبلی پیش میاد).

با خودمون مهربون تر باشیم.

بسیار مهم:

(برنامه ریزی شهری ۸۷)

در ۶۰ مشاهده دسته‌بندی شده، میانه ۲۳، فاصله طبقات ۳ و فراوانی طبقه میانه دار ۱۲ و فراوانی تجمعی طبقه میانه دار ۳۸ می‌باشد. حدود دسته میانه دار کدام است؟

۱) (۲۴ و ۲۱)

۲) (۲۵ و ۲۲)

۳) (۲۴/۵ و ۲۱/۵)

۴) (۲۵/۵ و ۲۲/۵)

پاسخ: گزینه ۲

گام ۱) نوشتن داده‌های مسئله:

تعداد داده‌ها: $N = ۶۰$

میانه: $Md = ۲۳$

طول دسته: $I = ۳$

فراوانی طبقه میانه دار: $F_i = F_{Md} = ۱۲$

فراوانی **تجمعی** طبقه میانه دار: $F_{C_i} = F_{C_{Md}} = ۳۸$

حدود دسته میانه دار: $(L_{Md} - U_{Md}) = ?$

گام ۲) استفاده از فرمول میانه:

میانه: $$\boxed{Md = L_{Md} + \frac{\frac{N}{۲} - F_{C_{i-۱}}}{F_i} \times I}$$

برای استفاده از فرمول فوق، ابتدا باید $F_{C_{i-۱}}$ (فراوانی تجمعی طبقه ماقبل میانه دار) را پیدا کنیم:

= فراوانی تجمعی یک طبقه

فراوانی تجمعی طبقه ماقبلش + فراوانی مطلق اون طبقه

$$\Rightarrow F_{C_i} = F_i + F_{C_{i-۱}}$$

(ادامه تو فیش بعد)

پس می‌تونیم بنویسیم:

$$۳۸ = ۱۲ + F_{C_{i-۱}} \Rightarrow F_{C_{i-۱}} = ۳۸ - ۱۲ \Rightarrow \boxed{F_{C_{i-۱}} = ۱۶}$$

خب، حالا تازه می‌تونیم بریم سراغ فرمول میانه:

$$۲۳ = L_{Md} + \frac{\frac{۶۰}{۲} - ۲۶}{۱۲} \times ۳ \Rightarrow$$

$$۲۳ = L_{Md} + \frac{۳۰ - ۲۶}{۱۲} \times ۳ \Rightarrow ۲۳ = L_{Md} + \frac{۴}{۱۲} \times ۳$$

$$\Rightarrow ۲۳ = L_{Md} + \frac{۴ \times ۳}{۱۲} \Rightarrow ۲۳ = L_{Md} + \frac{۱۲}{۱۲} \Rightarrow$$

$$۲۳ = L_{Md} + ۱ \Rightarrow L_{Md} = ۲۳ - ۱ \Rightarrow$$

حد پایین **واقعی** طبقه میانه دار: $\boxed{L_{Md} = ۲۲}$

گام ۴) نوشتن حدود طبقه میانه دار:

اگه به حد پایین طبقه میانه دار، فاصـــله طبقات $(I = ۳)$ رو اضافه کنیم به حد بالای طبقه میانه دار می‌رسیم:

$$۲۲ + ۳ = ۲۵ \Rightarrow$$ حد **بالای** واقعی طبقه میانه دار: $U_{Md} = L_{Md} + I$

پس: (۲۲,۲۵) : حدود **واقعی** طبقه میانه دار

ایستگاه تغذیه:

«مصرف کنسروها را محدودتر کنیم»

کنسروها حاوی مواد نگهدارنده زیادی هستند.

(**دقت کنیم که:** این نگهدارنده‌ها در واقع یک نوع سم ضعیف شده هستند تا مانع رشد میکروبها و قارچها شوند، ولی باید بدانیم که مصرف این نگهدارنده‌ها ***برای ما هم ضرر دارد*** و آسیب شدیدی به کبد ما می‌رساند).

پس بیاییم تا جایی که می توانیم از مصرف کنسروها بپرهیزیم یا اینکه فقط در شرایط خاص و موقتی از آنها استفاده کنیم.

تا جایی که امکان دارد از مواد غذایی نگهداری شده در شیشه استفاده کنیم تا کنسروهای فلزی. به خاطر این که امکان دارد عناصر شیمیایی موجود در فلزات به محتویات کنسروها نیز نفوذ کنند.

توجه: بعد از باز کردن کن سرو آن را بلافا صله م صرف کنید. مدت زمان نگهداری کنسرو باز شده نباید بیشتر از ۴۸ ساعت باشد، در غیر اینصورت موجب مسمومیت شدید و حتی مرگ می‌شود.

«محاسبه میانه در داده‌های نوع سوم (حجم زیاد، تنوع زیاد)

با داشتن فراوانی نسبی»

مثال: *با توجه به جدول طبقه‌بندی شده زیر، مقدار میانه کدام است؟*

CL	۱۰-۲۰	۲۰-۳۰	۳۰-۴۰	۴۰-۵۰
f_i	۰/۱	۰/۴	۰/۳	۰/۲

۱) ۲۵

۲) ۳۰

۳) ۲۰

۴) ۴۰

آمار و احتمال، آموزشگاه پارسه، محسن طورانی، ص ۳۰

«محاسبه میانه در داده‌های نوع سوم (حجم زیاد، تنوع زیاد)

با داشتن فراوانی نسبی»

مراحل محاسبه میانه بشرح زیر است:

گام۱) محاسبه **فراوانی تجمعی نسبی** طبقات: $f_{c_i} = f_i + f_{c_{i-1}}$

گام۲) یافتن محل میانه (طبقه میانه‌دار): اولین طبقه‌ای که در آن $f_{C_i} \geq \frac{1}{2} = 0/5$ برقرار است، طبقه میانه‌دار خواهد بود.

تذکر مهم: *در صورت گسسته بودن طبقات، قبل از انجام گام۳، اول باید طبقه میانه‌دار را پیوسته کنیم، یعنی باید حدود **واقعی** طبقه میانه‌دار را بدست آوریم.*

گام۳) یافتن **مقدار میانه** از رابطه زیر:

$$\text{میانه} = \text{حد پایین واقعی طبقه میانه‌دار} + \left(\frac{\left(\frac{1}{2} - \text{فراوانی تجمعی نسبی طبقه قبل میانه‌دار}\right)}{\text{فراوانی نسبی طبقه میانه‌دار}}\right) \times \text{طول طبقه}$$

$$\Rightarrow Md = L_{Md} + \frac{\frac{1}{2} - f_{C_{i-1}}}{f_i} \times I$$

نتیجه مهم: اگر در جدول، بجای فراوانی **مطلق** (F_i)، فراوانی **نسبی** (f_i) را داشتیم، برای محاسبه میانه به همان روش فراوانی مطلق عمل کرده و تنها:

(ادامه تو فیش بعد)

بجای $\frac{N}{۲}$ در فرمول، از $\frac{۱}{۲} = ۰/۵$ استفاده می‌کنیم.

و بجای $F_{C_{i-۱}}$، از $f_{C_{i-۱}}$ و بجای F_i هم از f_i استفاده می‌کنیم.

حل مثال: پاسخ: گزینه ۲

C-L	۱۰-۲۰	۲۰-۳۰	۳۰-۴۰	۴۰-۵۰
f_i	۰/۱	۰/۴	۰/۳	۰/۲

تذکر: قبل از حل سؤال، ابتدا بایستی **نوع فراوانی** را در جدول تشخیص دهیم:

با توجه به اینکه فراوانی‌ها اعشاری‌اند و جمع آنها برابر با یک است: $(\sum f_i = ۱)$

پس با فراوانی‌های **نسبی** سر و کار داریم.

گام۱) محاسبه فراوانی **تجمعی نسبی** (در جدول پشت این فیش).

گام۲) یافتن محل میانه (طبقه میانه‌دار): اولین طبقه‌ای که در آن، $f_{C_i} \geq \frac{۱}{۲} = ۰/۵$ است، طبقه (۳۰-۲۰) است، پس این طبقه، طبقه میانه داره و در نتیجه مقدار میانه در محدودهٔ حد بالا و پایین این طبقه (بین ۲۰ و ۳۰) قرار داره.

گام۳) یافتن مقدار میانه:

$$Md = L_{Md} + \frac{۰/۵ - f_{C_{i-۱}}}{f_i} \times I$$

(ادامه تو پشت فیش)

$$Md = ۲۰ + \frac{۰/۵ - ۰/۱}{۰/۴} \times ۱۰ \Rightarrow ۲۰ + \frac{۰/۴}{۰/۴} \times ۱۰ \Rightarrow$$

$$Md = ۲۰ + (۱ \times ۱۰) \Rightarrow ۲۰ + ۱۰ \Rightarrow \boxed{Md = ۳۰}$$

نکته: قبلاً در مورد مد گفتیم که مقدار مد باید حتماً بین حد پایین و بالای طبقه مد دار قرار داشته باشد.
بطور مشابه در مورد میانه هم می‌تونیم بگیم که مقدار میانه هم باید حتماً بین حد پایین و بالای طبقه میانه‌دار باشد.
در مثال فوق نیز $Md = ۳۰$ در محدوده (۳۰-۲۰) قرار داره.

توجه کنین که: با توجه به نکته بالا، می‌تونستیم از همون اول، گزینه ۴ $(Md = ۴۰)$ رو حذف کنیم، چون مقدارش بین حد پایین و بالای طبقه میانه‌دار (۳۰-۲۰) قرار نداره.

C-L	۱۰-۲۰	طبقه میانه دار: $\boxed{۲۰} - ۳۰$	۳۰-۴۰	۴۰-۵۰	
f_i	۰/۱	$\boxed{۰/۴}$	۰/۳	۰/۲	$\sum f_i = ۱$
f_{C_i}	$\boxed{۰/۱}$	۰/۵	۰/۸	۱	

تذکر مهم: **در اینجا نیز چنانچه طبقات گسسته باشند، پس از یافتن محل میانه (طبقه میانه‌دار)، ابتدا باید طبقه میانه‌دار را پیوسته کنیم و بعدش بریم سراغ گام۳، یعنی محاسبه میانه.** **(ادامه تو فیش بعد)**

راه حل تستی باحال:

نکته تستی: *اگر در سطر فراوانی نسبی تجمعی، مستقیماً خود عدد ۰/۵ رو ببینیم، اون وقت تنها کافیه که حد* **بالای** *اون طبقه رو به عنوان* **میانه** *در نظر بگیریم.*

مثلا در این سؤال، ما مستقیماً می‌تونیم فراوانی نسبی تجمعی $f_{C_i} = ۰/۵$ رو در ستون مربوطه به طبقه دوم (۳۰-۲۰)، ببنیم، پس در این حالت بدون نیاز به هیچ محاسبه‌ای می‌تونیم بگیم که:

میانه = حد بالای طبقه مورد نظر $\Rightarrow Md = ۳۰$

دانستنیهای کاربردی و مفید:

برای خلاص شدن از دست حشرات در هنگام شب برگهای نعنا را نزدیک تخت و بالش و در اطراف اطاق خود قرار دهید.

(مهم):

«**مشخصات میانه** (Md)»

در مورد مشـــخصـــات شـــاخص مرکزی میانه به ســـؤالات زیر پاسخ دهید:

۱. یک جامعه آماری چندتا میانه، چندتا مد و چندتا میانگین می‌تونه داشته باشه؟

۲. در صورتی که به بزرگترین عدد یک سری داده، عدد ثابتی را اضافه کنیم یا از کوچکترین عدد یک سری داده، عدد ثابتی را کم کنیم، میانه چه تغییری خواهد نمود؟ چرا؟

۳. برخلاف مد (نما)، که تابع .....(۱)..... بود، میانه تابع .....(۲)..... است، به عبارت دیگر تا زمانی که تغییرات در داده‌ها، .....(۳)..... را تغییر ندهد، مقدار میانه تغییر نمی‌کند.

آمار و احتمال، آموزشگاه پارسه، محسن طورانی، ص ۳۱
آمار و احتمالات، آموزشگاه مدرسان شریف، ص ۱۶
آمار کاربردی ۱، عالِم تبریز و احمد هژبر، ص ۴۹

مشخصات میانه $(Me = Md)$:

۱. هر جامعه آماری **فقط یک میانه** دارد، یعنی میانه **منحصر بفرد** است و **همیشه** وجود دارد، زیرا در هر نوع جامعه‌ای با تعداد عضوهای فرد یا زوج، **همیشه** می‌تونیم **یک نقطه** را در وسط داده‌ها (به عنوان میانه آن داده‌ها) مشخص کنیم.

به عبارت دیگر هیچ وقت داده‌ها، دارای ۲ یا چندین میانه نخواهند بود و هیچ وقت هم پیش نمی‌آید که داده‌ها، میانه نداشته باشند.

اما در مورد مد (نما)، همان طور که قبلاً یاد گرفتیم، جامعهٔ ما ممکن است **۲ یا چندین مد** داشته باشند، یعنی مد برخلاف میانه منحصر بفرد نیست و همچنین مد برخلاف میانه ممکن است اصلاً وجود نداشته باشد (مثل زمانی که فراوانی همه مشاهدات با هم برابر است و در نتیجه مدی وجود نخواهد داشت).

میانگین از این لحاظ شبیه میانه است، یعنی هر جامعه آماری **فقط یک میانگین (حسابی)** دارد، یعنی میانگین **منحصر بفرد** است.

علاوه بر آن، میانگین مانند میانه و برخلاف مد، **همیشه** وجود دارد، زیرا میانگین (حسابی) در واقع همان معدل (متوسط) داده‌ها است، یعنی همیشه می‌توان داده‌ها را با هم جمع زد و بر تعدادشان تقسیم کرد و میانگین حسابی شون رو بدست آورد: **(ادامه تو فیش بعد)**

$$\text{میانگین} : \frac{\sum X_i}{N}$$

۲. اگر به بزرگترین عدد یک سری داده، عدد ثابتی را **اضافه** کنیم، از کوچکترین عدد یک سری داده، عدد ثابتی را **کم** کنیم، چون با این کار **ترتیب داده‌ها تغییر نمی‌کند**، پس این تغییرات، هیچ تاثیری روی میانه نداشته و در نتیجه مقدار آن تغییری نمی‌کند.

مثال:

$$\begin{cases} \boxed{۵},۸,۱۲,۱۷,\boxed{۳۴} \\ \text{میانه} = Md = ۱۲ \end{cases} \xrightarrow[x_{max}=۳۴ \xrightarrow{۱۷} ۴۱]{x_{min}=۵ \xrightarrow{۳} ۲} \begin{cases} \boxed{۲},۸,۱۲,۱۷,\boxed{۴۱} \\ Md = ۱۲ \end{cases}$$

همان‌طور که دیده می‌شود کم کردن عدد ۳ از کمترین مشاهده $(X_{min} = ۵)$ و اضافه کردن عدد ۷ به بزرگترین مشاهده $(X_{max} = ۳۴)$ ***تغییری در ترتیب داده‌ها ایجاد نکرده*** و در نتیجه مقدار میانه $(Md = ۱۲)$ نیز تغییر نمی‌کند.

(ادامه تو پشت فیش)

۳. با توجه به ویژگی ۲ که در بالا به آن اشـــاره کردیم، می‌تونیم بگیم که:

> برخلاف مد (نما) که تابع **فراوانی (بیشترین فراوانی)** است، میانه تابع **ترتیب داده‌ها** است.

به عبارت دیگر تا زمانی که تغییرات در داده‌ها، ترتیب داده‌ها را تغییر ندهد، مقدار میانه تغییر نمی‌کند.

مثلاً در مشاهدات زیر، میانه برابر ۷ است؛ حال اگر همه داده‌ها بجز میانه تغییر کند، ولی ترتیب مشاهدات تغییر نکند (یعنی همچنان عدد ۷ در وسط مشاهدات قرار گیرد)، آنگاه میانه این مشاهدات جدید برابر با مشاهدات قبلی خواهد بود، یعنی میانه ***تغییری نمی‌کند:***

{۳,۴,۵,[۷],۹,۶۰,۷۰ ; **میانه** $= Md = ۷$} $\xrightarrow[\text{بجز داده وسط}]{\text{تغییر داده‌ها}}$ {۱,۲,۲,[۷],۷,۷,۸ ; **میانه** $Md = ۷$}

اما مد، تابع **فراوانی** داده‌ها است، مثلاً :

{۱,۲,۲,۲,۷,۷,۷,۸ ; **مد** $= Mo = ۲,۷$} $\xrightarrow{\text{تغییر فراوانی داده‌ها}}$ {۱,۲,۲,۷,۷,۷,۸ ; **مد** $= Mo = ۷$}

(مهم):

«مشخصات میانه (ادامه)»

۴. هرگاه کل داده‌ها را در عدد ثابتی ضرب یا تقسیم کنیم، میانه چه تغییری می‌کند؟

۵. آیا اگر کل داده‌ها را با عدد ثابتی جمع یا از آن کم کنیم، میانه داده‌ها تغییر می‌کند؟ با مثال توضیح دهید.

۶. آیا اگر کل داده‌ها را در عدد ثابتی ضرب یا تقسیم کنیم و با عدد ثابتی جمع یا از آن کم کنیم، میانه تغییر خواهد کرد؟ با مثال توضیح دهید.

آمار و احتمال، آموزشگاه پارسه، محسن طورانی، ص ۳۱
آمار و احتمالات، آموزشگاه مدرسان شریف، ص ۱۶
آمار کاربردی ۱، عالِم تبریز و احمد هژبر،ص ۴۹

۴. هرگاه کل داده‌ها (نه بخشی از آنها) را در عدد ثابتی (مانند a) ضرب یا بر آن عدد تقسیم کنیم، **میانه نیز به همان نسبت تغییر خواهد کرد :**

$$\begin{cases} x_i : x_1, x_2, \ldots, x_n \\ \text{میانه } Md_x \end{cases} \xrightarrow{y_i = ax_i} \begin{cases} y_i : ax_1, ax_2, \ldots, ax_n \\ \boxed{\text{میانه : } Md_y = aMd_x} \end{cases}$$

یعنی اگر کل داده‌ها را در عدد ثابت a ضرب شوند، میانه دادها نیز در عدد ثابت a ضرب می‌شود.

زیرا در این حالت، ترتیب داده‌ها تغییر نمی‌کند و تنها داده و سط (میانه) و نیز بقیه داده‌ها، a برابر می‌شـــوند، مثلاً اگر تمامی داده‌ها در عدد ثابت ۲- ضرب شوند، میانه آنها هم در ۲- ضرب می‌شود:

۱,۲,$\boxed{۳}$,۴,۵ $\xrightarrow{\text{تمام داده‌ها} \times -۲}$ ۲ -, ۴ -, $\boxed{۶ -}$, ۸ -, ۱۰ -

میانه = ۳ $\xrightarrow{\text{(میانه هم در ۲- ضرب میشه)}}$ میانه = ٦-

(ادامه تو فیش بعد)

۵. اگر کل داده‌ها را با عدد ثابتی (مانند b) جمع و یا از آن عدد کم کنیم، میانه داده‌ها نیز به همان نسبت تغییر خواهد کرد:

$$\begin{cases} x_i : x_1, x_2, \dots, x_n \\ \textbf{میانه}: Md_x \end{cases} \xrightarrow{y_i = x_i \pm b} \begin{cases} y_i : x_1 \pm a, \dots, x_n \pm a \\ \textbf{میانه}: \boxed{Md_y = Md_x \pm a} \end{cases}$$

مثال: $x_i : ۱,۲,\boxed{۳},۴,۵,$ $\xrightarrow{y_i : x_i - ۳}$ $y_i : -۲,-۱,\boxed{۰},۴,۵$

$\downarrow$ ۳= میانه $\xrightarrow{\textbf{(میانه هم منهای ۳ میشه)}}$ $\downarrow$ ۰= میانه

---

۶. با توجه به ویژگی‌های ۴ و ۵ در بالا، اگر هر دوی این ویژگی‌ها را با هم ترکیب کنیم، یعنی:

اگر کل داده‌ها را در عد ثابتی (مانند α) ضرب یا تقسیم کنیم و نیز با عدد ثابتی (مانند b) جمع یا از آن کم کنیم، میانه داده‌ها نیز به همان نسبت تغییر خواهد کرد:

$$\begin{cases} x_i : x_1, x_2, \dots, x_n \\ \textbf{میانه}: Md_x \end{cases} \xrightarrow{y_i = ax_i \pm b} \begin{cases} y_i : ax_1 \pm b, \dots, ax_n \pm b \\ \textbf{میانه}: \boxed{Md_y = aMd_x \pm b} \end{cases}$$

(ادامه تو پشت فیش)

مثال: *اگر میانه مشاهدات* $x_1, x_2, \ldots, x_6$ *برابر ۴ باشد، آنگاه میانه مشاهدات* $-2x_1+3, -2x_2+3, \ldots, -2x_6+3$ *برابر است با:*

۱) ۸-　　۲) ۴

۳) ۵-　　۴) ۷

پاسخ: گزینه ۳

چون تمام داده‌ها (x_i ها) ابتدا در ۲- ضرب شده و سپس با ۳ جمع شده‌اند، میانه داده‌ها نیز ابتدا در ۲- ضرب و سپس با ۳ جمع می‌شود:

$$\begin{cases} x_i = x_1, x_2, \ldots, x_6 \xrightarrow{y_i = -2x_i + 3} \\ \text{میانه}: Md = 4 \xrightarrow{Md_y = -2Md_x + 3} \end{cases} \begin{cases} y_i : -2x_1+3, \ldots, -2x_6+3 \\ \text{میانه}: Md_y = -2(4)+3 = -5 \end{cases}$$

(مهم):

«مشخصات میانه (ادامه)»

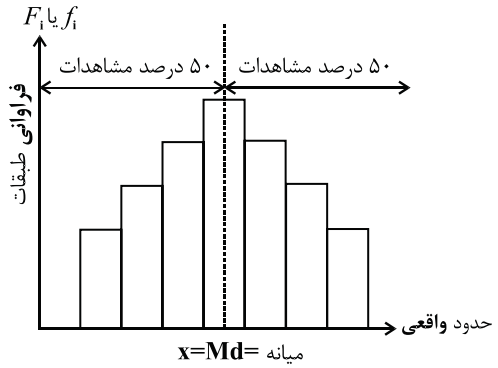
۷. *از نظر هندسی، میانه، خطی عمودی به معادله ..... است که نمودار ..... را به ..... تقسیم می‌کند.*

آمار و احتمال، آموزشگاه پارسه، محسن طورانی، ص ۳۱

۷. از نظر هندسی (نموداری)، میانه، خطی عمودی به معادله $X = Md$ می‌باشد که نمودار **هیستوگرام (بافت نگار یا مستطیلی) را به دو سطح مساوی تقسیم می‌کند.**

چون:

همان‌طور که می‌دانیم میانه، داده‌ای است که در **وسط** داده‌های مرتب شده (صعودی) قرار داره، یعنی نصف مشاهدات قبل از آن و نصف دیگر مشاهدات بعد از آن قرار دارند:



نکته مهم:

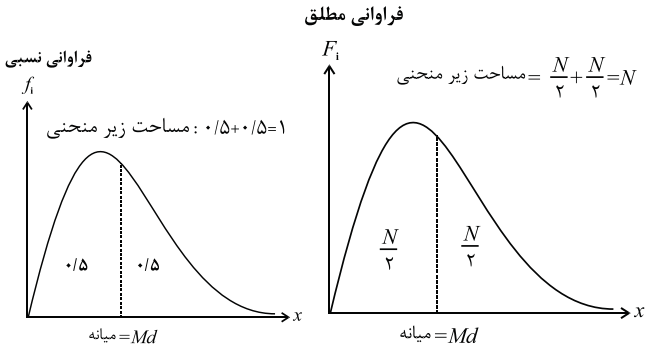
۱) اگر محور عمودی بیانگر فراوانی **مطلق** (F_i) با شد، آنگاه مساحت زیر منحنی توزیع، برابر با **جمع فراوانی‌های مطلق** $(\sum F_i = N)$ است.

(ادامه تو فیش بعد)

۲) و اگر محور عمودی نشـــان دهندهٔ فراوانی **نســبی** (f_i) باشـــد، آنگاه مســـاحت زیر منحنی توزیع برابر با **جمع فراوانی‌های نســبی** ($\sum f_i = ۱$) است.

توجه: علاوه بر ۷ ویژگی (خاصیت) میانه که در این فیش و فیشهای قبل بهش اشـــاره کردیم، میانه یک خاصـــیت بســـیار مهم هم داره که بخاطر اهمیت خیلی زیادش، اونو جداگونه تو فیش‌های بعد بررسی می‌کنیم.

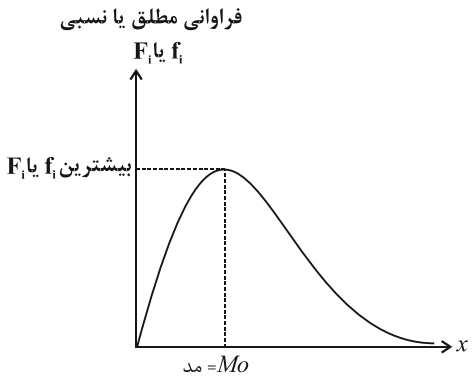
بـا توجـه بـه اینکـه میانـه، مقـداری از متغیـر مربوطـه اسـت کـه روی محـور X هـا قـرار داره و داده‌هـا را بـه **دو قســمت مســاوی** تقســیم مـی‌کنـه، پـس از نظـر هندسـی، **میانـه نقطـه ای روی محـور X هاسـت** که **مساحت توزیع را به دو نیم تقسیم می‌کند**:



(ادامه تو پشت فیش)

مقایسه میانه و مد (از لحاظ نموداری):

مد، مقداری روی محور X ها بود که دارای بیشـــترین فراوانی (مطلق یا نسبی) بود، یعنی منحنی توزیع به ازای مد، دارای ***بیشترین ارتفاع*** بود:



(بسیار مهم):

خاصیت مهم میانه (Md)

مهمترین خاصـــیت میانه به یکی از حالت‌های زیر می‌تواند بیان شود:

۱) مجموع **قدرمطلق** انحرافات (تفاضلات) داده ها از **میانه**، ..... است. از این خاصیت **میانه** در چه مواردی استفاده می‌شود؟

---

۲) مجموع **قدرمطلق** انحرافات (تفاضلات) داده‌ها از **میانه**، از مجموع **قدرمطلق** انحرافات (تفاضلات) داده‌ها نسبت به هر نقطه یا عدد دلخواه دیگری ..... است.

۳) هرگاه مجموع **قدرمطلق** انحرافات (تفاضـــلات) داده‌ها از نقطه دلخواهی (مانند C) ..... باشد، آنگاه آن نقطه، **میانه** است و بالعکس.

آمار و احتمال، آموزشگاه پارسه، محسن طورانی،ص ۳۲

آمار و کاربرد آن در مدیریت ۱، مسعود نیکوکار، ص ۹۵

خاصیت مهم میانه:

مهمترین خاصیت (ویژگی) میانه را می‌توان به یکی از حالات زیر بیان کرد:

ا) مجموع **قدرمطلق** انحرافات (تفاضلات) داده‌ها از میانه، همیشه **حداقل** است:

$$\underbrace{\sum |\ |}_{\text{قدرمطلق}} \quad \underbrace{x_i - Md}_{\text{انحرافات}}$$

$$\sum_{i=1}^{k} |x_i - Md| = \min$$

توجه: اگر داده‌ها دارای **فراوانی** (**مطلق** F_i **یا نسبی** f_i) باشند خاصیت فوق به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} \sum F_i |x_i - Md| = \min & \text{در صورت داشتن فراوانی } \textbf{مطلق}: \\ \sum f_i |x_i - Md| = \min & \text{در صورت داشتن فراوانی } \textbf{نسبی}: \end{cases}$$

نکته مهم: از این خاصیت مهم میانه برای طرح‌ریزی خطوط راه آهن برقی شهرها، اتوبوس، مترو و در تعیین ایستگاه‌ها، محل پمپ‌های بنزین، انبارهای عمومی و ... استفاده می‌شود.

مثال: *فرض کنید می‌خواهیم در یک جاده، پمپ بنزینی را احداث کنیم که چندین شرکت مسافربری از این پمپ بنزین، استفاده می‌کنند.*

(ادامه تو فیش بعد)

برای ما مهم است که بدانیم پمپ بنزین را در چه محلی احداث کنیم، تا در مجموع، کمترین مسافت توسط اتوبوس‌های مسافربری برای سوخت‌گیری پیموده شود.

***مثال۲:** فرض کنید یک دانشگاه دارای چند دانشکده است که هر دانشکده نیز دارای تعدادی دانشجو می‌باشد. می‌خواهیم محلی را جهت احداث سلف سرویس انتخاب کنیم به طوری که مسافت پیموده توسط افراد به حداقل خودش برسد.*

*در هر یک از این ۲ مثال باید از **خاصیت مهم میانه** استفاده کنیم یعنی پمپ بنزین را باید در **میانه** فواصل شرکت‌های مسافربری تا ایستگاه پمپ بنزین احداث کنیم تا مجموع فاصله اتوبوس‌های این شرکت‌ها تا ایستگاه پمپ بنزین حداقل شود.*
*سلف دانشگاه را نیز باید در **میانه** فاصله دانشکده‌های مختلف از سلف بسازیم تا بدین ترتیب مجموع فاصله دانشکده‌های مختلف از سلف حداقل گردد:*

$$\boxed{\sum |x_i - Md| = \min}$$

در این رابطه، عبارت $|x_i - Md|$ نشان دهنده **فاصله** داده‌ها (یعنی فاصلهٔ شرکتهای مسافربری، دانشکده‌های یک دانشگاه و...) از میانه (Md) است.

(ادامه تو پشت فیش)

۲) خاصیت ۱ را می‌توان به صورت زیر نیز بیان نمود:

مجموع **قدرمطلق** انحرافات (تفاضلات) داده‌ها از **میانه** از مجموع **قدرمطلق** انحرافات (تفاضلات) داده‌ها نسبت به هر نقطه یا عدد دلخواه دیگری غیر از میانه: $(a \neq Md)$ **کوچک‌تر** است:

$$\sum |x_i - Md| < \sum |x_i - a|$$

در صورت داشتن فراوانی **مطلق**: $\sum F_i |x_i - Md| < \sum F_i |x_i - a|$

در صورت داشتن فراوانی **نسبی**: $\sum f_i |x_i - Md| < \sum f_i |x_i - a|$

۳) خاصیت مهم میانه را هم چنین می‌توان به شکل زیر بیان کرد.

هر گاه مجموع **قدرمطلق** انحرافات (تفاضلات) داده ها از نقطه دلخواهی (مانند C) حداقل باشد، آنگاه نتیجه می گیریم که آن نقطه، **میانه** است و بالعکس، یعنی اگر **میانه** مشاهدات را به عنوان یک نقطه دلخواه $(Md = C)$ در نظر بگیریم، آنگاه مجموع **قدرمطلق** انحرافات داده‌ها از این نقطه دلخواه $(Md:$ **میانه**$)$ **حداقل** خواهد بود:

$$\sum |x_i - C| = \min \xleftrightarrow{\text{دو طرفه}} C : Md$$

(ادامه تو فیش بعد)

با داشتن فراوانی **مطلق** : $\sum F_i |x_i - C| = \min \rightleftarrows C = Md$

با داشتن فراوانی **نسبی** : $\sum f_i |x_i - C| = \min \rightleftarrows C = Md$

نکته بسیار مهم در تست‌ها: باید توجه داشت که این خاصیت مهم میانه، همواره باید به صورت **قدرمطلق** بیان شود، بنابراین در تست‌ها برای به اشتباه انداختن داوطلبان، این خاصیت را گاهی بدون قدرمطلق: $\sum (x_i - Md)$ و یا به صورت **مجذور**: $\sum (x_i - Md)^2$ نشان می‌دهند که ما باید حواسمون جمع باشه که هیچکدوم از اینا نشون دهندهٔ خاصیت مهم میانه نیستن:

غلط است زیرا از **قدرمطلق** استفاده نکرده است $\sum (x_i - Md) = \min \rightarrow$

غلط است زیرا از **توان ۲** استفاده کرده است $\sum (x_i - Md)^2 = \min \rightarrow$ و از قدرمطلق استفاده نکرده.

غلطه، زیرا قدرمطلق ما نباید توان داشته باشد $\sum |x_i - Md|^2 = \min \rightarrow$

خب، الان می‌خواهیم این خاصیت مهم میانه را با یک مثال عددی نشون بدیم:

مثال: *اگر مشاهدات ما شامل ۱۵، ۱۰ و ۵ باشند، آنگاه:* $Md = ۱۰$: **میانه**

حالا می‌خواهیم به مقایسهٔ مقادیر $\sum |x_i - Md|$ و $\sum |x_i - a|$ بپردازیم (**توجه**: $a \neq Md$ است):

(ادامه تو پشت فیش)

x_i صعودی	$a \neq Md$ $\lvert x_i - ۵ \rvert$	$a \neq Md$ $\lvert x_i - ۷/۵ \rvert$	Md $\lvert x_i - ۱۰ \rvert$	$a \neq Md$ $\lvert x_i - ۱۲/۵ \rvert$
۵	$\lvert ۵-۵ \rvert = ۰$	$\lvert ۵-۷/۵ \rvert = ۲/۵$	$\lvert ۵-۱۰ \rvert = ۵$	$\lvert ۵-۱۲/۵ \rvert = ۷/۵$
$\boxed{۱۰}$ = **میانه**	$\lvert ۱۰-۵ \rvert = ۵$	$\lvert ۱۰-۷/۵ \rvert = ۲/۵$	$\lvert ۱۰-۱۰ \rvert = ۰$	$\lvert ۱۰-۱۲/۵ \rvert = ۲/۵$
۱۵	$\lvert ۱۵-۵ \rvert = ۱۰$	$\lvert ۱۵-۷/۵ \rvert = ۷/۵$	$\lvert ۱۵-۱۰ \rvert = ۵$	$\lvert ۱۵-۱۲/۵ \rvert = ۲/۵$
جمع: $\sum$	$\sum \lvert x_i - ۵ \rvert =$ ۱۵	$\sum \lvert x_i - ۷/۵ \rvert =$ ۱۲/۵	$\sum \lvert x_i - ۱۰ \rvert = \boxed{۱۰}$ min	$\sum \lvert x_i - ۱۲/۵ \rvert$ $= ۱۲/۵$

با دقت در جدول بالا می‌بینیم که مجموع قدرمطلق تفاضلات (انحرافات) داده‌ها از میانه $(Md = ۱۰)$ حداقل است:

$$\sum \lvert x_i - Md \rvert = \sum \lvert x_i - ۱۰ \rvert = ۱۰ \quad (\min = \text{حداقل})$$

و همچنین می‌تونیم بگیم که:

مجموع **قدرمطلق** تفاضلات داده ها از **میانه** $(Md = ۱۰)$ از مجموع **قدرمطلق** تفاضلات داده‌ها از هر عدد دیگه‌ای غیر میانه (مثل $a = ۵ \ , \ ۷/۵ \ , \ ۱۲/۵$) **کمتره**:

$$\sum \lvert x_i - Md \rvert < \sum \lvert x_i - a \rvert$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \sum \lvert x_i - ۱۰ \rvert = \boxed{۱۰} < \sum \lvert x_i - ۵ \rvert = \boxed{۱۵} \\ \sum \lvert x_i - ۱۰ \rvert = \boxed{۱۰} < \sum \lvert x_i - ۷/۵ \rvert = \boxed{۱۲/۵} \\ \sum \lvert x_i - ۱۰ \rvert = \boxed{۱۰} < \sum \lvert x_i - ۱۲/۵ \rvert = \boxed{۱۲/۵} \end{cases}$$

(حسابداری ۷۹)

خاصیت مهم میانه (Median) *برای داده‌های آماری عبارت است از مجموع:*

۱) انحرافات از میانه صفر است.

۲) مجذور انحرافات از میانه حداقل است.

۳) قدرمطلق انحرافات از میانه صفر است.

۴) قدرمطلق انحرافات از میانه، از مجموع قدرمطلق انحرافات از هر عدد دیگری کمتر است.

توجه: علت نادرست بودن سایر گزینه‌ها را نیز بیان کنید.

پاسخ: گزینه ۴

خاصیت مهم میانه: مجموع **قدرمطلق** انحرافات داده‌ها (x_i ها) از میانه (me) همیشه حداقل (مینیمم) است: $\sum|x_i - me| = \min$

و یا میشه گفت:

مجموع **قدرمطلق** انحرافات داده ها از میانه از مجموع **قدرمطلق** انحرافات داده‌ها از هر عدد دیگری غیر میانه ($a \neq Md$) **کمتر** است:

$$\sum|x_i - me| < \sum|x_i - a|$$

اما سایر گزینه‌ها غلط‌اند، چون:

گزینه ۱: مجموع انحرافات از میانگین (نه میانه) صفر است.

$$\boxed{\sum|x_i - \mu| = ۰}$$

گزینه ۲: مجموع محذور انحرافات از میانگین (نه میانه) حداقل است.

$$\boxed{\sum(x_i - \mu)^۲ = \min}$$

گزینه ۳: قدرمطلق انحرافات از میانه، حداقل است (نه صفر).

$$\boxed{\sum|x_i - me| = \min}$$

مهم:

(مدیریت ۸۴)

در ۵۰ داده آماری، میانه $Md = ۱۲$, $\sum_{i=۰}^{۵۰} x_i = ۵۵۰$ است، اگر $A = \sum_{i=۱}^{۵۰} |x_i - ۱۲|$ و $B = \sum_{i=۱}^{۵۰} |x_i - ۱۱|$ باشد، آنگاه:

۱) $A < B$

۲) $A = B$

۳) $A > B$

۴) $A = B - ۱$

گزینه ()

خاصیت مهم میانه:

a: هر عدد دلخواه **غیر میانه** $\Leftarrow \sum|x_i - Md| < \sum|x_i - a|$

در این سؤال:

$$\begin{cases} Md = ۱۲ \\ \sum x_i = ۵۵۰ \Rightarrow \mathbf{m} = \dfrac{\sum \mathbf{x_i}}{\mathbf{N}} = \dfrac{۵۵۰}{۵۰} = \dfrac{۵۵}{۵} \Rightarrow \boxed{\mu = ۱۱} \\ N = ۵۰ \end{cases}$$

بنابراین می‌تونیم بگیم:

$$\sum|x_i - \underset{\downarrow}{Md}| < \sum|x_i - \underset{\downarrow}{a}|$$

$$\underbrace{\sum|x_i \quad ۱۲|}_{A} < \underbrace{\sum|x_i - ۱۱|}_{B}$$

مهم:

فرض کنید بین دو شهر که فاصله آنها ۱۰۰ کیلومتر است، ۷ گاراژ وجود داشته باشد، در جدول زیر تعداد اتومبیل‌های هر گاراژ داده شده و فواصل گاراژها نیز مشخص شده است:

فواصل گاراژ	۰-۲۰	۲۰-۴۰	۴۰-۵۰	۵۰-۸۰	۸۰-۱۰۰
تعداد اتومبیل	۵۰	۱۰۰	۲۰	۴۰	۱۲۰

می‌خواهیم یک پمپ بنزین در این جاده احداث کنیم.

محلی را تعیین کنید که جمع کل مسافت‌های پیموده شده برای بنزین گیری توسط ماشین‌ها، حداقل باشد؟

۱) در فاصله ۴۷/۵ کیلومتری

۲) در فاصله ۴۵ کیلومتری

۳) در فاصله ۴۹/۵ کیلومتری

۴) در فاصله ۴۲/۵ کیلومتری

آمار و کاربرد آن در مدیریت ۱، مسعود نیکوکار، ص ۹۵، مثال ۳۳

پاسخ: گزینه «۱»

فرض کنید نقطه a *محل احداث پمپ بنزین باشد و* x_i *محل گاراژ* i *اُم. خب، پس الان می‌تونیم بگیم مسافتی که هر ماشین از گاراژِ* i *اُم تا رسیدن به پمپ بنزین باید طی کنه، برابره با:* $|x_i - a|$.

توجه: در ریاضیات، برای نشون دادن فاصله (مسافت) بین ۲ نقطه، از مفهوم **قدرمطلق** استفاده می‌کنیم، بنابراین فاصله گاراژ iاُم تا محل احداث پمپ بنزین (یعنی نقطه a) برابر میشه با:

$|x_i - a|$ = محل پمپ بنزین − محل گاراژ iاُم	: **فاصله** گاراژ iاُم تا پمپ بنزین

خب، مسئله از ما خواسته محل پمپ بنزین (a) رو طوری مشخص کنیم تا مجموع فاصله گاراژهای مختلف تا پمپ بنزین (نقطه a) حداقل بشه، یعنی:

حداقل =	پمپ بنزین − محل گاراژ iاُم	$\sum$: مجموع فواصل گاراژها تا پمپ بنزین

که به صورت ریاضی میشه: $\boxed{\sum |x_i - a| = \min}$

خب، با دقت در عبارت **min** و علامت **قدرمطلق** می‌بینیم که این رابطه برامون خیلی آشناست، انگار خیلی وقته می‌شناسیمش. ببینیم یادتون اومد؟ ... درسته، این رابطه در واقع همون **خاصیت مهم میانه** است که به ما میگه: **(ادامه تو فیش بعد)**

اگه مجموع **قدرمطلق** تفاضل داده‌ها (x_i ها) از یه نقطه (مثـل a) حـداقل باشه (min)، اون وقت با جرأت هر چه تمام می‌تونیم بگیم کـه اون نقطـه (یعنی a)، حتماً **میانه** این داده‌هاست:

$$\sum |x_i - a| = \min \quad \Leftrightarrow \quad \text{a} = med : \text{میانه}$$

خب، معما چو حل گشت آسان شود، یعنی الان فکر کنم همه مـون دیگـه فهمیدیم که منظور سؤال از اینکه گفته محل نقطه a (محل احداث پمـپ بنزین) رو بدست بیارین، در واقع اینه که **میانهٔ** x_i ها، یعنی **میانه** فاصـله گاراژها از همدیگه رو بدست بیاریم.

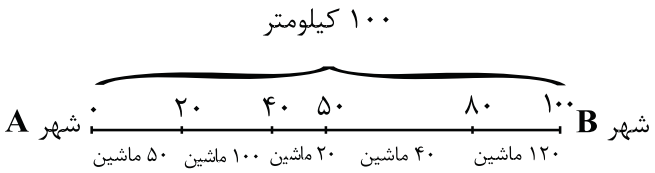
یادآوری:

البته اگه یه کم زرنگی می‌کردیم، زودتر از اینها هم می‌تونستیم بفهمیم که این سؤال مربوط به بحث «**میانه**» است، چون تو فیشای قبل یاد گـرفتیم که یکی از کاربردهای **خاصیت مهم میانه** در زمینه تعیـین احـداث **پمـپ بنزین‌ها**، ایستگاه‌های اتوبوس و مترو و تعیـین محـل احـداث انبارهـا و ... است.

خـب، حـالا کـه فهمیـدیم قضـیه چیـه، بایـد خیلـی سـریع بـریم سـراغ محاسبه میانه؛ امـا قبـل از اینکـه بـه جـدول پشـت فـیش و محاسـباتش نگـاه کنـین، بهتـره اول بـه شـکل رسـم شـده دقـت کنـین تـا مفهـوم سؤال رو بهتر متوجه بشین.

(ادامه تو پشت فیش)

(در این شکل فاصله گاراژها بر روی محور و تعداد ماشین‌های هر گاراژ در زیر محور نوشته شده).



دقت کنین که: *فواصل گاراژها، در واقع طبقات ما هستن و تعداد ماشین‌های هر گاراژ، فراوانی هر یک از این طبقات هستن، بنابراین جدول ما به صورت زیر درمیاد:*

گام ۱) محاسبه فراوانی تجمعی طبقات (در جدول زیر):

طبقه میانه دار

CL	۰-۲۰	۲۰-۴۰	۴۰ – ۵۰	۵۰-۸۰	۸۰-۱۰۰	
F_i	۵۰	۱۰۰	۲۰	۴۰	۱۲۰	$N = ۳۳۰$
F_{C_i}	۵۰	۱۵۰	۱۷۰	۲۱۰	$۳۳۰ = N$	

گام ۲) یافتن محل میانه:

$$\boxed{\text{میانه} : C_{Md} = \frac{N}{۲}} \Rightarrow \frac{۳۳۰}{۲} = ۱۶۵\text{اُمی}$$

(ادامه تو فیش بعد)

اولین طبقه‌ای که فراوانی تجمعی آن بزرگتر مساوی ۱۶۵ است، طبقه (۵۰-۴۰) است که طبقه میانه دار است.

پس طبقه سوم، طبقه میانه داره $\xrightarrow{\text{در طبقه سوم}} F_{C_۳} = ۱۷۰ \geq ۱۶۵ \rightarrow$

$$Md = ۴۰ + \frac{۱۶۵ - ۱۵۰}{۲۰} \times ۱۰ \Rightarrow$$

$$Md = ۴۰ + \frac{۱۵}{\cancel{۲۰}} \times \cancel{۱۰} = ۴۰ + \frac{۱۵}{۲} = ۴۰ + ۷/۵ \Rightarrow$$

$$\boxed{Md = ۴۷/۵ \text{ کیلومتر}}$$

یعنی پمپ بنزین باید در فاصله ۴۷/۵ کیلومتری این جاده احداث بشه تا در نتیجه مجموع مسافت‌های طی شدهٔ این اتومبیل‌ها برای بنزین‌گیری، **حداقل** بشه:

$$\sum |x_i - Md| = \min$$

$$\xrightarrow{Md=۴۷/۵} \boxed{\sum |x_i - ۴۷/۵| = \min}$$

امام علی علیه السلام
السَّیِّئُ الخُلُقِ کَثیرُ الطَّبیشِ مُتَغَّصُ العَیشِ
غررالحکم حدیث ۱۶۰۱۴
آدم بد اخلاق بسیار خطا می کند
و زندگی اش تلخ می شود
بیا از این بد اخلاقی حذر کن
بیا تا میتوانی رفح شرکن
اگر خواهی که با یاران نشینی
محبت را به یاران بیشتر کن

مهم:

۱) در توزیعهای نامتقارن، برای نشون دادن میزان تمایل داده‌ها به مرکز توزیع، بهتر است از کدامیک از شاخص‌های مرکزی استفاده کنیم (مد، میانه یا میانگین) ؟ چرا؟

۲) با توجه به سؤال بالا، توضیح دهید برای توصیف توزیع‌های درآمد، از کدام شاخص مرکزی باید استفاده کنیم؟ چرا؟

آمار و احتمال، آموزشگاه پارسه، محسن طورانی،ص ۳۲

«کاربرد میانه»

در شرایط زیر استفاده از میانه (Md) به عنوان شاخص مرکزی مناسب‌تر است:

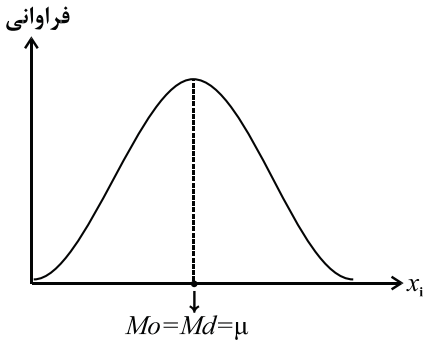
۱. *در توزیعهای نامتقارن:* که تو همین فیش، این مورد رو توضیح می‌دیم.
۲. *در توزیع‌هایی که تعداد اندکی مشاهده غیر طبیعی (بسیار کوچک یا بسیار بزرگ نسبت به سایر مشاهدات) در ابتدا یا انتهای آنها وجود دارد:* که در فیش‌های بعداً این مورد را بررسی می‌کنیم.
۳. *در جدول داده‌های طبقه بندی شده، زمانی که حدود ابتدا یا انتها، باز (نامشخص) باشد:* که این کاربرد میانه را هم در فیش‌های بعد مورد بررسی قرار می‌دهیم.

کاربرد اول: *در توزیعهای نامتقارن، از میانه برای نشون دادن میزان تمایل (گرایش) داده‌ها به مرکز توزیع استفاده می‌شود.*

برای تشریح بهتر حالت فوق، ابتدا بایستی با مفهوم توزیع متقارن و غیرمتقارن آشنا شویم؛ همانطور که در شکل فیش بعد نشان داده شده است، توزیع متقارن حالت **تقارن و قرینگی** دارد، یعنی طرف راست و چپ آن قرینه هم هستند، به همین دلیل به آن، توزیع **متقارن** می‌گویند.

(ادامه تو فیش بعد)

توزیع متقارن به شکل یک **زنگوله** است و در آن تمام شاخص‌های مرکزی یعنی مد، میانه و میانگین بر هم منطبق هستند و درست در وسط یا مرکز توزیع قرار می‌گیرند: $(Mo = Md = \mu)$



اما برخلاف توزیع متقارن که حالت قرینه دارد، توزیع‌های نامتقارن حالت قرینگی ندارند، یعنی طرفین راست و چپ آنها با هم قرینه نیستند، زیرا تو این جور توزیع‌ها، داده‌ها بیشتر در یک سمت توزیع (راست یا چپ) متمرکز شده‌اند.

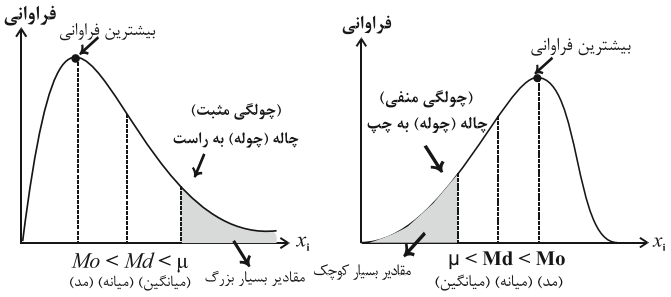
توزیعهای نامتقارن دارای **چولگی** یا **چالگی** هستند، بدین صورت که اگر:

(ادامه تو پشت فیش)

۱) اگر دُم یـا دنبالـه توزیـع در سـمت راسـت قـرار داشـته باشـند (یعنـی اگـه سـمت راسـت توزیـع حالـت **چالـه** داشـته باشـد)، توزیـع **چولـه (چاله)** ***به راست*** بوده و یا دارای ***چولگی مثبت*** است (شکل الف).

۲) اگردُم یا دنباله توزیع در سـمت چـپ قـرار گیـرد (یعنـی اگـه **چالـه** در سمت چپ توزیع ایجـاد شـود)، توزیـع **چولـه (چالـه)** ***به چپ*** بـوده و یا دارای **چولگی منفی** می‌باشد (شکل ب).

در توزیع‌های ***نامتقارن***، بـه دلیـل تجمـع داده‌هـا در یـک طـرف توزیـع (راست یا چـپ)، دیگـر شـاخص‌هـای مرکـزی مـد، میانـه و میـانگین بـر هم منطبق **نیستند**.



(شکل ب) **(شکل الف)**

(ادامه تو فیش بعد)

در توزیع‌های **نامتقارن** (چوله به راست یا به چپ)، چون مقادیر بسیار بزرگ یا بسیار کوچک در ابتدا یا انتهای توزیع وجود داره، بنابراین برای بیان شاخص مرکزی داده‌ها، ***میانه شاخص بهتری نسبت به میانگین و مد است.***

زیرا میانه نسبت به میانگین و نما **کمتر تحت تأثیر مقادیر انتهای توزیع (مقادیر بسیار بزرگ یا بسیار کوچک)** قرار می‌گیرد و **همیشه در وسط توزیع** قرار دارد.

اما میانگین **به شدت** تحت تأثیر مقادیر **فرین (غیر طبیعی: بسیار بزرگ یا بسیار کوچک)** قرار می‌گیرد، بدین معنی که میانگین به سمت مقادیر بسیار بزرگ یا بسیار کوچک گرایش پیدا می‌کند.

این نکته را می‌توان در شکلهای (الف) و (ب) مشاهده کرد:

در شکل (الف) که مقادیر فرین (بسیار بزرگ) در سمت راست توزیع قرار گرفته‌اند، میانگین نیز تحت تأثیر این مقادیر قرار گرفته و به سمت آنها (به سمت راست) نزدیک شده.

و تو شکل (ب) که مقادیر فرین (بسیار کوچک) در سمت چپ توزیع قرار گرفته‌اند، میانگین نیز تحت تأثیر این مقادیر فرین قرار گرفته و به سمت آنها (به سمت چپ) نزدیک شده.

(ادامه تو پشت فیش)

بنابراین در توزیع‌های نامتقارن (شکلهای الـف و ب)، میـانگین نمـی‌توانـد بخوبی مرکز (وسط) توزیع داده‌ها را نشان دهد، زیرا بجای اینکه در مرکـز (وسط) قرار گیرد، در سمت راست یا چپ توزیع قرار می‌گیرد؛

بنابراین در توزیع‌های **نامتقارن** بایستی از شاخص مرکـزی **میانه** بجـای **میانگین و مد** استفاده کنیم، چون میانه **همیشه** در **وسـط** توزیـع قـرار می‌گیرد.

توجه: در توزیع‌های **نامتقارن** از مد نیز نباید استفاده کرد، زیرا همان‌طور که در شکلهای (الف) و (ب) می‌بینـیم، در توزیـع‌هـای نامتقـارن بـرخلاف توزیع‌های متقارن، مد در وسط (مرکز) توزیع داده‌ها قرار نمی‌گیـرد، بلکـه در سمت راست یا چپ توزیع قرار می‌گیرد، پس تو این جور مواقع (یعنـی تو توزیع‌های نامتقارن)، مد شاخص مرکزی خوبی نیست، پس بجاش **باید از میانه** استفاده کنیم. چون میانه همیشه (چه در توزیـع‌هـای متقـارن و چه در توزیع‌های نامتقارن) در **وسط** یا **مرکز** توزیع قرار می‌گیره.

پاسخ سؤال (۲)

نکته مهم: توزیع‌های درآمد، اغلب دارای مقادیر بزرگ فرین (تعداد کمـی درآمد خیلی بالا) هستند، یعنی دارای چولگی **مثبت** (چـولگی بـه **راسـت**) هستند، **(ادامه تو فیش بعد)**

بنابراین این توزیع‌ها متقارن نیستند بلکه نامتقارن اند، پس برای نشان دادن مرکز توزیع‌های درآمد، **میانه شاخص مرکزی بهتری نسبت به مد و میانگین** است، زیرا میانه نسبت به مد و میانگین **کمتر** تحت تأثیر مقادیر فرین (درآمدهای خیلی بالا) قرار می‌گیرد و در نتیجه مرکز توزیع درآمد را بهتر نشان می‌دهد.

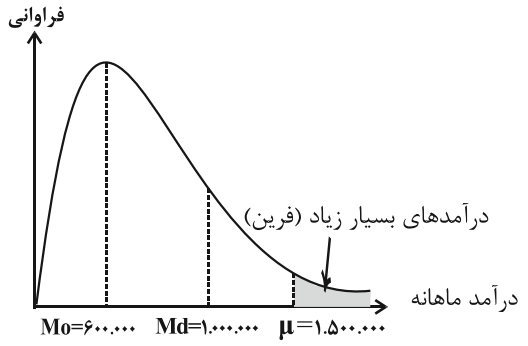
توجه: *در توزیع‌های درآمد، معمولاً عده زیادی از افراد جامعه، درآمد کمی دارند (که مد جامعه را تشکیل می‌دهند، زیرا بیشترین فراوانی را دارند)، ولی عده کمی از افراد جامعه، درآمدهای بسیار بالایی دارند که همان مقادیر فرین هستند که این مقادیر، **به شدت** میانگین را تحت تأثیر خود قرار میدن و اونو به سمت خودشون (به سمت راست) می‌کشن، بنابراین در این حالت، میانگین دیگر در وسط (مرکز) توزیع درآمد قرار نمی‌گیرد، بلکه به سمت راست کشیده می‌شود؛*

بنابراین تو این شرایط (توزیع نامتقارن، مثل توزیع درآمد)، دیگه میانگین شاخص مرکزی مناسبی نیست، چون ما از یه شاخص **مرکزی** *انتظار داریم که* **مرکز** *داده‌ها رو به مان شون بده، اما در توزیع‌های نامتقارن (مثل توزیع درآمد)، میانگین دیگه نمی‌تونه بخوبی مرکز داده‌ها رو به ما نشون بده، چون* **مقدارش به سمت مقادیر انتهایی توزیع متمایل میشه (و نه مقادیر مرکز توزیع).** پس:

نتیجه اخلاقی مهم:

در توزیع‌های **نامتقارن** (مثل توزیع درآمد)، برای نشان دادن مرکز داده‌ها، بهتر است از شاخص‌های مرکزی **میانه** بجای شاخص مرکزی مد یا میانگین استفاده کنیم.

به عنوان مثال به شکل توزیع درآمد در زیر توجه کنید:



در این توزیع، همان‌طور که از شکل پیداست، اکثر افراد جامعه، درآمد کمی در حدود ۶۰۰ هزار تومان در ماه دارند و در نتیجه این گروه، بخاطر فراوانی زیادشان (نسبت به سایر گروه‌های درآمدی)، مُدِ جامعه را تشکیل می‌دهند. و در مقابل، تعداد کمی از افراد جامعه، درآمدهای غیرطبیعی (بسیار بزرگ نسبت به بقیه) دارند؛ **(ادامه تو فیش بعد)**

مثلاً درآمدی حدود ۸ میلیون تومان در ماه دارند و همین امر باعث شده تا میانگین به شدت تحت تأثیر درآمدهای خیلی بالا قرار گیرد و به سمت درآمدهای بزرگ نزدیک شود که این امر با واقعیت تطابق ندارد؛

یعنی میانگین واقعی درآمد افراد، مطمئناً کمتر از μ=1,500,000 تومان در ماه خواهد بود، زیرا اکثر افراد جامعه درآمدی حدود 600,000 تا 1,000,000 تومان در ماه دارند، ولی میانگین، به اشتباه در آمد متوسط μ=1,500,000 تومان در ماه را به ما نشون میده.

پس در این حالت (در توزیعهای **نامتقارن**، مثل: توزیع درآمد) بهتر است از شاخص مرکزی **میانه** بجای **مد** و **میانگین** استفاده کنیم، زیرا همان‌طور که در شکل پیداست، ***میانه همیشه در وسط توزیع قرار می-گیرد*** و در نتیجه در توزیع‌های **نامتقارن**، بهتر می‌تونه وسط یا مرکز توزیع رو به ما نشون بده.

حُسن خُلق:

إن العبد لیدرک بحسن الخلق درجة الصائم القائم

بنده بوسیله خوش خلقی به مقام روزه دار و نماز گزار می رسد.

پیامبر اکرم (ص)، نهج الفصاحه/ حدیث٦٥٤

مهم:

*در توزیع‌هایی که تعداد **اندکی** مشاهده غیرطبیعی (**بسیار کوچک یا بسیار بزرگ** نسبت به سایر مشاهدات) در ابتدا یا انتهای آنها وجود دارد، کدام یک از شاخص‌های مرکزی (میانه یا میانگین) برای تعیین نقطه مرکزی داده‌ها مناسب‌تر است؟ چرا؟*

آمار و احتمال، آموزشگاه پارسه، محسن طورانی،ص ۳۳

«دومین کاربرد میانه»

در فیش‌های قبل یکی از کاربردهای میانه را بررسی کردیم بدین صورت که:

در توزیع‌های نامتقارن (چوله به راست یا چپ) بایستی از **میانه** بجای مد و میانگین به عنوان شاخص مرکزی استفاده کرد.

اکنون به یکی دیگر از کاربردهای میانه می‌پردازیم:

در توزیع‌هایی که تعداد اندکی مشاهده غیرطبیعی (خیلی کوچک یا خیلی بزرگ) در ابتدا یا انتهای آنها وجود دارد، **میانه** شاخص مرکزی بهتری نسبت به میانگین است.

برای مثال در N=۱۸ مشاهده زیر:

$\boxed{-۲۰۰}$,۲,۲,۲,۳,۳,۴,۴,۴,۵,۵,۵,۶,۶,۶,۶,$\boxed{۱۰۰}$,$\boxed{۴۰۰}$

همانطور که مشخص است داده‌های ۲۰۰- (در ابتدا) و ۱۰۰ و ۴۰۰ (در انتها) اختلاف زیادی با سایر مشاهدات دارند و تعدادشان نیز اندک است (۳مشاهده)؛ در این شرایط پارامتر مرکزی **میانه** نسبت به میانگین، کمتر تحت تاثیر مقادیر ابتدایی و انتهایی (۲۰۰- و ۱۰۰ و ۴۰۰) قرار می‌گیرد، در نتیجه بهتر می‌تونه **مرکز** داده‌ها رو به ما نشون بده، به همین خاطر می‌تونیم بگیم که در این جور مواقع، **(ادامه تو فیش بعد)**

میانه شاخص مرکزی بهتری نسبت به میانگین خواهد بود.

برای درک بهتر این موضوع به محاسبات زیر توجه کنین:

در مثال فوق:

$$\text{میانگین} = \mu = \frac{-۲۰۰+۲+۲+.....+۱۰۰+۴۰۰}{۱۸} = \frac{۳۶۳}{۱۸} \approx ۲۰$$

یعنی میانگین داده‌های فوق برابر $\mu = ۲۰$ است، ولی میانه برابر $Md = ۴/۵$ است.

یادآوری: چون تعداد داده‌ها زوجه $(N = ۱۸)$، پس دو تا داده، در وسط توزیع قرار می‌گیرن که میانه برابر با میانگین این دو دادهٔ وسط خواهد بود:

محل میانه : $C_{Md} = \frac{N}{۲} + \frac{۱}{۲} = \frac{۱۸}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۹/۵$ اُمی $\rightarrow$ (بین داده ۹اُم و ۱۰اُم)

میانه : $Md =$ میانگین دو دادهٔ وسط $= \frac{X_۹ + X_{۱۰}}{۲} = \frac{۴+۵}{۲} \Rightarrow \boxed{Md = ۴/۵}$

با توجه به مثال بالا می‌بینم که مقدار میانه $(Md = ۴/۵)$ نسبت به میانگین $(\mu = ۲۰)$، به مرکز داده‌ها بیشتر نزدیکه، پس نتیجه می‌گیریم که در اینجا میانه شاخص مرکزی بهتری نسبت به میانه است.

(ادامه تو پشت فیش)

نکته مهم: البته بعداً خواهیم دید که برای رفـع ایـن عیـب در شـاخص میانگین حسابی، باید از میانگین ***پیراسته*** بجای میانگین **حسابی** استفاده کنیم.

در میانگین پیراسته، داده‌هایی که در ابتدا یا انتهای توزیع قرار دارند و در نتیجه اختلاف زیادی با بقیه داده‌ها دارند، رو حـذف مـی‌کنـیم و فقط میانگین داده‌های باقیمونده رو حساب می‌کنیم.

در نتیجه با این ترفندی که بکار می‌بریم، دیگه مقدار میـانگین تحـت تاثیر این مقادیر ابتدایی و انتهایی توزیع قرار نمی‌گیره.

(مهم):

اگه در جدول داده‌های طبقه‌بندی شده (به صورت فاصله‌ای)، حدود ابتدا و انتها **باز (نامشخص)** *باشند، باید از کدام شاخص مرکزی (میانه یا میانگین) استفاده کنیم؟ چرا؟*

آمار و احتمال، آموزشگاه پارسه، محسن طورانی، ص ۳۳

«سومین کاربرد میانه»

در فیش‌های قبل، دو مورد از کاربردهای میانه را بررسی کردیم:

۱. در توزیع‌های نامتقارن (چوله به راست و چپ)

۲. در توزیع‌هایی که تعداد اندکی مشاهده غیرطبیعی (بسیار کوچک یا بسیار بزرگ) در ابتدا یا انتهای آنها وجود دارد.

خب، حالا نوبت سومین کاربرد میانه است:

در جدول داده‌های طبقه‌بندی شدهٔ فاصله‌ای، زمانی که **حدود ابتدا یا انتها باز (نامشخص) باشند**، بجای شاخص میانگین باید از شاخص مرکزی **میانه** استفاده کنیم.

مثال: *اگر مشاهدات ما بصورت زیر باشد:*

۲۰۰-,۲,۲,۲,۳,۳,۴,۴,۴,۵,۵,۵,۶,۶,۶,۶,۱۰۰,۴۰۰

می‌توان آنها را بصورت زیر طبقه‌بندی نمود:

CL	<۲ (کمتر از ۲)	۲-۵	۵-۸	≥ ۸	
فراوانی	۱	۸	۷	۲	$\sum F_i = N = ۱۸$

(ادامه تو فیش بعد)

توضیح: چون در مشاهدات فوق، تنها یک مشاهده قبل از x=۲ وجود دارد (۲۰۰-) که فاصله زیادی با طبقه دوم (۵-۲) دارد، پس ما دیگه نمی-تونیم اونو مثل طبقات دوم و سوم بصورت (حد بالا – حد پایین) نشون بدیم، چون در این‌صورت بایستی تعداد زیادی طبقه با فاصله I=۳ ایجاد می‌کنیم تا به داده ۲۰۰- برسیم.

در مورد داده‌های ۱۰۰ و ۴۰۰ نیز همچنین قضیه صادق است، یعنی اگر بخواهیم ۱۰۰ و ۴۰۰ طبقاتی رو در جدول مشخص کنیم که بصورت (حدبالا – حد پایین) باشن، باید تعداد زیادی طبقه خالی (یعنی طبقاتی با فراوانی صفر ایجاد کنیم) تا بالاخره به ۱۰۰ و ۴۰۰ برسیم که این کار اصلاً کار قشنگی نیست.

پس برای اینکه جدول ما مثل یه تریلی دراز و بی‌قواره نشه، میائیم حد پایین طبقه اول و نیز حد بالای طبقهٔ آخر را **باز** می‌داریم. تا اعداد ۲۰۰- ، ۱۰۰ و ۴۰۰ تو این طبقات **باز** قرار بگیرن.

نکته مهم: تو فیشای بعد یاد می‌گیریم که در داده‌های نوع **سوم** که بصورت **فاصله‌ای** طبقه‌بندی می‌شوند (مثل جدول بالا)، برای محاسبه میانگین از رابطهٔ $\mu = \frac{\sum x_i}{N}$ ، نیاز داریم تا مرکز طبقات x_i ها را از رابطهٔ $x_i = \frac{L_i + U_i}{۲}$ بدست آوریم تا بتوانیم میانگین را محاسبه کنیم.

(ادامه تو پشت فیش)

ولی از اون جایی که تو طبقات باز، حد پایین یا بالا نامشخص است، پس برای این طبقات، نمی‌تونیم مرکز طبقه را از رابطه زیر بدست بیاریم:

$$\text{مرکز طبقه} = \frac{\text{حد پایین طبقه} + \text{حد بالای طبقه}}{۲} \Rightarrow X_i = \frac{L_i + U_i}{۲}$$

در نتیجه تو این حالت (طبقات باز)، «**میانه**» تنها شاخص مرکزی مناسب است، چون برای محاسبه میانه، دیگه نیازی به یافتن مرکز طبقات نداریم و تنها کافی است فراوانی (مطلق یا نسبی) طبقات را بدانیم تا بتوانیم فراوانی تجمعی را از روی آن محاسبه کنیم و سپس محل میانه (طبقه میانه‌دار) را مشخص می‌کنیم (اولین دسته‌ای که فراوانی تجمعی آن از $\frac{N}{۲}$ بیشتر باشد طبقه میانه دار است) و بعد از آن هم مقدار میانه را از رابطه زیر بدست بیاریم:

$$\textbf{میانه} := Md = \text{حد پایین واقعی طبقه میانه دار} + \frac{\frac{N}{۲} - F_{C_{i-۱}}}{F_i} \times \text{طول (فاصله طبقات)}$$

نتیجه: برای محاسبه میانه، هیچ نیازی به دونستن مرکز طبقات نداریم، پس در جداول دارای طبقات **باز** هم (که امکان یافتن مرکز طبقات باز وجود ندارد)، هم می‌تونیم **میانه** رو براحتی آب خوردن حساب کنیم.

«**چندک‌ها**: Quantiles»

۱) **چندک‌ها** چند نوعند؟ و هر کدوم از اونا جامعه رو به چند قسمت تقسیم می‌کنن؟

۲) انواع چارک‌ها رو نام ببرین و بگین هر کدوم از اونا چه مفهومی دارن؟

آمار و احتمال، آموزشگاه پارسه، محسن طورانی، ص ۳٤

آمار کاربردی ۱، عالِم تبریز و احمد هژبر، ص ۵۰

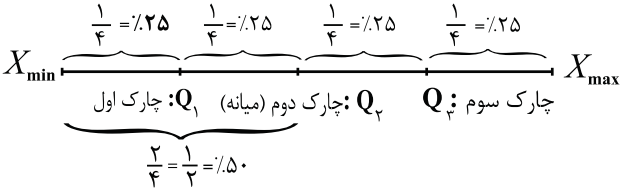
«**چندک‌ها** (Quantile): [**چارک، دهک و صدک**]»

۱) چندک‌ها مقادیری از مشاهدات هستند که دامنهٔ تغییرات جامعه آماری (R) را که بصورت ***صعودی*** مرتب شده، به فواصل **مساوی** با نسبت‌های $\frac{۱}{۴}$ (***چارک***)، $\frac{۱}{۱۰}$ (***دهک***) و $\frac{۱}{۱۰۰}$ (***صدک***) تقسیم می‌کنن، به طوری که فراوانی در هر یک از این فواصل مساوی، درصد معینی از فراوانی کل را تشکیل می‌دهد.

۲) قبلاً یاد گرفتیم که میانه (به عنوان یک شاخص مرکزی) عـددی اسـت که مشاهدات جامعه را به ***دو قسمت مساوی*** تقسیم می‌کند.
خب، حالا اگه تعداد داده‌های ما خیلی زیـاد باشـه (مـثلاً $N > ۳۰$) اون وقت می‌تونیم مفهوم میانه را تعمیم بدیم؛ یعنی می‌تونیم جامعه آمـاری را به ***چهار قسمت مساوی*** تقسیم کنیم که به این نقاطِ تقسیم داده‌هـا بـه ۴ قسمت، اصطلاحاً **چارک** می‌گیم.

چارک (Quartile = Q): اگر دامنه داده‌های جامعه آماری را به ***چهار قسمت مساوی*** تقسیم کنیم، به طوری که هر یک از این قسمتها ۲۵٪ یا $\frac{۱}{۴۰۰}$ کل فراوانی‌ها را در برگیرند، اون وقت چارکهای **اول** $(Q_۱)$ **و دوم** $(Q_۲)$ **و سوم** $(Q_۳)$ بوجود می‌آیند. **(ادامه تو فیش بعد)**

به عبارت بهتر بعد از مرتب کردن داده‌ها به صورت صعودی (غیرنزولی) داریم:



با توجه به نمودار فوق می‌توان نتیجه گرفت که:

$Q_۱ = \frac{۱}{۴}$ **(چارک اول)**

مقداری که $\frac{1}{4} = 25\%$ مشاهدات کوچکتر یا مساوی ($\leq$) آن هستند. یا

مقداری که $\frac{3}{4} = 75\%$ مشاهدات بزرگتر ($>$) از آن هستند.

$Q_۲ = \frac{۲}{۴}$ **(چارک دوم = میانه)**

مقداری که $\frac{2}{4} = 50\%$ مشاهدات کوچکتر یا مساوی ($\leq$) آن هستند. یا

مقداری که $\frac{2}{4} = 50\%$ مشاهدات بزرگتر ($>$) از آن هستند.

$Q_۳ = \frac{۳}{۴}$ **(چارک سوم)**

مقداری که $\frac{3}{4} = 75\%$ مشاهدات کوچکتر یا مساوی ($\leq$) آن هستند. یا

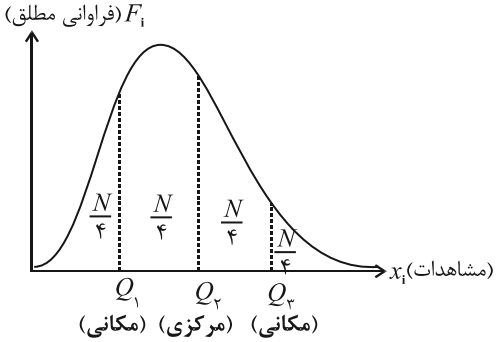
مقداری که $\frac{1}{4} = 25\%$ مشاهدات بزرگتر ($>$) از آن هستند.

(ادامه تو پشت فیش)

نکته: با دقت در نمودار زیر می‌بینیم که $Q_۱$ (چارک اول) مکانی از محور xها است که در موقعیت $\frac{۱}{۴}$ از توزیع قرار داره، یعنی **مکانی** که $\frac{N}{۴}$ از داده‌ها **در پشت سرش** و $\frac{۳N}{۴}$ داده‌ها **در جلوش** قرار دارن (یعنی چارک اول لزوماً **مرکز** توزیع را نشان نمی‌دهد)، به همین دلیل به این شاخص، شاخص **مکانی** می‌گویند (***نه شاخص مرکزی***).

این موضوع در مورد $Q_۳$ (چارک سوم) هم صدق می‌کند، زیرا $Q_۳$ **مکانی** از توزیع است که $\frac{۳N}{۴}$ داده‌ها **در پشت سرش** و $\frac{N}{۴}$ داده‌ها هم **در جلوش** قرار دارند.

ولی $Q_۲$ (چارک دوم = میانه)، یک شاخص **مرکزی** است، زیرا $Q_۲$ بر خلاف $Q_۱$ و در ***وسط و مرکز*** توزیع داده‌ها قرار می‌گیره:



مهم:

(اقتصاد ۷۷)

چارک سوم حقوق در یک سازمان، ۶۵ هزار تومان است. یعنی سه چهارم کارکنان ..... تومان حقوق می‌گیرند.

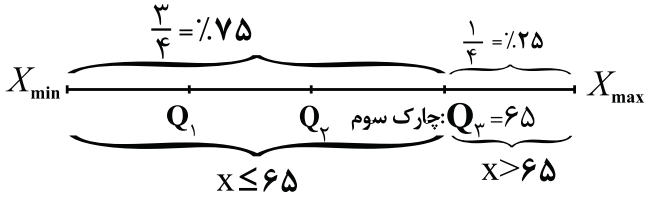
۱) تا ۶۵

۲) ۶۵

۳) بیشتر از ۶۵

۴) ۶۵ هزار تومان و بقیه کارکنان کمتر از ۶۵

پاسخ: گزینه ۱



پس در مورد چارک $(Q_۳ = ۶۵)$ جملات زیر درست اند:

٪۷۵ = $\frac{۳}{۴}$ کارکنان { تا ٦٥ (≤ ۶۵) ، کمتر یا مساوی ٦٥ (≤ ۶۵) ، حداکثر ٦٥ (≤ ۶۵) ، ٦٥ یا کمتر (≤ ۶۵) } حقوق می‌گیرند.

و می‌تونیم این طور هم بگیم که:

٪۲۵ = $\frac{۱}{۴}$ کارکنان بیشتر از ۶۵ (> ۶۵) هزار تومان حقوق می‌گیرند.

مهم:

(اقتصاد ۸۳)

در یک بررسی آماری در خصوص نمرات هوش دانش‌آموزان یک منطقهٔ آموزش و پرورش، کمیت‌های زیر بدست آمده است:

$Q_1 = ۸۰$ (چارک اول)	$\bar{X}=۱۲۰$ (میانگین حسابی)
$Q_۳ = ۱۴۰$ (چارک سوم)	$Md = ۱۱۰$ (میانه)
$S = ۲۰$ (انحراف معیار)	$Mo = ۱۰۷$ (نما)

کدام یک از موارد زیر درست است؟

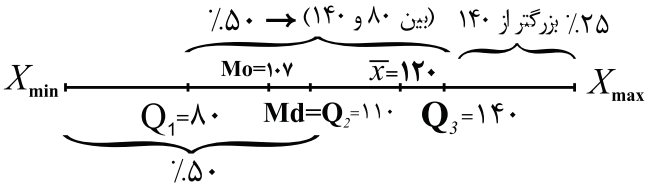
۱) نمرات نیمی از دانش‌آموزان بین ۸۰ تا ۱۴۰ می‌باشد.

۲) نمرات نیمی از دانش‌آموزان کمتر از ۱۲۰ است.

۳) نمرات ۷۵ درصد از دانش‌آموزان بیشتر از ۱۴۰ می‌باشد.

۴) نمرات بیشتر دانش‌آموزان ۱۴۰ و بیشتر است.

پاسخ: گزینه ۱



با توجه به نمودار فوق:

۱) نمرات نیمی از دانش‌آموزان(۵۰%) بین ۸۰ و ۱۴۰ است (گزینه ۱).

۲) چون $\bar{X}=۱۲۰$ بزرگتر از میانه $Md=۱۱۰$ است و با توجه به اینکه نمرات (۵۰٪) از دانش‌آموزان کمتر مساوی $Md=۱۱۰$ است، پس چون ۱۲۰ از ۱۱۰ بزرگتر است (در سمت راست آن قرار دارد)، می‌توان نتیجه گرفت که نمرات بیش از نیمی از دانش‌آموزان کمتر از ۱۲۰ است (گزینه ۲ غلط است).

۳) نمرات ۲۵٪ از دانش‌آموزان بزرگتر از $Q_۳=۱۴۰$ است (گزینه ۳ غلط است).

۴) نمرات بیشتر دانش‌آموزان (مُد نمرات) برابر $Mo=۱۰۷$ است و با توجه به اینکه $Mo=۱۰۷$ قبل از میانه ($Md=۱۱۰$) قرار دارد، پس یعنی بیشتر دانش‌آموزان (بیش از ۵۰٪ دانش‌آموزان) نمرهٔ ۱۰۷ و بیشتر دارند (گزینه ۴ غلط است).

«**دهک** : Decile»

*منظور از **دهک** چیست؟*

*چند نوع **دهک** داریم؟ مفهوم دهک‌های اول، پنجم و نهم را بیان کنید.*

آمار و احتمال، آموزشگاه پارسه، محسن طورانی، ص ۳۵

آمار کاربردی ۱، عالِم تبریز و احمد هژبر، ص ۵۱

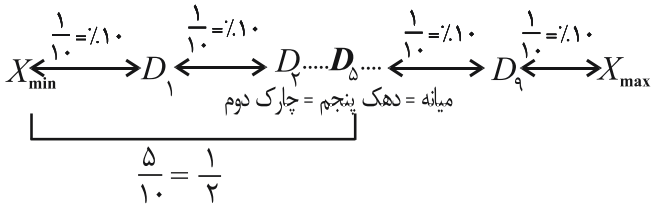
دهک (Decile):

تو فیشای قبلی، با یه شاخص **مکانی** به نام **چارک** آشنا شدیم. خب، حالا می‌خواهیم یه شاخص **مکانی** دیگه رو رونمایی کنیم که اسم مبارکش «**دهک**» است.

شبیه به چارک‌های Q_1, Q_2, Q_3 که توزیع داده‌ها را به **چهار قسمت مساوی** تقسیم می‌کنند، **دهک‌ها** توزیع داده‌ها را به **ده قسمت مساوی** تقسیم می‌کنند که آنها را معمولاً با $D_1, D_2, ..., D_9$ نمایش می‌دهیم.

دهک: *اگر دامنهٔ داده‌های جامعه آماری را به* **۱۰ قسمت مساوی** *تقسیم کنیم، به طوری که هر یک از این قسمت‌ها* **۱۰٪ یا** $\frac{1}{10}$ *از کل فراوانی‌ها را دربرداشته باشند، اون وقت با این کار دهک‌های* **اول** (D_1) **تا نهم** (D_9) *بوجود می‌آیند.*

بعد از مرتب کردن داده‌ها به صورت **صعودی** (غیرنزولی) داریم:



(ادامه تو فیش بعد)

با توجه به نمودار فوق می‌توان نتیجه‌گیری‌های زیر رو داشته باشیم:

$D_{۱} = \frac{۱}{۱۰}$ **(دهک اول)**

مقداری که $\frac{۱}{۱۰} = ٪۱۰$ مشاهدات کوچکتر یا مساوی (≤) آن هستند. یا

مقداری که $\frac{۹}{۱۰} = ٪۹۰$ مشاهدات بزرگتر (<) از آن هستند.

$D_{۵} = \frac{۵}{۱۰}$ **(دهک پنجم = میانه)**

مقداری که $\frac{۵}{۱۰} = ٪۵۰$ مشاهدات کوچکتر یا مساوی (≤) آن هستند. یا

مقداری که $\frac{۵}{۱۰} = ٪۵۰$ مشاهدات بزرگتر (<) از آن هستند.

$D_{۹} = \frac{۹}{۱۰}$ **(دهک نهم)**

مقداری که $\frac{۱}{۱۰} = ٪۱۰$ مشاهدات کوچکتر یا مساوی (≤) آن هستند. یا

مقداری که $\frac{۹}{۱۰} = ٪۹۰$ مشاهدات بزرگتر (<) از آن

(ادامه تو پشت فیش)

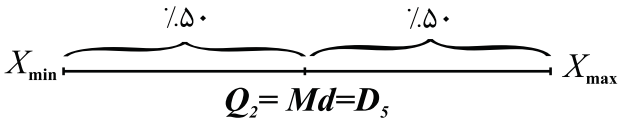
نکته: مشابه نکته‌ای که در مورد چـارک‌هـای اول (Q_1) و سـوم (Q_3) گفتیم، در مورد دهک‌ها نیز می‌تونیم بگیم که:

تنها دهک پنجم (D_5) ***یک شاخص مرکزی*** است، زیرا دقیقاً در **وسط و مرکز** مشاهدات قرار می‌گیرد، ولی بقیه دهک‌ها (D_1 تا D_4 و D_6 تـا D_9) به علت اینکه در مرکز توزیع مشـاهدات قـرار نمـی‌گیرنـد، بنـابراین دیگه شاخص مرکزی نیستند، بلکه تنها **شاخص مکانی توزیع** هستند.

توجه: با دقت در نمودار زیر، می‌توان فهمید که ***دهک پنجم همان میانه یا چارک دوم است***، زیرا دهک پنجم نیز مانند میانه و چارک دوم، مقداری است که $\frac{1}{2} = ۵۰٪$ مشاهدات کوچکتر یا مسـاوی آن و $\frac{1}{2} = ۵۰٪$ بقیـه مشاهدات، بزرگتر از آن هستند:

میانه = چارک دوم = دهک پنجم

$$D_5 = Q_2 = Md$$



دهک چهارم حقوق کارمندان، ۱۲۵ هزار تومان است، این به آن مفهوم است که ..... ۱۲۵ هزار تومان حقوق می‌گیرند.

۱) ۴۰ درصد کارمندان کمتر یا مساوی

۲) ۶۰ درصد کارمندان بیشتر از

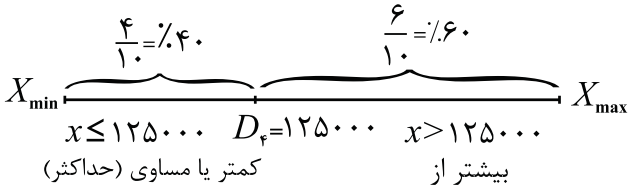
۳) ۴۰ درصد کارمندان

۴) ۶۰ درصد کارمندان حداقل

آمار و احتمال، آموزشگاه پارسه، محسن طورانی،ص ۳۶، مثال ۱

پاسخ: گزینه ۱ و ۲ صحیح است.

دهک چهارم $D_۴$، مقداری است که $\frac{۴}{۱۰} = ٪۴۰$ مشاهدات کوچکتر یا مساوی (≤) آن هستند یا $\frac{۶}{۱۰} = ٪۶۰$ مشاهدات بزرگتر (>) از آن هستند.



یعنی:

۴۰٪ کارمندان کمتر یا مساوی ۱۲۵۰۰۰ تومان حقوق می‌گیرند.

۶۰٪ کارمندان بیشتر از ۱۲۵۰۰۰ تومان حقوق می‌گیرند.

«صدک : percentile»

صدک چگونه بوجود می‌آیند؟

مفهوم صدک اول، صدک پنجاهم و صدک نود و نهم چیست؟

آمار و احتمال، آموزشگاه پارسه، محسن طورانی، ص ۳۶

«صدک (percentile :P)»

تو فیشای قبل یاد گرفتیم که شاخص‌های **مکانی** بر ۳ نوع هستن:

۱. چارک‌ها	**۲. دهک‌ها**	**۳. صدک‌ها**

که تا حالا دو مورد اول رو یاد گرفتیم و حالا می‌خواهیم بریم سراغ سومین شاخص **مکانی** که همون **صدک‌ها** هستن:

صدک:اگر دامنه داده‌های جامعه آماری را به **۱۰۰ قسمت مساوی** تقسیم کنیم، به طوری که هر یک از این قسمت‌ها، **یک درصد** $(\frac{۱}{۱۰۰}=۰/۰۱)$ از کل فراوانی‌ها (N) را در برداشته باشد، آنگاه صدک‌های **اول** $(P_۱)$ **تا نود و نهم** $(P_{۹۹})$ بوجود میان.

بعد از مرتب کردن داده‌ها به صورت **صعودی** داریم:

$$X_{min} \xleftrightarrow{\frac{۱}{۱۰۰}=٪۱} P_۱ \xleftrightarrow{\frac{۱}{۱۰۰}=٪۱} P_۲ \ldots \underbrace{P_{۵۰} \ldots}_{\text{میانه = صدک پنجاهم}} \xleftrightarrow{\frac{۱}{۱۰۰}=٪۱} P_{۹۹} \xleftrightarrow{\frac{۱}{۱۰۰}=٪۱} X_{max}$$

$$\frac{۵۰}{۱۰۰}=\frac{۱}{۲}$$

(ادامه تو فیش بعد)

$P_{۱} = \frac{۱}{۱۰}$ **(صدک اول)**

مقداری که $\frac{۱}{۱۰۰} = ۱\%$ مشاهدات کوچکتر یا مساوی (≤) آن هستند. یا

مقداری که $\frac{۹۹}{۱۰۰} = ۹۹\%$ مشاهدات بزرگتر (<) از آن هستند.

$P_{۵۰} = \frac{۵۰}{۱۰۰}$ **(دهک پنجاهم = میانه)**

مقداری که $\frac{۵۰}{۱۰۰} = ۵۰\%$ مشاهدات کوچکتر یا مساوی (≤) آن هستند. یا

مقداری که $\frac{۵۰}{۱۰۰} = ۵۰\%$ مشاهدات بزرگتر (<) از آن هستند.

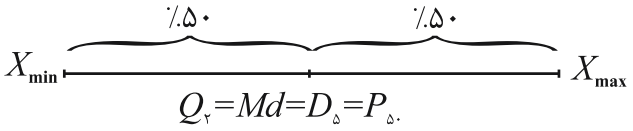
$P_{۹۹} = \frac{۹۹}{۱۰۰}$ **(صدک نود و نهم)**

مقداری که $\frac{۹۹}{۱۰۰} = ۹۹\%$ مشاهدات کوچکتر یا مساوی (≤) آن هستند. یا

مقداری که $\frac{۱}{۱۰۰} = ۱\%$ مشاهدات بزرگتر (<) از آن هستند.

(ادامه تو پشت فیش)

نکته: از بین صدک‌ها، تنها صدک **پنجاهم** $(P_{۵۰})$ است که می‌تواند یک شاخص **مرکزی** محسوب شود، زیرا دقیقاً در **وسط و مرکز** مشاهدات قرار می‌گیرد، ولی سایر صدک‌ها تنها یک شاخص **مکانی** محسوب می‌شوند و نه شاخص **مرکزی**.



(مهم):

«تطبیق چندک‌ها»

۱) از بین انواع چارک‌ها، دهک‌ها و صدک‌ها، کدوم‌شون **منطبق** بر میانه هستند؟

۲) رابطه تبدیل چارک‌ها به صدک چیست؟ (کدوم چارک بر کدوم صدک منطبقه؟)

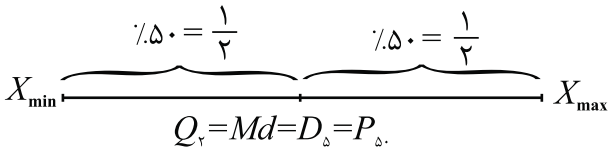
۳) رابطه تبدیل دهک‌ها به صدک‌ها کدامست؟ (کدوم دهک بر کدوم صدک منطبقه؟)

آمار و احتمال، آموزشگاه پارسه، محسن طورانی،ص ۳۶

۱) تطبیق چندک‌ها:

شاخص‌های مرکزی: صدک پنجاهم = دهک پنجم = چارک دوم = میانه

$(P_{۵۰})$ $(D_۵)$ $(Q_۲)$ (Md)



۲) تبدیل چارک‌ها به صدک‌ها:

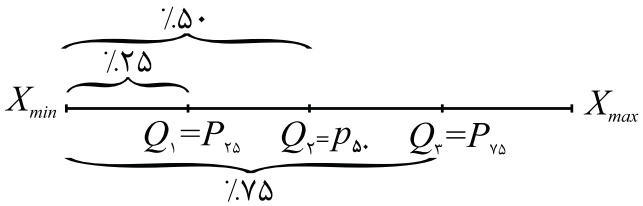
هر چارک در واقع ٪۲۵ = $\frac{۱}{۴}$ داده‌ها را در برمی‌گیرد، پس برای تبدیل چارک‌ها به صدک‌ها می‌توان به طریق زیر عمل کرد:

مثال:

- چارک اول: $Q_۱ \xrightarrow{۱\times۲۵=۲۵}$ صدک بیست و پنجم $(P_{۲۵})$
- چارک دوم: $Q_۲ \xrightarrow{۲\times۲۵=۵۰}$ صدک پنجاهم $(P_{۵۰})$
- چارک سوم: $Q_۳ \xrightarrow{۳\times۲۵=۷۵}$ صدک هفتاد و پنجم $(P_{۷۵})$

(ادامه تو فیش بعد)

بنابراین:

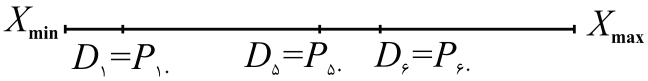


۳) تبدیل دهک‌ها به صدک‌ها:

با توجه به اینکه هر دهک، شامل $\frac{۱}{۱۰}$ = ۱۰٪ داده‌هاست، پس می‌توان گفت:

مثال:

- دهک اول : $D_۱ \xrightarrow{۱\times۱۰=۱۰}$ صدک دهم $(P_{۱۰})$
- دهک پنجم : $D_۵ \xrightarrow{۵\times۱۰=۵۰}$ صدک پنجاهم $(P_{۵۰})$
- دهک ششم : $D_۶ \xrightarrow{۶\times۱۰=۶۰}$ صدک شصتم $(P_{۶۰})$



ایستگاه خنده:

حکایات شیرین بهلول:

یکـی از مســتخدمین خلیفـه هـارون الرشــید، ماســت خورده بود و قدری از آن بر ریشش چسبیده بود. بهلـول از او سوال کرد : چه خورده ای؟

مستخدم با تمسخر گفت : کبوترخورده ام.

بهلول گفت : قبل از آن که بگویی من میدانستم.

مستخدم پرسید : از کجا میدانستی؟

بهلول گفت : چون فضله آن بر ریشت پیدا بود.

«نحوهٔ محاسبهٔ چندک‌ها در داده‌های نوع اول (حجم کم)»

مثال: چارک سوم، دهک ششم و صدک هفتاد و هشتم را در مشاهدات زیر محاسبه کنید. (مفهوم این چندک‌های محاسبه شده چیست؟)

۲۰ و ۱۰۰ و ۹۰ و ۷۳ و ۴۵ و ۸۴ و ۳۰ و ۱۵ و ۱۰ و ۷۳

آمار و احتمال، آموزشگاه پارسه، محسن طورانی،ص ۳۷ و ۳۸

«محاسبه چندک‌ها در داده‌های خام (نوع اول: حجم کم)»

گام ۱) *مرتب کردن داده‌ها به صورت صعودی و کدگذاری اونا از ۱ تا* N

گام۲) یافتن **محل چندک** (چارک، دهک و صدک) مورد نظر از رابطه زیر:

۳ و =a : شماره چارک ؛ $C_{Q_a}=\frac{aN}{۴}+\frac{۱}{۲}$ = **محل چارک a ام**

۹و ... و ۲و ۱ =a : شماره دهک ؛ $C_{D_a}=\frac{aN}{۱۰}+\frac{۱}{۲}$ = **محل دهک a ام**

۹۹و ... و ۲و ۱ =a : شماره صدک ؛ $C_{P_a}=\frac{aN}{۱۰۰}+\frac{۱}{۲}$ = **محل صدک a ام**

گام۳) یافتن **مقدار چندک:** داده متناظر با محل چندک را از بین داده-های مرتب شده بدست می‌آوریم.

مثال: *چارک سوم، دهک ششم و صدک هفتاد و هشتم را در مشاهدات زیر محاسبه کنید:* *۲۰ و ۱۰۰ و ۹۰ و ۷۳ و ۸۵ و ۸۴ و ۳۰ و ۱۵ و ۱۰ و ۷۳*

گام۱) صعودی کردن داده‌ها و کدگذاری اون:

(۱۰) (۹) (۸) (۷) (۶) (۵) (۴) (۳) (۲) (۱) : کد

۱۰۰ و ۹۰ و ۸۴ و ۷۳ و ۷۳ و ۴۵ و ۳۰ و ۲۰ و ۱۵ و ۱۰: مشاهدات

(ادامه تو فیش بعد)

گام۲) یافتن محل چندک مورد نظر:

$$C_{Q_۳} = \frac{۳N}{۴} + \frac{۱}{۲} \xrightarrow{N=۱۰} \frac{۳\times ۱۰}{۴} + \frac{۱}{۲} \Rightarrow$$ **محل چارک سوم**

$$\frac{۳۰}{۴} + \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۱۵}{۲} + \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۷/۵ + ۰/۵ = ۸ :$$ ۸اُمین داده

خب، با توجه به کدهایی که بالای داده‌هامون نوشته‌ایم، کاملاً معلومه که ۸اُمین داده، $x = ۸۴$ است، پس:

$Q_۳ = ۸۴$: **چارک سوم**

$$C_{D_۶} = \frac{۶N}{۱۰} + \frac{۱}{۲} \xrightarrow{N=۱۰} \frac{۶\times \cancel{۱۰}}{\cancel{۱۰}} + \frac{۱}{۲} \Rightarrow$$ **محل دهک ششم**

$$۶ + ۰/۵ \Rightarrow$$ محل دهک ششم : $۶/۵ \Rightarrow$ ٦اُمین داده

با نگاه به کد مشاهدات‌مون می‌بینیم که ۶اُمین داده، $x = ۷۳$ است، پس:

$D_۶ = ۷۳$: **دهک ششم**

$$C_{P_{۷۸}} = \frac{۷۸N}{۱۰۰} + \frac{۱}{۲} = \frac{۷۸\times \cancel{۱۰}}{\cancel{۱۰۰}} + \frac{۱}{۲} \Rightarrow$$ **محل صدک هفتاد و هشتم**

$$\Rightarrow \frac{۷۸}{۱۰} + \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۷/۸ + ۰/۵ = ۸/۳ \Rightarrow$$ ۸/۳اُمین داده

نکته مهم: برای یافتن مقدار ۸/۳اُمین داده باید اول دادهٔ ۸اُم (یعنی ۸۴) رو در نظر بگیریم و بعد به اندازهٔ ۰/۳ فاصله بین دادهٔ هشتم یا نهم، به سمت راست حرکت کنیم،

(ادامه تو پشت فیش)

یعنی باید ۰/۳ فاصله $x_{۸} = ۸۴$ و $x_{۹} = ۹۰$ رو به دادهٔ ۸اُم که ۸۴ است اضافه کنیم تا به دادهٔ ۸/۳ اُم برسیم، یعنی بصورت زیر:

$$\text{۸/۳ اُمین داده} = \text{۸اُم دادهٔ} + ۰/۳\,(\text{فاصله دادهٔ ۸اُم تا ۹اُم})$$
$$x_{۸/۳} = x_{۸} + ۰/۳(x_{۹} - x_{۸})$$

$$\text{۸/۳اُمین داده}: x_{۸/۳} = ۸۴ + ۰/۳(۹۰ - ۸۴) \Rightarrow$$
$$= ۸۴ + ۰/۳(۶) \Rightarrow$$
$$۸۴ + ۱/۸ = ۸۵/۸$$

پس:

$$P_{۷۸} = ۸۵/۸ : \textbf{صدک هفتاد و هشتم}$$

(GIS ۸۰)

در داده‌های آماری ۲۴ و ۵۹ و ۱۱ و ۴۱ و ۷ و ۳۵ چارک دوم کدام است؟

۱) ۱۵

۲) ۲۴

۳) ۴۱

۴) ۵۹

پاسخ: گزینه ۲

چارک دوم همان میانه است: $Q_۲ = Md$

پس به جای محاسبه چارک دوم، می‌تونیم میانه رو حساب کنیم چون حساب کردنش راحت‌تر و سریع‌تره:

گام ۱) صعودی کردن داده‌ها و کدگذاری اون:

کد : (۱) (۲) (۳) (۴) (۵) (۶) (۷) (۸)

x_i : ۱۴ و ۱۵ و ۱۶ و $\underbrace{\text{۱۷ و ۱۸}}_{\text{دو داده وسط}}$ و ۲۶ و ۲۷ و ۳۰

گام۲) تعیین محل میانه: چون تعداد داده‌ها زوجه $(N = ۸)$، پس حتماً ۲ داده، در وسط توزیع قرار می‌گیرن که میانه، برابر با **میانگین این دو دادهٔ وسط** خواهد بود.

گام ۳) تعیین مقدار میانه:

$$\text{میانه} = \text{میانگین ۲ دادهٔ وسط} \Rightarrow Md = \frac{x_۴ + x_۵}{۲} = \frac{۱۷+۱۸}{۲} = ۱۷/۵$$

«محاسبه چندک‌ها در داده‌های نوع دوم (حجم زیاد، تنوع کم)

با داشتن فراوانی مطلق (F_i)»

مثال : *چارک اول در جدول داده‌های زیر کدام است؟*

(تفسیر آن را بیان کنید).

x_i	۴	۱	۰	۷
F_i	۹	۳	۴	۱۰

۱) ۱ ۲) ۴

۳) ۰ ۴) ۰/۲۵

آمار و احتمال، آموزشگاه پارسه، محسن طورانی، ص ۳۸ و ۳۹

«**محاسبه چندک‌ها در داده‌های نوع دوم** (با داشتن فراوانی مطلق F_i)»

گام ۱) صعودی کردن طبقات و محاسبه **فراوانی تجمعی** طبقات (F_{C_i}).

گام۲) یافتن محل چندک از رابطه زیر:

$$\begin{cases} \textbf{محل چارک a ام} = C_{Q_a} = \frac{aN}{۴} + \frac{۱}{۲} \\ \textbf{محل دهک a ام} = C_{D_a} = \frac{aN}{۱۰} + \frac{۱}{۲} \\ \textbf{محل صدک a ام} = C_{P_a} = \frac{aN}{۱۰۰} + \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

گام۳) یافتن مقدار چندک: از چپ به راست اولین طبقه (x_i)ای را انتخاب می‌کنیم که:

$$\begin{cases} ۱) \text{ برای چارکها ،} \quad F_{C_i} \geq \frac{aN}{۴} + \frac{۱}{۲} \text{ باشد.} \\ ۲) \text{ برای دهکها ،} \quad F_{C_i} \geq \frac{aN}{۱۰} + \frac{۱}{۲} \text{ باشد.} \\ ۳) \text{ برای صدکها ،} \quad F_{C_i} \geq \frac{aN}{۱۰۰} + \frac{۱}{۲} \text{ باشد.} \end{cases}$$

حال برای درک بهتر مراحل فوق، با ذکر ۳ مثال، نحوه محاسبه انواع چندک (چارک، دهک و صدک) را نشان می‌دهیم:

(ادامه در فیش بعد)

مثال۱: چارک اول در جدول داده‌های زیر کدام است؟

x_i	۴	۱	۰	۷	
F_i	۱	۸	۷	۲	$N = ۲۶$

پاسخ: گزینه ۱

گام۱) صعودی کردن طبقات **X**ها و محاسبه فراوانی تجمعی طبقات:

گام۲) یافتن محل چارک اول:

$$\frac{۱N}{۴} + \frac{۱}{۲} \Rightarrow \xrightarrow{\text{چارک اول } (a=۱)} \boxed{C_{Q_۱} = \frac{aN}{۴} + \frac{۱}{۲} : \text{محل چارک a ام}}$$

$$\frac{۱ \times ۲۶}{۴} + \frac{۱}{۲} = \frac{۱۳}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۶ / ۵ + ۰ / ۵ = ۷ \rightarrow \boxed{\text{۷ اُمین داده}}$$

(داده ۵ ام تا ۷ ام) (داده یکم تا ۴ اُم)

x_i	۰	۱	۴	۷	
F_i	۴	۳	۹	۱۰	$\Sigma F_i = N = ۲۶$
F_{C_i}	۴	۷	۱۶	۲۶	

گام۳) یافتن مقدار چندک: اولین طبقه‌ای که در آن فراوانی تجمعی بزرگتر یا مساوی محل چارک اول باشه، یعنی اولین طبقه‌ای که فراوانی تجمعیش **بزرگتر یا مساوی** ۷ باشه $(F_{C_i} \geq ۷)$، طبقه $x = ۱$ است، پس:

$$\boxed{\text{چارک اول} = \text{داده ۷اُم} \Rightarrow Q_۱ = ۱}$$

روش دوم:

می تونیم به این صورت هم بگیم که با توجه به جدول، از دادهٔ ۵اُم تا ۷اُم تو طبقه $x=۱$ قرار دارن، پس چارک اول هم که دادهٔ ۷ اُم ماست، تو همین طبقه $(x=۱)$ قرار داره: $\boxed{Q_۱ = ۱}$

مفهومِ $Q_۱ = ۱$: اینه که $\frac{۱}{۴} = ۲۵٪$ داده‌ها **کمتر یا مساوی** $x = ۱$ هستن و ۷۵٪ یا $\frac{۳}{۴}$ داده‌ها **بزرگتر از** $x = ۱$ هستن.

«محاسبه چندک‌ها در داده‌های نوع دوم (حجم زیاد، تنوع کم)

با داشتن فراوانی مطلق (F_i)»

مثال ۲: دهک ششم در جدول داده‌های زیر کدام است؟

(آن را تفسیر کنید)

x_i	۴	۱	۰	۷
F_i	۷	۵	۶	۸

۱) ۰/۶ ۲) ۴

۳) ۲/۴ ۴) ۰

آمار و احتمال، آموزشگاه پارسه، محسن طورانی، ص ۳۸ و ۳۹

پاسخ: گزینه ۲

گام۱) صعودی کردن طبقات و محاسبه فراوانی تجمعی:

گام۲) یافتن محل دهک ششم:

$$\frac{۶N}{۱۰}+\frac{۱}{۲}\Rightarrow \xrightarrow{\text{دهک ۶ اُم } (a=۶)} \boxed{\text{محل دهک ششم}=C_{Q_۶}=\frac{aN}{۴}+\frac{۱}{۲}}$$

$$\xrightarrow{N=۲۶}\frac{۶\times ۲۶}{۱۰}+\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{۱۵۶}{۱۰}+\frac{۱}{۲}=۱۵/۶+۰/۵=\boxed{۱۶/۱\text{ اُمی}}$$

(داده ۱ اُم تا ۶ اُم) (داده ۷ اُم تا ۱۱ اُم) (داده ۱۲ اُم تا ۱۸ اُم)

x_i	۰	۱	۴	۷	
F_i	۶	۵	۷	۸	$\sum F_i = N = ۲۶$
F_{C_i}	۶	۱۱	۱۸	۲۶	

گام۳) یافتن مقدار دهک ششم: اولین طبقه‌ای که فراوانی تجمعیش بزرگتر یا مساوی محل دهک ششم است (یعنی $F_{C_i} \geq ۱۶/۱$)، طبقه $x=۴$ است:

$$\xrightarrow{\text{در طبقه } x=۴} F_{C_۳}=۱۸\geq ۱۶/۱\Rightarrow \boxed{\text{دهک ششم}: \text{داده ۱۶/۱ اُم} \Rightarrow D_۶=۴}$$

روش دوم: با توجه به جدول می‌بینیم که از دادهٔ ۱۲اُم تا ۱۸اُم تو طبقه $x=۴$ قرار دارن، پس مسلماً دهک ششم که دادهٔ ۱۶/۱اُم ماست هم، تو همین طبقه $(x=۴)$ قرار داره: $\boxed{D_۶=۴}$

مفهومِ $D_۶=۴$: این است که $\frac{۴}{۱۰}=۴۰\%$ داده‌ها **کوچکتر یا مساوی** $x=۴$ و $\frac{۶}{۱۰}=۶۰\%$ داده‌ها **بزرگتر از** $x=۴$ هستند.

«محاسبه چندک‌ها در داده‌های نوع دوم (حجم زیاد، تنوع کم)

با داشتن فراوانی مطلق (F_i)»

مثال ۳: *صدک ۳۶ اُم در جدول داده‌های زیر کدام است؟*

(مفهوم این عدد چیست؟)

x_i	۴	۱	۰	۷
F_i	۱۶	۵	۹	۱۰

۱) ۰

۲) ۰/۳۶

۳) ۲/۵

۴) ۳/۷

آمار و احتمال، آموزشگاه پارسه، محسن طورانی، ص ۳۸ و ۳۹

پاسخ: گزینه ۴

گام۱) **صعودی** کردن طبقات و محاسبه فراوانی **تجمعی** طبقات (F_{C_i})

گام۲) یافتن **محل** صدک سی و ششم:

$$\boxed{\text{محل صدک ۳۶ اُم} = C_{Q_{۳۶}} = \frac{aN}{۱۰۰} + \frac{۱}{۲}} \xrightarrow{a=۳۶} \frac{۳۶N}{۱۰۰} + \frac{۱}{۲} \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{N=۴۰} \frac{۳۶ \times ۴۰}{۱۰۰} + \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۱۴۴۰}{۱۰۰} + \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۱۴/۴ + ۰/۵ = \boxed{\text{۱۴/۹ اُمی}}$$

(داده ۵ اُم تا ۳۰ اُم) (داده ۰ اُم تا ۴ اُم) (داده ۱ اُم تا ۹ اُم)

x_i	۰	۱	۴	۷	
F_i	۹	۵	۱۶	۱۰	$\sum F_i = N = ۴۰$
F_{C_i}	۹	۱۴	۳۰	۴۰	

گام۳) یافتن **مقدار** صدک سی و ششم:

اولین طبقه (x_i)ای که فراوانی تجمعی‌اش بزرگتر یا مساوی محل صدک سی و ششم است (یعنی $F_{C_i} \geq ۱۴/۹$)، طبقه $x=۴$ است، اما باید دقت کنیم که در این جا نمی‌تونیم بگیم که صدک سی و ششم در طبقه $x=۴$ قرار داره، **(ادامه تو فیش بعد)**

یعنی نمی‌تونیم بگیم که صدک سی و ششم مساوی $x = ۴$ است، چون با نگاه به جدول می‌فهمیم که از دادهٔ ۱۰ اُم تا ۱۴ اُم تو طبقه $x = ۱$ قرار داره و از دادهٔ ۱۵ اُم تا ۳۰ اُم هم تو طبقه $x = ۴$ قرار داره، بنابراین دادهٔ ۱۴/۹ اُم، بیچاره مثل یه بچه بی سرپرسته که نه تو طبقه $x = ۱$ (۱۰ اُم تا ۱۴ اُم) جاشه و نه تو طبقه $x = ۴$ (۱۵ اُم تا ۳۰ اُم).

یعنی دادهٔ ۱۴/۹ اُم تو برزخ قرار گرفته، یعنی بین دادهٔ ۱۴ اُم (که مربوط به طبقه $x = ۱$ است) و دادهٔ ۱۵ اُم (که مربوط به طبقهٔ $x = ۴$ است)، قرار گرفته، بنابراین دادهٔ ۱۴/۹ اُم رو باید بصورت زیر حساب کنیم:

(فاصله دادهٔ ۱٤ اُم تا ۱۵ اُم) ۰/۹ + دادهٔ ۱٤ اُم = دادهٔ ۱٤/۹ اُم

$$\Rightarrow x_{۱۴/۹} = x_{۱۴} + ۰/۹\,(x_{۱۵} - x_{۱۴})$$

$$= ۱ + ۰/۹(۴ - ۱) \Rightarrow$$

$$= ۱ + ۰/۹(۳) \Rightarrow ۱ + ۲/۷ = ۳/۸$$

یعنی: دادهٔ ۱۴/۹ اُم $\Rightarrow P_{۳۶} = ۳/۸$ = **صدک ۳۶ اُم**

مفهوم $P_{۳۶} = ۳/۷$: این است که ۳۶٪ = $\frac{۳۶}{۱۰۰}$ مشاهدات **کوچکتر یا مساوی** $x = ۳/۷$ هستن و ۶۴٪ = $\frac{۶۴}{۱۰۰}$ مشاهدات باقیمانده، **بزرگتر از** $x = ۳/۷$ هستند.

آنکس که بداند و بداند که بداند — اسب خرد از گنبد گردون بجهاند
آنکس که بداند و نداند که بداند — بیدارش نمایید که بس خفته نماند
آنکس که نداند و بداند که نداند — لنگان خرک خویش به منزل برساند
آنکس که نداند و نداند که نداند — در جهل مرکب ابدالدهر بماند
آنکس که نداند و نخواهد که بداند — حیف است چنین جانوری زنده بماند

«نحوه محاسبه چندک‌ها در داده‌های نوع دوم (حجم زیاد، تنوع کم)

با داشتن فراوانی نسبی: (f_i)»

مثال: چارک سوم در جدول داده‌های زیر کدام است؟

(این عدد به چه مفهومی است؟)

x_i	۴	۱	۰	۷
f_i	۰/۳	۰/۱	۰/۴	۰/۲

۱) ۰ ۲) ۴

۳) ۲/۵ ۴) ۱

آمار و احتمال، آموزشگاه پارسه، محسن طورانی،ص ٤٠

«**محاسبه چندک‌ها در داده‌های نوع دوم (با داشتن فراوانی نسبی: f_i)**»

گام ۱) **صعودی** کردن طبقات و محاسبهٔ فراوانی تجمعی **نسبی** طبقات (f_i)

گام ۲) **یافتن محل چندک:**

اولین طبقه (x_i)ای که فراوانی تجمعی نسبی آن به ترتیب:

۱) برای **چارک aام** بزرگتر یا مساوی $\frac{a}{۴}$ باشد ($f_{C_i} \geq \frac{a}{۴}$)
مثال: برای چارک سوم باید $f_{C_i} \geq \frac{۳}{۴} = ۰/۷۵$ باشد.
۲) برای **دهک aام** بزرگتر یا مساوی $\frac{a}{۱۰}$ باشد ($f_{C_i} \geq \frac{a}{۱۰}$)
مثال: برای دهک ششم ($a = ۶$)، باید: $f_{C_i} \geq \frac{۶}{۱۰} = ۰/۶$
۳) برای **صدک aام** بزرگتر یا مساوی $\frac{a}{۱۰۰}$ باشد ($f_{C_i} \geq \frac{a}{۱۰۰}$)
مثال: برای صدک بیستم ($a = ۲۰$)، باید: $f_{C_i} \geq \frac{۲۰}{۱۰۰} = ۰/۲۰$

(ادامه تو فیش بعد)

پاسخ: گزینه ۲

گام ۱) صعودی کردن طبقات و محاسبه فراوانی تجمعی نسبی

(در جدول زیر):

x_i	۰	۱	۴	۷	
f_i	۰/۴	۰/۱	۰/۳	۰/۲	$\sum f_i = ۱$
f_{C_i}	۰/۴	۰/۵	۰/۸	۱	

گام ۲) یافتن محل چارک سوم:

اولین طبقه‌ای که فراوانی تجمعیش بزرگتر از $\frac{a}{۴} = \frac{۳}{۴} = ۰/۷۵$ باشه، طبقه $x = ۴$ است، پس چارک سوم ما مساوی $x = ۴$ است:

$$\xrightarrow{x=۴} f_C = ۰/۸ \geq ۰/۷۵ \Rightarrow \boxed{Q_۳ = ۴ : \text{چارک سوم}}$$

توجه کنین که: *از اونجایی که چارک سوم دقیقاً منطبق با صدک هفتاد و پنجمه، پس اگه تو این سؤال از ما مقدار $P_{۷۵}$ رو پرسیده بودن، باز هم جواب ما همون $x = ۴$ می‌شد:*

یعنی: $\boxed{Q_۳ = P_{۷۵} = ۴}$

(ادامه تو پشت فیش)

مفهوم $Q_{۳} = ۴$: اینه که ٪۷۵ $= \frac{۳}{۴}$ داده‌ها **کوچکتر یا مساوی** $x = ۴$ هستن و ٪۲۵ $= \frac{۱}{۴}$ مشاهدات باقیمانده، **بزرگتر از** $x = ۴$ هستند.

(بسیار مهم):

«نحوهٔ محاسبه چندک‌ها در داده‌های نوع سوم

(حجم زیاد, تنوع زیاد) با داشتن فراوانی مطلق : (F_i)»

مثال) (طبقات پیوسته): *چارک اول داده‌های زیر کدام است؟*

(مفهوم آن چیست؟)

C-L	۰-۶	۶-۱۲	۱۲-۱۸	۱۸-۲۴
F_i	۳	۱۰	۷	۴

۱) ۷/۸ ۲) ۱۲

۳) ۱/۸ ۴) ۶/۳

آمار و احتمال، آموزشگاه پارسه، محسن طورانی، ص ٤١

«**محاسبه چندک‌ها در داده‌های نوع سوم (دارای طبقه‌بندی فاصله‌ای)**»

توجه کنین که: *در این حالت که طبقه‌بندی ما به صورت فاصله‌ای است، یعنی طبقات به شکل (حد بالا – حد پایین) هستن، برای محاسبهٔ چندک‌ها دیگه لازم نیست طبقات رو به صورت* ***صعودی*** *مرتب کنیم، چون قاعدهٔ طبقه‌بندی کردن به صورت فاصله‌ای به این صورته که طبقات حتماً باید به صورت صعودی مرتب بشن.*

بنابراین چون در این حالت، طبقات ما از قبل، به صورت صعودی مرتب شده‌اند،پس دیگه نیازی نیست که ما دوباره این کار رو انجام بدیم.

گام ۱) محاسبه فراوانی **تجمعی** (F_{C_i}) طبقات:

گام ۲) یافتن **محل** چندک (طبقه چندک دار):

اولین طبقه (از چپ به راست) که فراوانی تجمعیش بیشتر یا مساوی $\frac{aN}{۴}$ یا $\frac{aN}{۱۰}$ یا $\frac{aN}{۱۰۰}$ باشد، یعنی:

($F_{C_i} \geq \frac{aN}{۴}$ و $\frac{aN}{۱۰}$ و $\frac{aN}{۱۰۰}$)، بترتیب نشون دهندهٔ طبقه چارک دار، دهک دار یا صدک دار ما است. **(ادامه تو فیش بعد)**

گام۳) پیوسته کردن طبقه چندک دار در صورت گسسته بودن.

گام۴) یافتن مقدار تقریبی چندک از روابط زیر:

$$\text{چارک a ام}: Q_a \approx L_i + \frac{\frac{aN}{۴} - F_{C_{i-۱}}}{F_i} \times I \quad ؛ \quad a = ۱,۲,۳$$

$$\text{دهک a ام}: D_a \approx L_i + \frac{\frac{aN}{۱۰} - F_{C_{i-۱}}}{F_i} \times I \quad ؛ \quad a = ۱,۲,...,۹$$

$$\text{صدک a ام}: P_a \approx L_i + \frac{\frac{aN}{۱۰۰} - F_{C_{i-۱}}}{F_i} \times I \quad ؛ \quad a = ۱,۲,...,۹۹$$

که در روابط فوق:

L_i : کران پایین **واقعی** طبقه چندک‌دار

$F_{C_{i-۱}}$:فراوانی تجمعی طبقه **قبل از** طبقه چندک‌دار

F_i :فراوانی مطلق طبقه چندک‌دار

I :طول طبقات = فاصله طبقات = عرض طبقات

(ادامه تو پشت فیش)

توجه: چون تو گام۳، اول اومدیم طبقات رو پیوسته کردیم، بنابراین با توجه به **پیوسته** بودن طبقات می‌تونیم بگیم که طول، عرض و فاصله طبقات با هم برابرند).

مثال((طبقات پیوسته): *چارک اول داده‌های زیر کدام است؟*

پاسخ: گزینه یک

گام ۱) محاسبه فراوانی تجمعی (در جدول زیر):

(داده ۴(اُم تا ۳(اُم) (داده یکم تا ۳(اُم)

$C-L$	۰-۶	۶-۱۲	۱۲-۱۸	۱۸-۲۴	
F_i	۳	۱۰	۷	۴	$\Sigma F_i = N = ۲۴$
F_{C_i}	۳	۱۳	۲۰	۲۴	

گام۲) یافتن محل چارک اول: اولین طبقه (از چپ به راست) که فراوانی تجمعیش از $\frac{aN}{۴}$ بزرگتره، طبقه دومه، پس این طبقه (۱۲-۶) طبقه چارک دار ماست:

(ادامه تو فیش بعد)

محل چارک اول : $\frac{aN}{۴} \xrightarrow{\text{چارک اول}(a=1)}$

$\frac{۱\times N}{۴} \xrightarrow{N=۲۴} \frac{۲۴}{۴} =$ **دادهٔ ۶اُم**

تعیین طبقه چارک‌دار (روش اول):

$\xrightarrow{\text{طبقه دوم}} F_{C_۲} = ۱۳ \geq ۶ \overset{\text{پس}}{\Longrightarrow}$ طبقه دوم (۱۲-۶) = **طبقه چندک دار**

تعیین طبقه چارک‌دار (روش دوم):

با توجه به جدول می‌بینیم که از دادهٔ اول تا سوم در طبقه (۶-۰) قرار گرفته‌اند و از دادهٔ ۴ اُم تا ۱۳ اُم هم تو طبقه (۱۲-۶) جای گرفته‌اند؛ پس می‌تونیم بگیم که دادهٔ ۶ اُم (که همون چارک اول ماست) هم حتماً تو همین طبقه (۱۲-۶) قرار داره.

توجه کنین که: تو این مثال، چون طبقات ما **پیوسته** بودن، پس دیگه نیازی به انجام گام ۳ (یعنی **پیوسته** کردن طبقه چندک‌دار) نبود.

گام۳) یافتن **مقدار** تقریبی چارک اول از رابطه زیر:

$$\boxed{\textbf{مقدار چارک}: Q_۱ \approx L_i + \frac{\frac{۱\times N}{۴} - F_{C_{i-۱}}}{F_i} \times I} \Rightarrow ۶ + \frac{\frac{۲۴}{۴} - ۳}{۱۰} \times ۶ \Rightarrow$$

(ادامه تو پشت فیش)

$$۶+\frac{۶-۳}{۱۰}\times ۶ \Rightarrow ۶+\frac{۳\times ۶}{۱۰} \Rightarrow ۶+\frac{۱۸}{۱۰} \Rightarrow ۶+۱/۸ \Rightarrow$$

$\boxed{\text{چارک اول}: Q_۱ = ۷/۸}$

مفهومِ $Q_۱ = ۷/۸$: این است که ۲۵٪ $= \frac{۱}{۴}$ مشاهدات **کوچکتر یا مساوی** $x = ۷/۸$ هستن و ۷۵٪ $= \frac{۳}{۴}$ مشاهدات **بزرگتر از** $x = ۷/۸$ هستن.

(بسیار مهم):

«نحوهٔ محاسبه چندک‌ها در داده‌های نوع سوم (حجم زیاد، تنوع زیاد)

با داشتن فراوانی مطلق : (F_i) »

مثال۲ (طبقات گسسته): *در جدول زیر صدک ۶۸اُم کدام است؟*

(مفهوم آن را بیان کنید).

C-L	۴-۶	۷-۹	۱۰-۱۲	۱۳-۱۵
F_i	۸	۷	۱۰	۱۲

۱) ۱۳/۱۹ ۲) ۱۲/۵۴

۳) ۱۲/۱۲ ۴) ۱۰/۷۵

آمار و احتمالات، آموزشگاه مدرسان شریف، ص ۲۰ مثال ۷۵

پاسخ: گزینه ۲

گام۱) محاسبه فراوانی تجمعی طبقات (در جدول).

گام۲) یافتن محل صدک ۶۸اُم: اولین طبقه‌ای که فراوانی تجمعیش **بزرگتر یا مساوی** $\frac{aN}{۱۰۰}=\frac{۶۸N}{۱۰۰}$ باشد ($F_{C_i} \geq \frac{۶۸N}{۱۰۰}$)، طبقه چهارمه (۱۵-۱۳):

محل صدک ۶۸اُم: $\frac{aN}{۱۰۰} \xrightarrow{a=۶۸} \frac{۶۸N}{۱۰۰} \xrightarrow{N=۳۷} \frac{۶۸\times ۳۷}{۱۰۰}=\frac{۲۵۱۶}{۱۰۰}$

محل صدک ۶۸اُم = ۲۵ / ۱۶ $\Rightarrow$ دارهٔ ۲۵/۱۶ اُمی

تعیین طبقه چندک‌دار :

طبقه (۱۵-۱۳) = طبقه چندک‌دار $\xrightarrow{\text{پس}}$ $F_C = ۳۷ \geq ۲۵ / ۱۶ \xrightarrow{\text{در طبقه چهارم}}$

اما یه نکته مهم: واسهٔ حساب کردن صدک ۶۸اُم خیلی عجله نکنین، چون همون‌طور که تو جدول می‌بینین، طبقات ما به صورت **گسسته** هستن، پس ما **اول باید طبقات رو پیوسته کنیم** که البته برای سرعت عمل بیشتر، فقط کافیه که طبقه چندک‌دار، یعنی طبقه (۱۵-۱۳) رو **پیوسته** کنیم:

(ادامه تو فیش بعد)

گام۳) پیوسته کردن طبقه صدک‌دار:

$$(۱۳-۱۵)\xrightarrow{\text{حدود واقعی}}(۱۳-۰/۵\ ,\ ۱۵+۰/۵)=(۱۲/۵-۱۵/۵)$$

C-L	۴-۶	۷-۹	۱۰-۱۲	۱۳-۱۵	
حدود واقعی	۳/۵-۶/۵	۶/۵-۹/۵	۹/۵-۱۲/۵	۱۲/۵-۱۵/۵	
F_i	۸	۷	۱۰	۱۲	$\Sigma F_i = N = ۳۷$
F_{C_i}	۸	(۷+۸) ۱۵	(۱۰+۱۵) ۲۵	(۱۲+۲۵) ۳۷	

گام۴) یافتن **مقدار** تقریبی صدک ۶۸اُم از رابطه زیر:

$$\text{مقدار صدک ۶۸اُم} = P_{۶۸} \cong L_i + \frac{\frac{۶۸\times N}{۱۰۰} - F_{C_{i-۱}}}{F_i}\times I \Rightarrow$$

$$P_{۶۸} = ۱۲/۵ + (\frac{۲۵/۱۶-۲۵}{۱۲})\times ۳ \Rightarrow ۱۲/۵ + (\frac{۰/۱۶}{۱۲})\times ۳ \Rightarrow$$

$$P_{۶۸} = ۱۲/۵ + \frac{۰/۴۸}{۱۲} \Rightarrow ۱۲/۵ + ۰/۰۴ \Rightarrow \boxed{P_{۶۸} = ۱۲/۵۴}$$

(ادامه تو پشت فیش)

مفهومِ $P_{۶۸} = ۱۲/۵۴$: اینه کـه ۶۸٪ $= \frac{۶۸}{۱۰۰}$ مشـاهدات، **کوچکتر یا مساوی** $x = ۱۲/۵۴$ هستن و ۳۲٪ $= \frac{۳۲}{۱۰۰}$ مشاهدات هم **بزرگتـر از** $x = ۱۲/۵۴$ هستن.

نکته۱: *با توجه به ۲ مثال حل شده در بالا ملاحظه می‌شود که پیوسته یا گسسته بودن طبقات، تفاوتی در نحوهٔ محاسبه چندک‌ها ایجاد نمی‌کنه و تنها کار اضافی‌ای که موقع گسسته بودن طبقات باید انجام بدیم، اینه که قبل از محاسبه چندک، اول بیائیم* **طبقه چندک‌دار** *رو پیوسته کنیم.*

نکته۲: *تمام محاسبات مربوط به پارامترهای مرکزی (مد، میانه، میانگین و چندک‌ها) با فرض پیوسته بودن حدود طبقات انجام می‌شوند. یعنی* **در محاسبه تمام پارامترهای مرکزی باید طول (فاصله) و عرض طبقه مساوی باشد.** *بنابراین اگر حدود طبقات با تقریب (۱، ۰/۱، ۰/۰۱و...) صورت گرفته باشد، موقع حساب کردن مد، میانگین یا چندک مورد نظر، باید حتماً و حتماً از حدود* **واقعی** *طبقات (یعنی همون حدود* **کرانه‌ها**) *استفاده کنیم، یعنی اول باید خیالمون از پیوسته بودن طبقات راحت بشه و بعدش بریم سراغ حساب کردن شاخص مرکزی یا مکانی مورد نظر (مثل همون کاری که ما تو این ۲ مثال قبلی انجام دادیم، یعنی محاسباتمون رو روی طبقات* **پیوسته** *انجام دادیم).*

(محیط زیست ۸۴)

با توجه به جدول طبقه‌بندی، مقدار چارک سوم کدام است؟

C-L	۱۰-۲۰	۲۰-۳۰	۳۰-۴۰
F_i	۱۰	۳۰	۲۰

۱) ۲۵

۲) ۳۰/۵

۳) ۳۲/۵

۴) ۴۵

پاسخ: گزینه ۳

گام ۱) محاسبه فراوانی تجمعی طبقات (در جدول زیر):

C-L	داده اول تا دهم $\overbrace{10-20}$	داده ۱۰اُم تا ۴۰اُم $\overbrace{20-30}$	داده ۴۰اُم تا ۶۰اُم $\overbrace{\boxed{30}-40}$	
F_i	10	30	$\boxed{20}$	$\Sigma F_i = N = ۶۰$
F_{C_i}	10	$\boxed{40}$	60	

گام ۲) یافتن محل چارک سوم:

اولین طبقه‌ای که فراوانی تجمعیش بزرگتر یا مساوی $\frac{۳N}{۴} = ۴۵$ باشه $(F_{C_i} \geq ۴۵)$، طبقه سومه (۴۰-۳۰)، پس:

محل چارک سوم: $\frac{۳N}{۴} \xrightarrow{N=۶۰} \frac{۳ \times \cancel{۶۰}}{\cancel{۴}} = ۳ \times ۵ = ۴۵ \rightarrow$ $\boxed{\text{داده ۴۵اُم}}$

تعیین طبقه چارک‌دار (روش اول):

$\xrightarrow{\text{در طبقه سوم}} F_C = ۶۰ \geq ۴۵ \xrightarrow{\text{پس}}$

$\boxed{\text{طبقهٔ (۴۰-۳۰) : } \textbf{طبقه چارک‌دار}}$

تعیین طبقه چارک‌دار (روش دوم): با توجه به جدول بالا می‌بینیم که داده‌های ۴۰اُم تا ۶۰اُم تو طبقه (۴۰-۳۰) قرار دارن، پس نتیجه می‌گیریم

(ادامه تو فیش بعد)

که دادهٔ ۴۵اُم (که همون چارک سومه) هم تو همین طبقه (۴۰-۳۰) قرار داره.

توجه: تو این سؤال، طبقات ما **پیوسته** هستن، پس دیگه خدا رو شکر نیازی به **پیوسته** کردن طبقه **چارک‌دار** نداریم و می‌تونیم یه راست بریم سراغ گام ۳، یعنی محاسبه مقدار چارک:

گام ۳: محاسبه چارک سوم:

$$\text{مقدار چارک سوم}: Q_۳ \approx \text{حد پایین دسته} + \frac{\frac{۳N}{۴} - F_{C_{i-۱}}}{F_i} \times \text{طول دسته}$$

$$Q_۳ \approx ۳۰ + \frac{۴۵ - ۴۰}{۲۰} \times ۱۰ \Rightarrow$$

$$Q_۳ \approx ۳۰ + \frac{۵}{\cancel{۲۰}} \times \cancel{۱۰} \Rightarrow$$

$$Q_۳ \approx ۳۰ + \frac{۵}{۲} \Rightarrow Q_۳ \approx ۳۰ + ۲/۵ \Rightarrow$$

$$\text{چارک سوم}: Q_۳ = ۳۲/۵$$

نکته تستی: *از همون لحظه‌ای که فهمیدیم چارک سوم تو طبقه (۴۰-۳۰) داره، می‌تونستیم گزینه‌های ۱ و ۴ رو حذف کنیم، چون مقدار اونا تو فاصله (۴۰-۳۰) قرار نداره.*

(مدیریت ۸۰)

در جدول زیر دهک دوم برابر چند است؟

C-L	۴۰-۵۰	۵۰-۶۰	۶۰-۷۰
F_i	۵	۱۸	۷

۱) ۴۸/۲

۲) ۵۱/۵

۳) ۵۰/۵۵

۴) ۶۲/۳۸

پاسخ: گزینه ۳

گام ۱) محاسبه فراوانی تجمعی طبقات (در جدول زیر):

C-L	40-50	٦ اُم تا ۲۳ اُم $\boxed{50} - 60$	60-70	
F_i	5	$\boxed{18}$	7	$\Sigma F_i = N = ۳۰$
F_{C_i}	$\boxed{5}$	23	30	

گام ۲) یافتن محل دهک دوم:

اولین طبقه‌ای که فراوانی تجمعیش **بزرگتر یا مساوی** $\frac{۲N}{۱۰} = ۶$ باشه $(F_{C_i} \geq ۶)$، طبقه دومه (۶۰-۵۰):

محل دهک دوم: $\frac{۲N}{۱۰} \xrightarrow{N=۳۰} \frac{۲\times ۳۰}{۱۰} = \frac{۶۰}{۱۰} = ۶ \Rightarrow$ دارهٔ ٦ اُم

یافتن طبقه دهک‌دار (روش اول): همون‌طور که تو جدول بالا می‌بینیم، داره‌های ۶ اُم تا ۲۳ اُم تو طبقه (۶۰-۵۰) قرار دارن، پس دارهٔ ۶ اُم (که همون دهک دومه) هم تو همین طبقه (۶۰-۵۰) قرار می‌گیره.

یافتن طبقه دهک‌دار (روش دوم):

$\xrightarrow{\text{در طبقه دوم}} F_C = ۲۳ \geq ۶ \xrightarrow{\text{پس}}$ (۶۰-۵۰) : **طبقه دهک‌دار**

(ادامه تو فیش بعد)

توجه: چون طبقات ما **پیوسته** هستن، پس دیگه لازم نیست طبقه دهک‌دار رو پیوسته کنیم.

$$\text{مقدار دهک دوم}: D_{۲} = \text{حد پایین طبقه} + \frac{\frac{۲N}{۱۰} - F_{C_{i-۱}}}{F_i} \times \text{فاصله (طول) طبقه}$$

$$D_{۲} = ۵۰ + \frac{۶-۵}{۱۸} \times ۱۰ \Rightarrow D_{۲} = ۵۰ + \frac{۱}{۱۸} \times ۱۰ \Rightarrow$$

$$D_{۲} = ۵۰ + \frac{\cancel{۱۰}}{\cancel{۱۸}} \Rightarrow D_{۲} = ۵۰ + \frac{۵}{۹} \Rightarrow$$

$$D_{۲} = ۵۰ + ۰/۵۵ \Rightarrow \boxed{D_{۲} = ۵۰/۵۵}$$

یه نکته ظریف: *تو گام (۲) فهمیدیم که دهک دوم تو طبقه (۶۰-۵۰) قرار داره، بنابراین با توجه به این مطلب، می‌تونستیم گزینه‌های ۱ و ۴ که مقدارشون در فاصله (۶۰-۵۰) نیست رو خیلی راحت حذف کنیم.*

واسهٔ حذف کردن یکی از دو گزینه باقیمونده (۲ یا ۳) هم روش‌های زیادی وجود داره که توسط بعضی از داوطلب‌ها انجام میشه. البته من این روش‌ها رو اصلاً به شما پیشنهاد نمی‌کنم. بعضی از این روش‌ها که شما بهتر از من باهاشون آشنایین اینا هستن:

- ده بیست سی چهل کردن
- تسبیح انداختن
- استخاره کردن و ...(بقیه شو خودتون بگین)؟؟!

(مدیریت ۷۸)

چارک اول جدول زیر کدام است؟

حدود طبقات	۲-۵	۶-۹	۱۰-۱۳
فراوانی مطلق	۱۰	۳۰	۲۰

۱) ۵

۲) ۶/۱۷

۳) ۹/۵

۴) ۱۰

پاسخ: گزینه ۲

گام ۱) محاسبه فراوانی تجمعی طبقات:

C-L	$2-5$	$\overbrace{6-9}^{\text{دادهٔ ۱۱ تا ۴۰ اُم}}$	$10-13$	
F_i	10	$\boxed{30}$	20	$\Sigma F_i = N = ۶۰$
F_{C_i}	$\boxed{10}$	40	60=N	

گام ۲) یافتن محل چارک اول:

اولین طبقه‌ای که فراوانی تجمعیش **بزرگتر یا مساوی** $\frac{۱N}{۴} = ۱۵$ باشد، $(F_{C_i} \geq ۱۵)$، طبقه (۹-۶) است:

محل چارک اول: $\frac{N}{۴} \xrightarrow{N=۶۰} \frac{۶۰}{۴} = ۱۵ \rightarrow$ دادهٔ ۱۵اُم

یافتن طبقه چارک‌دار (روش اول):

با توجه به جدول بالا می‌بینیم که داده‌های ۱۱ اُم تا ۴۰ اُم تو طبقه (۹-۶) قرار دارن، پس دادهٔ ۱۵ اُم (یعنی همون چارک اول) هم تو این طبقه (۹-۶) قرار می‌گیره. **(ادامه تو فیش بعد)**

یافتن طبقه چارک‌دار (روش دوم):

$$\xrightarrow{\text{در طبقه دوم}} F_C = ۴۰ \geq ۱۵ \xrightarrow{\text{پس}} \boxed{(۹-۶) : \textbf{طبقه چارک‌دار}}$$

گام۳) پیوسته کردن طبقه چارک‌دار:

$$(۹-۶) \xrightarrow{\pm ۰/۵} (۹+۰/۵ \text{ و } ۶-۰/۵) \Rightarrow \boxed{(۹/۵ \text{ و } ۵/۵)}$$

خب، حالا بعد از پیوسته کردن طبقه چارک‌دار می‌تونیم فاصله طبقات (I) رو بدست بیاریم:

$$\boxed{I = ۹/۵ - ۵/۵ = ۴}$$

گام ۴) محاسبه چارک اول:

$$\boxed{Q_۱ \approx \text{حد پایین } \textbf{واقعی} \text{ طبقه} + \frac{\frac{N}{۴} - F_{C_{i-۱}}}{F_i} \times \text{فاصله (طول) طبقه}}$$

$$Q_۱ \approx ۵/۵ + \frac{۱۵-۱۰}{۳۰} \times ۴ \Rightarrow Q_۱ \approx ۵/۵ + \frac{۵}{۳۰} \times ۴ \Rightarrow$$

$$Q_۱ \approx ۵/۵ + \frac{۲۰}{۳۰} \Rightarrow Q_۱ \approx ۵/۵ + \frac{۲}{۳} \Rightarrow$$

$$Q_۱ \approx ۵/۵۰ + ۰/۶۷$$

$$\boxed{\textbf{چارک اول} : Q_۱ \approx ۶/۱۷}$$

بسیار مهم:

(GIS ۸۷)

در ۱۲۰ داده‌ی آماری، کوچکترین و بزرگترین آنها به ترتیب ۱۲ و ۵۴ می‌باشد. این داده‌ها در ۷ طبقه دسته‌بندی شده‌اند، به طوری که مقدار دهک ششم برابر ۳۲ و در دسته وسط واقع است. اگر فراوانی مطلق این طبقه ۹ باشد، درصد فراوانی نسبی تجمعی آن کدام است؟

۱) ۶۳

۲) ۶۵

۳) ۶۸

۴) ۷۲

جواب: گزینه «۲»

گام۱) نوشتن داده‌های مسئله:

$$\begin{cases} N = ۱۲۰ : \text{تعداد داده‌ها} \\ X_{\max} = ۵۴ : \text{بزرگترین داده و } X_{\min} = ۱۲ : \text{کوچکترین داده} \\ K = ۷ : \text{تعداد طبقات} \\ D_۶ = ۳۲ \rightarrow : \text{دهک ششم} \quad \text{طبقه } \textbf{چهارم} = \text{طبقه } \textbf{وسط} = \text{طبقه دهک‌دار} \\ F_۴ = ۹ : \text{فراوانی } \textbf{مطلق} \text{ طبقه چهارم} = \text{فراوانی مطلق طبقه دهک‌دار} \\ P_{C_۴} = f_{C_۴} \times ۱۰۰ = ? : \text{درصد فراوانی نسبی تجمعی طبقه دهک‌دار (چهارم)} \end{cases}$$

خب، با توجه به داده‌های مسئله، برای محاسبه $P_{C_۴}$ باید از فرمول محاسبه دهک ششم استفاده کنیم:

$$\boxed{D_۶ = L_۱ + \frac{\frac{۶N}{۱۰} - F_{C_{i-۱}}}{F_i} \times I}$$

برای استفاده از فرمول بالا، اول باید مقدار L_i و I رو بدست بیاریم:

گام۲) محاسبه فاصله طبقات (I):

$$I = \frac{R}{K} = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{K} = \frac{۵۴ - ۱۲}{۷} = \frac{۴۲}{۷} = ۶ \; : \text{فاصله طبقات}$$

(ادامه تو فیش بعد)

گام۳) محاسبه حد پائین واقعی طبقه دهک‌دار (طبقه ششم):

راه اول: برای محاسبه L_i، اول باید جدول فراوانی رو تشکیل بدیم و با توجه به $I = ۶$ و $X_{\min} = ۱۲$ طبقات‌مون رو بنویسیم تا به طبقه چهارم (یعنی طبقه دهک‌دار) برسیم:

CL	$\overbrace{12\text{-}18}^{I=6}$	18-24	24-30	$\overbrace{\boxed{30}\text{-}36}^{\text{طبقه چهارم (طبقه دهک‌دار)}}$
F_i				$F_۴ = ۹$

خب، با توجه به جدول بالا می‌بینیم که:

$L_i = ۳۰$: **حد پائین واقعی طبقه دهک‌دار**

توضیح: چون کلاً $k = ۷$ تا طبقه داریم، پس طبقه وسط که طبق گفته سؤال، طبقه دهک داره، میشه طبقه چهارم.

راه دوم (تستی): *برای رسیدن به حد پائین طبقه چهارم، فقط کافیه به اندازهٔ ۳I به حد پائین طبقه اول (یعنی ۱۲) اضافه کنیم:*

$$L_۴ = L_۱ + ۳I \Rightarrow L_۴ = ۱۲ + ۳(۶) = ۱۲ + ۱۸ \Rightarrow L_۴ = ۳۰$$

$$(۱۲-۱۸) \xrightarrow{I=6} (L_۲ - U_۲) \xrightarrow{I=6} (L_۳ - U_۳) \xrightarrow{I=6} (L_۴ - U_۴),...$$

(ادامه تو پشت فیش)

خب، حالا تازه می‌تونیم فرمول دهک ششم رو بنویسم:

گام۴) استفاده از فرمول $D_۶$:

$$\boxed{D_۶ = L_i + \frac{\frac{۶N}{۱۰} - F_{C_{i-۱}}}{F_i} \times I} \Rightarrow$$

$$۳۲ = ۳۰ + \frac{\frac{۶ \times \cancel{۱۲۰}}{\cancel{۱۰}} - F_{C_{i-۱}}}{۹} \times ۶ \Rightarrow ۳۲ = ۳۰ + \frac{۶ \times ۱۲ - F_{C_{i-۱}}}{\cancel{۹}} \times \cancel{۶} \Rightarrow$$

$$۳۲ = ۳۰ + \frac{(۷۲ - F_{C_{i-۱}}) \times ۲}{۳} \Rightarrow ۳۲ = ۳۰ + \frac{۱۴۴ - ۲F_{C_{i-۱}}}{۳} \times \Rightarrow$$

$$۳۲ - ۳۰ = \frac{۱۴۴ - ۲F_{C_{i-۱}}}{۳} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ۲ = \frac{۱۴۴ - ۲F_{C_{i-۱}}}{۳} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} ۱۴۴ - ۲F_{C_{i-۱}} = ۶$$

$$\Rightarrow ۱۴۴ - ۶ = ۲F_{C_{i-۱}} \Rightarrow ۱۳۸ = ۲F_{C_{i-۱}} \Rightarrow F_{C_{i-۱}} = \frac{۱۳۸}{۲} \Rightarrow$$

فراوانی تجمعی طبقه قبل از طبقه دهک‌دار : $F_{C_{i-۱}} = F_{C_{۴-۱}} = F_{C_۳} = ۶۹$

(ادامه تو فیش بعد)

خب، ولی ما برای محاسبه $P_{C_۴}$ نیاز $F_{C_۴}$ داریم، یعنی فراوانی تجمعی خود طبقه دهک‌دار:

$$P_{C_۴} = f_{C_۴} \times ۱۰۰ \Rightarrow \frac{F_{C_۴}}{N} \times ۱۰۰$$

گام ۵) محاسبه $F_{C_۴}$:

برای این کار باید فراوانی تجمعی ما قبل، یعنی $F_{C_۳} = ۶۹$ رو با فراوانی مطلق طبقه چهارم ($F_۴ = ۹$) جمع بزنیم:

CL	طبقه سوم ۲۴-۳۰	طبقه چهارم ۳۰-۳۶
F_i		$F_۴ = ۹$
F_{C_i}	$F_{C_۳} = ۶۹$	$F_{C_۴} = ۶۹ + ۹ = ۷۸$

جمع

یعنی:

$$\boxed{F_{C_۴} = F_{C_۳} + F_۴ = ۶۹ + ۹ = ۷۸}$$

گام آخر) محاسبه $P_{C_۴}$:

$$P_{C_۴} = f_{C_۴} \times ۱۰۰ \Rightarrow \frac{F_{C_۴}}{N} \times ۱۰۰ = \frac{۷۸}{\cancel{۱۲۰}} \times \cancel{۱۰۰} \Rightarrow \frac{۷۸}{۱۲} \times ۱۰ \Rightarrow$$

$$= \frac{۲۶}{۴} \times ۱۰ \Rightarrow \frac{۱۳}{۲} \times ۱۰ \Rightarrow \frac{۱۳۰}{۲} = ۶۵ \xrightarrow{\text{پس}} \boxed{P_{C_۴} = ۶۵ \text{ درصد}}$$

مهم:

(مدیریت و حسابداری ۸۹)

متغیرهای پیوسته در جدول زیر گروه‌بندی شده‌اند.

متغیر ۸۰ درصدی داده‌ها کدام است؟

حدود دسته	۱۲-۱۵	۱۵-۱۸	۱۸-۲۱	۲۱-۲۴	۲۴-۲۷	۲۷-۳۰
فراوانی	۵	۱۰	۹	۱۱	۸	۷

۱) ۲۶/۱۲۵

۲) ۲۵/۶۲۵

۳) ۲۵/۸۷۵

۴) ۲۶/۲۲۵

پاسخ: گزینه ۳

توجه: منظور از **متغیر ۸۰ درصدی** داده‌ها، همان **صدک هشتادم** $(P_{۸۰})$ است.

گام ۱) محاسبه فراوانی تجمعی طبقات:

CL	۱۲-۱۵	۱۵-۱۸	۱۸-۲۱	۲۱-۲۴	۲۴-۲۷	۲۷-۳۰
F_i	۵	۱۰	۹	۱۱	۸	۷
F_{C_i}	۵	۱۵	۲۴	۳۵	۲۳	$N = ۵۰$

گام ۲) پیدا کردن محل صدک هشتادم:

$$C_{P_{۸۰}} = \frac{۸۰N}{۱۰۰} \xrightarrow{N=۵۰} \frac{۸۰ \times \cancel{۵۰}}{\cancel{۱۰۰}} = \frac{۸۰}{۲} = ۴۰$$: **محل صدک ۸۰اُم**

یعنی ۴۰اُمین داده، صدک هشتادمه.

پیدا کردن طبقه صدک‌دار:

اولین طبقه‌ای که فراوانی تجمعی‌اَش **بزرگتر یا مساوی** $\frac{۸۰N}{۱۰۰} = ۴۰$ باشه $(F_{C_i} \geq ۴۰)$، طبقه (۲۷-۲۴) است:

$$\xrightarrow{\text{طبقه پنجم}} F_{C_۵} = ۴۳ \geq ۴۰ \xrightarrow{\text{پس}} \boxed{(۲۷-۲۴) : \text{طبقه صدک‌دار}}$$

(ادامه تو فیش بعد)

گام ۳) محاسبه مقدار صدک ۸۰اُم:

$$\boxed{\textbf{مقدار صدک هشتادم}: P_{۸۰} = L_{۵} + \left(\frac{\frac{۸۰N}{۱۰۰} - F_{C_{i-۱}}}{F_i}\right) \times I} \Rightarrow$$

$$P_{۸۰} = ۲۴ + \left(\frac{۴۰ - ۳۵}{۸}\right) \times ۳ \Rightarrow$$

$$P_{۸۰} = ۲۴ + \frac{۵}{۸} \times ۳ \Rightarrow$$

$$P_{۸۰} = ۲۴ + \frac{۵ \times ۳}{۸} \Rightarrow$$

$$P_{۸۰} = ۲۴ + \frac{۱۵}{۸} \Rightarrow$$

$$P_{۸۰} = ۲۴ + ۱/۸۷۵ \Rightarrow$$

$$\boxed{P_{۸۰} = ۲۵/۸۷۵}$$

یعنی **متغیر ۸۰ درصدی داده‌ها** مساوی ۲۵/۸۷۵ است.

(مهم):

با استفاده از جدول زیر، دهک هفتم را محاسبه کنید.

C-L	F_i
۱۰–۲۰	۱۵
۲۰–۳۰	۳۰
۳۰–۴۰	۲۵
۴۰–۵۰	۲۰
۵۰–۶۰	۱۰
	$N = ۱۰۰$

۱) ۴۱ ۲) ۴۵

۳) ۴۰ ۴) ۴۴

توجه: از حل این سؤال به چه نکته‌ای پی بردین؟

آمار و کاربرد آن در مدیریت، عادل آذر و منصور مؤمنی، جلد ۱، ص ۱۰۷ و ۱۰۸

گام ۱) محاسبه فراوانی تجمعی طبقات (در جدول زیر):

C-L	F_i	F_{C_i}
۱۰-۲۰	۱۵	۱۵
۲۰-۳۰	۳۰	$(۳۰+۱۵)=۴۵$
۳۰-۴۰	۲۵	$(۲۵+۴۵)=\boxed{۷۰} \rightarrow$ طبقه دهک‌دار (۴۰-۳۰)
۴۰-۵۰	۲۰	$(۲۰+۷۰)=۹۰$
۵۰-۶۰	۱۰	$(۹۰+۱۰)=۱۰۰$
	$N=۱۰۰$	

گام ۲) یافتن محل دهک هفتم (طبقه دهک‌دار):

اولین طبقه از بالا به پایین که فراوانی تجمعیش بزرگتر یا مساوی $F_{C_i} \geq \frac{aN}{۱۰}$ باشد، طبقه دهک‌دار است:

محل دهک هفتم: $\frac{۷N}{۱۰} \xrightarrow{N=۱۰۰} \frac{۷\times\cancel{۱۰۰}}{\cancel{۱۰}}=۷\times۱۰=۷۰ \rightarrow$ دارای ۷۰ اُم

پیدا کردن طبقه دهک‌دار (روش اول): اولین طبقه‌ای که فراوانی تجمعیش بزرگتر یا مساوی $\frac{۷N}{۱۰}=۷۰$ باشد، طبقه سومه (۴۰-۳۰)، پس:

$\xrightarrow{\text{طبقه سوم}} F_C=۷۰\geq۷۰ \xrightarrow{\text{پس}}$ **طبقه دهک‌دار** : (۴۰-۳۰)

(ادامه تو فیش بعد)

پیدا کردن طبقه دهک‌دار (روش دوم): *با نگاه به جدول می‌فهمیم که از دادهٔ ۴۶ اُم تا ۷۰ اُم تو طبقه (۴۰- ۳۰) قرار دارن، پس دادهٔ ۷۰ اُم (یعنی دهک هفتم) هم حتماً تو این طبقه (۴۰-۳۰) قرار می‌گیره.*

توجه: چون طبقات ما **پیوسته** هستن، پس دیگه لازم نیست تا طبقه چارک‌دار (۴۰-۳۰) رو پیوسته کنیم.

مقدار دهک هفتم : $D_۷ \approx L_i + \dfrac{\frac{aN}{۱۰} - F_{C_{i-۱}}}{F_i} \times I \Rightarrow$

$$D_۷ \approx ۳۰ + \frac{۷۰ - ۴۵}{۲۵} \times ۱۰ \Rightarrow D_۷ \approx ۳۰ + \frac{۲۵}{۲۵} \times ۱۰ \Rightarrow$$

$$D_۷ \approx ۳۰ + (۱ \times ۱۰) \Rightarrow D_۷ \approx ۳۰ + ۱۰ \Rightarrow$$

دهک هفتم : $D_۷ = ۴۰$

نکته مهم: در این سؤال محل چندک ($C_{D_۷} = \frac{aN}{۱۰} =$ ۷۰ اُمی) **دقیقاً در ستون فراوانی تجمعی دیده می‌شود** ($F_{C_۳} = ۷۰$)، در این شرایط می‌توان **آن طبقه** (طبقهٔ چندک‌دار) **یا طبقه پایین‌تر از آن (بعد از آن)** را به عنوان طبقه چندک‌دار در نظر گرفت و نتیجه هر دو حالت، یکسان خواهد بود.

(ادامه تو پشت فیش)

مثلاً اگر در این سؤال، طبقه **پایین‌تر**، یعنی طبقه چهارم را به عنوان طبقه چندک‌دار در نظر بگیریم، باز هم به $D_۷ = ۴۰$ می‌رسیم: *(۴۰–۵۰)؛ طبقه چندک‌دار*

$$\boxed{\textbf{مقدار دهک هفتم}: D_۷ \approx L_i + \frac{\frac{aN}{۱۰} - F_{C_{i-۱}}}{F_i} \times I \Rightarrow}$$

$$D_۷ \approx ۴۰ + (\frac{\cancel{۷۰-۷۰}}{۲۰}) \times ۱۰ \Rightarrow D_۷ \approx ۴۰ + (\cancel{۰ \times ۱۰}) \Rightarrow$$

$$D_۷ \approx ۴۰ + ۰ \Rightarrow \boxed{D_۷ \approx ۴۰}$$

نتیجه: همون‌طور که می‌بینین جواب هر دو روش دقیقاً مثل همه.

راه‌حل و نکته تستی: اگه تو سؤال، **محل** چندک (یعنی $\frac{aN}{۴}$، $\frac{aN}{۱۰}$ یا $\frac{aN}{۱۰۰}$) رو **دقیقاً** تو بین مقادیر فراوانی **تجمعی** ببینیم (مثل این سؤال که محل و دهک هفتم، یعنی دادهٔ ۷۰ اُم، **دقیقاً** تو ستون فراوانی **تجمعی** دیده میشه: $F_{C_۳} = ۷۰$)، تو چنین حالتی **بدون نیاز به هیچ محاسبه‌ای** میتونیم بگیم که:

چندک مورد نظر ما برابر با حد بالای طبقه چندک داره.

مثلاً تو این سؤال، می‌تونستیم *بدون هیچ محاسبه‌ای*، خیلی سریع بگیم که دهک هفتم مساوی **حد بالای** طبقه سومه (۴۰-۳۰)، یعنی: $D_{۷} = ۴۰$

اما یادمون باشه که: فقط موقعی می‌تونیم از این راه حل تستی استفاده کنیم که طبقات جدول ما **از همون اول پیوسته باشن**، یعنی مثل همین سؤال.

(مهم):

«نحوهٔ محاسبه چندک‌ها در داده‌های نوع سوم (حجم زیاد و تنوع زیاد)

با داشتن فراوانی نسبی (f_i)»

مثال: *با توجه به جدول طبقه‌بندی شده زیر، مقدار دهک ششم کدام است؟ (آن را تفسیر کنید).*

a	۰–۶	۶–۱۲	۱۲–۱۸	۱۸–۲۴
f_i	۰/۳	۰/۱	۰/۴	۰/۲

۱) ۱۲/۵

۲) ۱۵

۳) ۱۱

۴) ۶

آمار و احتمال، آموزشگاه پارسه، محسن طورانی، ص ۴۲

«محاسبه چندک‌ها در داده‌های نوع سوم (طبقه‌بندی) با داشتن (f_i)»

گام ۱) محاسبه فراوانی تجمعی نسبی (f_i)

گام ۲) یافتن محل چندک (طبقه چندک‌دار):

اولین طبقه‌ای که فراوانی تجمعی نسبیش:

۱) برای **چارک** aاُم بزرگتر یا مساوی $\frac{a}{۴}$ باشد ($f_{C_i} \geq \frac{a}{۴}$)

مثلاً: برای چارک سوم باید $f_{C_i} \geq \frac{۳}{۴} = ۰/۷۵$ باشد.

۲) برای **دهک** aاُم بزرگتر یا مساوی $\frac{a}{۱۰}$ باشد ($f_{C_i} \geq \frac{a}{۱۰}$)

مثلاً: برای دهک ششم ($a = ۶$)، باید داشته باشیم: $f_{C_i} \geq \frac{۶}{۱۰} = ۰/۶$

۳) برای **صدک** aاُم بزرگتر یا مساوی $\frac{a}{۱۰۰}$ باشد ($f_{C_i} \geq \frac{a}{۱۰۰}$)

مثلاً: برای صدک بیستم ($a = ۲۰$)، باید: $f_{C_i} \geq \frac{۲۰}{۱۰۰} = ۰/۲۰$

گام ۳) پیوسته کردن طبقات در صورت گسسته بودن

گام ۴) یافتن مقدار تقریبی چندک aاُم (a: شماره چندک) از روابط زیر:

(ادامه تو فیش بعد)

توجه: با دقت در روابط زیر متوجه می‌شیم که اگر بجای فراوانی مطلق (F_i) فراوانی **نسبی** (f_i) را داشته باشیم، اون‌وقت برای محاسبه چندک‌ها، به همون روش قبلی عمل می‌کنیم، فقط با این تفاوت که در فرمول‌ها **به جای** N **از عدد یک** استفاده می‌کنیم، زیرا در واقع در اینجا N به مفهوم مجموع فراوانی‌های نسبی است که برابر با **یک** است:

$$Q_a \approx L_i + \frac{\frac{aN}{۴} - f_{C_{i-۱}}}{f_i} \times I \xrightarrow{N=۱} \boxed{Q_a \approx L_i + \frac{\frac{a}{۴} - f_{C_{i-۱}}}{f_i} \times I}$$

$$D_a \approx L_i + \frac{\frac{aN}{۱۰} - f_{C_{i-۱}}}{f_i} \times I \xrightarrow{N=۱} \boxed{D_a \approx L_i + \frac{\frac{a}{۱۰} - f_{C_{i-۱}}}{f_i} \times I}$$

$$P_a \approx L_i + \frac{\frac{aN}{۱۰۰} - f_{C_{i-۱}}}{f_i} \times I \xrightarrow{N=۱} \boxed{P_a \approx L_i + \frac{\frac{a}{۱۰۰} - f_{C_{i-۱}}}{f_i} \times I}$$

حل مثال: مقدار دهک ششم در داده‌های جدول زیر کدام است؟

C-L	۰-۶	۶-۱۲	۱۲-۱۸	۱۸-۲۴
f_i	۰/۳	۰/۱	۰/۴	۰/۲

پاسخ: گزینه ۲

گام ۱) محاسبه f_{C_i} (فراوانی تجمعی نسبی) در جدول:

CL	0-6	6-12	12-18	18-24	
f_i	۰/۳	۰/۱	۰/۴	۰/۲	$\sum f_i = N = 1$
f_{C_i}	0/3	0/4	0/8	1	

گام ۲) یافتن محل دهک ششم (طبقه دهک‌دار):

اولین طبقه‌ای که در آن فراوانی تجمعی نسبی بزرگتر یا مساوی $\frac{a}{۱۰} = \frac{۶}{۱۰} = ۰/۶$ باشد ($f_{C_i} \geq ۰/۶$). طبقه (۱۸-۱۲) است، پس این طبقه، طبقه دهک‌دار ماست:

$$\xrightarrow{\text{طبقه دوم}} f_{C_۳} = ۰/۸ \geq ۰/۶ \xrightarrow{\text{پس}} \boxed{\text{(۱۸-۱۲): طبقه دهک‌دار}}$$

توجه: طبقات ما **پیوسته** هستن، پس دیگه نمی‌خواد طبقه (۱۸-۱۲) رو پیوسته کنیم، چون خودش پیوسته هست، در نتیجه:

$\boxed{I = ۱۸ - ۱۲ = ۶}$, $\boxed{L_i = ۱۲ : \text{حد پایین واقعی طبقه دهک‌دار}}$

گام ۳) محاسبه مقدار تقریبی دهک ششم از رابطه زیر:

(ادامه تو فیش بعد)

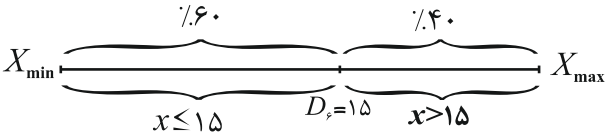
مقدار دهک ششم: $D_۶ \approx L_i + \dfrac{\frac{a}{۱۰} - f_{C_{i-۱}}}{f_i} \times I \Rightarrow$

$$D_۶ \approx ۱۲ + \frac{۰/۶ - ۰/۴}{۰/۴} \times ۶ \Rightarrow D_۶ \approx ۱۲ + \frac{۰/۲}{۰/۴} \times ۶ \Rightarrow$$

$$D_۶ \approx ۱۲ + \frac{۲}{۴} \times ۶ \Rightarrow D_۶ \approx ۱۲ + (\frac{۱}{۲} \times ۶) \Rightarrow$$

$$D_۶ \approx ۱۲ + ۳ \Rightarrow \boxed{D_۶ \approx ۱۵}$$

مفهومِ $D_۶ \approx ۱۵$: یعنی $\frac{۶}{۱۰} = ٪۶۰$ مشاهدات **کوچکتر یا مساوی** $x = ۱۵$ و $\frac{۴}{۱۰} = ٪۴۰$ مشاهدات باقیمانده هم **بزرگتر** از $x = ۱۵$ هستند:



نکته تستی: *مشابه همون نکته‌ای که قبلاً در مورد طبقات با فراوانی* **مطلق** *(F_i) گفتیم، تو اینجا هم در مورد فراوانی نسبی (f_i) می‌تونیم بگیم:*

(ادامه تو پشت فیش)

اگه طبقات جدول ما **از همون اول، خودشون پیوسته باشن،** *اون وقت اگه محل چندک ما دقیقاً توسط فراوانی تجمعی نسبی (F_i) وجود داشته باشد، تو این حالت،خیلی راحت و بدون نیاز به هیچ محاسبه‌ای می‌تونیم بگیم که:*

چندک مورد نظر ما = **حد بالای** *طبقه چندک داره*

مثال۱: اگه تو همین سؤال که طبقاتش، **از همون اول پیوسته هستن،** مقدار دهک سوم یا صدک سی‌اُم رو از ما می‌خواستن، اون وقت چون مقدار $f_C = ۰/۳$ دقیقاً توسط f_{C_i} مربوط به طبقه (۶-۰) دیده میشه، پس خیلی راحت می‌تونیم بگیم که:

$D_۳ = P_{۳۰} = ۶ \Rightarrow$ **حد بالای** *طبقه (۰-۶)*

مثال۲: اگه از ما مقدار دهک چهارم یا صدک چهلم رو بخوان، چون $f_C = ۰/۴$ تو سطر f_{C_i} دیده میشه، پس **حد بالای** این طبقه (۱۲-۶) همون چندک مورد نظر ما خواهد بود:

$D_۴ = P_{۴۰} = ۱۲ \Rightarrow$ **حد بالای** *طبقه (۶-۱۲)*

مثال۳: و اگر از ما مقدار دهک هشتم یا صدک هشتادم رو می‌خواستن، از اونجایی که تو ستون مربوطه به طبقه (۱۸-۱۲) می‌تونیم **عیناً** $f_C = ۰/۸$ رو ببینیم، پس می‌تونیم بگیم که:

$D_۸ = P_{۸۰} = ۱۸ \Rightarrow$ **حد بالای** *طبقه (۱۲-۱۸)*

بسیار مهم:

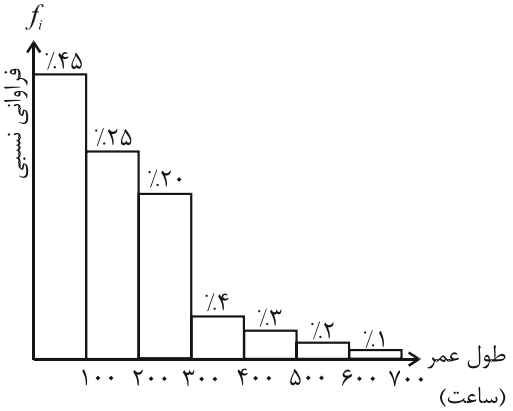
(محیط زیست – سراسری ۸۷)

توزیع طول عمر ۱۰۰۰ قطعه ترانزیستوری که در یک کارخانه تولید شده است، به شکل زیر است.

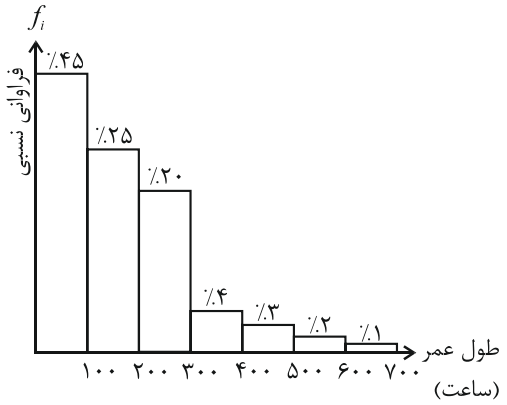
اگر بدانیم ۲۰٪ از قطعه‌ها از درجه کیفیت کمتری برخوردار می‌باشند و دارای طول عمر پایین هستند، پس این تعداد کمتر از چه مدت عمر می‌کنند؟

۱) ۲۰ ۲) ۴۴/۴

۳) ۵۰/۵ ۴) ۷۰



پاسخ: گزینه ۲



گام ۱) نوشتن جدول توزیع فراوانی و محاسبه فراوانی تجمعی نسبی :

طول عمر (ساعت)	۰–۱۰۰	۱۰۰–۲۰۰	۲۰۰–۳۰۰	۳۰۰–۴۰۰	۴۰۰–۵۰۰	۵۰۰–۶۰۰	۶۰۰–۷۰۰
فراوانی نسبی	٪۴۵	٪۲۵	٪۲۰	٪۴	٪۳	٪۲	٪۱
فراوانی نسبی تجمعی f_{C_i}	٪۴۵	٪۷۰	٪۹۰	٪۹۴	٪۹۷	٪۹۹	٪۱۰۰

گام ۲) فهمیدن صورت مسئله:

می‌دونیم که صدک بیستم، مقداری از X است که ۲۰٪ از داده‌ها کمتر یا مساوی اون هستن. (ادامه تو فیش بعد)

خب، این سؤال، از ما خواسته که طـول عمـری (xای) رو پیـدا کنـیم کـه ۲۰٪ از قطعه‌ها **کمتر یا مساوی** اون، عمر می‌کنن. یعنی در واقع به زبون بی زبونی از ما خواسته تا **مقدار صدک بیستم** رو حساب کنیم.

برای بدست آوردن صدک بیستم $(P_{۲۰})$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

گام ۲) یافتن محل صدک ۲۰ اُم:

اولین طبقه‌ای که فراوانی تجمعی نسـبیش، **بزرگتـر یـا مسـاوی** ۰/۲ یـا ۲۰٪ باشد، طبقه اول (۱۰۰-۰) است. پس صدک بیستم در طبقه اول قرار دارد.

$$\xrightarrow{\text{در طبقه اول}} f_C = ۰/۴۵ \geq ۰/۲۰ \xrightarrow{\text{پس}} \boxed{(۰-۱۰۰) : \text{طبقه صدک‌دار}}$$

توجه کنین که:

تو این سؤال، طبقات ما **پیوسـته** هستن، پـس دیگـه نیـازی بـه پیوسـته کردن طبقه (۱۰۰-۰) نداریم، چـون خـودش از قبـل **پیوســته** اسـت. در نتیجه می‌تونیم بگیم که:

$\boxed{I = ۱۰۰ - ۰ = ۱۰۰}$ و $\boxed{L_i = ۰ : \text{حد پایین واقعی طبقه صدک‌دار}}$

(ادامه تو پشت فیش)

گام ۴) محاسبه مقدار صدک:

$$\boxed{P_{۲۰} = L_i + \frac{۰/۲ - f_{C_{i-۱}}}{f_i} \times I}$$

$$P_{۲۰} = ۰ + \frac{۰/۲ - ۰}{۰/۴۵} \times ۱۰۰ \Rightarrow$$

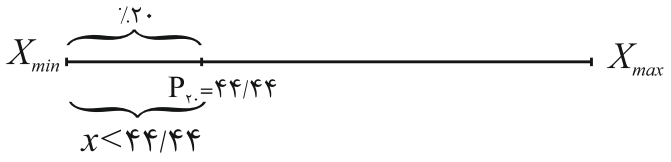
$$P_{۲۰} = \frac{۰/۲}{۰/۴۵} \times ۱۰۰ \Rightarrow$$

صورت و مخرج رو در ۱۰۰ ضرب می‌کنیم تا

$$P_{۲۰} = \frac{۰/۲ \times ۱۰۰}{۰/۴۵} = \frac{۲۰}{۰/۴۵} \xrightarrow{\text{اعشار ۰/۴۵ از بین بره}}$$

$$\Rightarrow \frac{۲۰۰۰}{۴۵} = ۴۴/۴۴ \xrightarrow{\text{پس}} \boxed{\text{ساعت } ۴۴/۴۴ = P_{۲۰} : \textbf{صدک بیستم}}$$

یعنی ۲۰٪ از قطعه‌ها ***کمتر از*** ۴۴/۴۴ ساعت عمر می‌کنن:



(مهم):

اصلی‌ترین، مهمترین و پرکاربردترین شاخص مرکزی که نشان دهندهٔ **نقطهٔ تعادل و مرکز ثقل** جامعه است، .....(۱)..... یک جامعه است.

در حقیقت اگر مشاهدات جامعه (x_i ها) را روی یک محور به صورت منظم ردیف کنیم، آنگاه .....(۲).....، **نقطه تعادل و ثقل** جامعه خواهد بود.

این محور همانند یک آلاکلنگ است که .....(۳).....، نقطه تعادل آن است، به گونه‌ای که جمع جبری گشتاور (یا تفاضلِ) داده‌ها نسبت به .....(۴).....، برابر .....(۵)..... خواهد شد.

آمار و احتمال، آموزشگاه پارسه، محسن طورانی،ص ۴۳

۱) میانگین (حسابی) **۲)** میانگین (حسابی)

۳) میانگین (حسابی) **۴)** میانگین (حسابی)

۵) صفر

اصلی‌ترین، مهمترین و پرکاربردترین شاخص مرکزی که نشان دهندهٔ **نقطهٔ تعادل و مرکز ثقل** جامعه است، **میانگین (حسابی)** یک جامعه است.

در حقیقت اگر مشاهدات یک جامعه (یعنی x_i ها) را به صورت منظم روی یک محور ردیف کنیم، آنگاه **میانگین (حسابی)**، **نقطه تعادل و ثقل** جامعه خواهد بود.

این محور همانند الاکلنگ است که *میانگین (حسابی)*، *نقطه تعادل* آن است، به گونه‌ای که جمع جبری گشتاور (یا تفاضلِ) داده‌ها نسبت به **میانگین (حسابی)**، برابر **صفر** خواهد شد.

مثال: $x_i : ۱,۲,۳ \Rightarrow$ **میانگین** $= \frac{۱+۲+۳}{۳} = \frac{۶}{۳} \Rightarrow \boxed{\mu = ۲}$

گشتاور یا تفاضل داده‌ها از میانگین $= (x_i - \mu) = (۱-۲) + (۲-۲) + (۳-۲)$

$$\Rightarrow -۱ + ۰ + ۱ = ۰$$

به عبارت دیگر می‌توان گفت:

$$\boxed{\sum (x_i - \mu) = \sum (x_i - ۲) = ۰}$$