

## سوالات و پاسخ های تشریحی درس آمار- کارشناسی ارشد مدیریت- سال ۹۵-دفترچه ۱۰۷A

۴۶- در داده های آماری  $X_i$  به صورت ۱۶، ۱۰، ۷، ۹، ۱۲، ۱۱، ۹، ۱۲ به ازای کدام مقدار  $a$  از داده های مفروض حاصل  $\sum [x_i - a]$  کمترین مقدار است؟

- (۱) ۹      (۲) ۱۰      (۳) ۱۱      (۴) ۱۲

جواب: گزینه ۳

با توجه به خاصیت مهم میانه می دانیم که:

$$\sum |x_i - a| = \text{Min} \xrightarrow{\text{آن گاه}} a = Md: \text{ میانه}$$

$$\sum |x_i - Md| = \text{Min} : \text{خاصیت مهم میانه}$$

یعنی این سوال در واقع از ما خواسته که میانه رو حساب کنیم. برای این کار اول باید داده های خام را به صورت صعودی مرتب

$$x_i = 7, 9, 9, 10, \underbrace{11}_{Md}, 12, 12, 15, 16 \quad \text{کنیم.}$$

چون تعداد داده ها فرد است ( $N=9$ )، پس داده وسط، میانه است.

## سوالات و پاسخ های تشریحی درس آمار- کارشناسی ارشد مدیریت- سال ۹۵-دفترچه ۱۰۷A

۴۷- میانگین و واریانس داده های  $X_i$  به ترتیب ۱۲،  $۶/۲۵$  می باشند. ضریب پراکندگی داده های  $Y_{i=2X_i+1}$  کدام است؟

(۴)  $۰/۲۴$

(۳)  $۰/۱۸$

(۲)  $۰/۱۵$

(۱)  $۰/۲$

(۱)

جواب: گزینه ۱

$$Cv_y = Cv_{(Y_{X+1})} = \frac{\delta_{(Y_{X+1})}}{\mu_{(Y_{X+1})}} = \frac{\delta_{Y_{X+1}}}{\mu_{Y_{X+1}}} = \frac{2\delta_x}{2\mu_x + 1}$$

پس همان طور که می بینید باید  $\delta_x$  و  $\mu_x$  را بدست بیاریم. میانگین را که خود مسئله به ما داده است: ( $\mu_x = ۱۲$ )، بنابراین

فقط کافیه انحراف معیار را حساب کنیم:

$$\delta_x^2 = ۶/۲۵ \rightarrow \delta_x = +\sqrt{۶/۲۵} \Rightarrow \boxed{\delta_x = ۲/۵}$$

$$Cv_y = \frac{2\delta_x}{2\mu_x + 1} = \frac{2 \times 2/5}{2(12) + 1} = \frac{5}{24 + 1} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} = \frac{2}{10} \Rightarrow \boxed{Cv_y = ۰/۲}$$

## سوالات و پاسخ های تشریحی درس آمار- کارشناسی ارشد مدیریت- سال ۹۵-دفترچه ۱۰۷۸

۴۸- انحراف چارکی در داده های دسته بندی شده زیر کدام است؟

حدود دسته	$< 10$	۱۰-۱۳	۱۳-۱۶	۱۶-۱۹	۱۹-۲۲	$\geq 22$
فراوانی	۵	۸	۱۱	۹	۷	۴

(۱) ۳/۱۲۵

(۲) ۳/۴۲۵

(۳) ۳/۳۷۵

(۴) ۲/۹۷۵

جواب: گزینه ۳

$$SIQR = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

انحراف چارکی

با توجه به رابطه بالا متوجه می شیم که اول باید چارک اول و سوم را بدست بیاوریم؛ برای این کار در جدول فراوانی زیر سطر فراوانی تجمعی را اضافه می کنیم.

C-L	طبقه چارک اول		طبقه چارک سوم			
	$< 10$	۱۰-۱۳	۱۳-۱۶	۱۶-۱۹	۲۲-۱۹	$\geq 22$
$F_i$	۵	۸	۱۱	۹	۷	۴
$F_{Ci}$	۵	۱۳	۲۴	۳۳	۴۰	۴۴

$\sum F_i = N = 44$

$$\text{داده } 11 \text{ ام} = \frac{N}{4} = \frac{44}{4} = 11 \Rightarrow \text{محل چارک اول}$$

**گام اول: محاسبه چارک اول:**

اولین طبقه ای از جدول که در آن فراوانی تجمعی، بزرگتر یا مساوی ۱۱ است، طبقه (۱۰-۱۳) است، یعنی چارک اول در این طبقه قرار دارد:

$$Q_1 = L_i + \frac{\frac{N}{4} - F_{Ci-1}}{F_i} \times I \Rightarrow 10 + \frac{11 - 5}{8} \times 3 \Rightarrow 10 + \frac{6}{8} \times 3 \Rightarrow 10 + \frac{9}{4} = 10 + \frac{8+1}{4} \Rightarrow 10 + \frac{8}{4} + \frac{1}{4} \Rightarrow 10 + 2 + \frac{1}{4} \Rightarrow 12 + \frac{1}{4} \Rightarrow Q_1 = 12.25$$

**گام دوم: محاسبه چارک سوم:**

$$\text{داده } 33 \text{ ام} = \frac{3N}{4} = 3 \times 11 = 33 \Rightarrow \text{محل چارک سوم}$$

اولین طبقه ای از جدول که فراوانی تجمعی آن بیشتر یا مساوی ۳۳ باشد، طبقه (۱۶-۱۹) است.

**نکته تستی کاربردی و مهم:** هرگاه محل چندک مورد نظر ما، دقیقاً در سطر فراوانی تجمعی دیده شود (مثل این سوال که محل چارک سوم، یعنی داده ۳۳ ام دقیقاً در سطر فراوانی تجمعی دیده میشه)، در این حالت خیلی سریع و ساده، حد بالای این طبقه را عنوان چندک مورد نظرمان انتخاب می کنیم، بنابراین در این سوال، حد بالای طبقه (۱۶-۱۹)، چارک سوم ما خواهد بود:

$$Q_3 = 19 \text{ : چارک سوم}$$

**گام سوم: محاسبه انحراف چارکی:**

$$SIQR = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{19 - 12.25}{2} = \frac{6.75}{2} \Rightarrow SIQR = 3.375$$

## سوالات و پاسخ های تشریحی درس آمار- کارشناسی ارشد مدیریت- سال ۹۵-دفترچه ۱۰۷A

۴۹- در ۵۶ داده آماری  $\sum (x_i - 15) = 0$  و  $\sum (x_i - 15)^2 = 126$  و  $\sum (x_i - 15)^3 = -140$  ضریب چولگی آن کدام است؟

- (۱) ۰/۲۶      (۲) -۰/۵۳      (۳) ۰/۴۷      (۴) -۰/۷۴

جواب: گزینه ۴

با توجه به داده های مسئله باید از فرمول ضریب چولگی **گشتاوری** استفاده کنیم:

$$sk = \frac{\mu_3}{\delta^3} = \frac{\frac{\sum (x_i - \mu)^3}{N}}{\delta^2 \cdot \delta}$$

برای استفاده از فرمول بالا اول باید  $\delta^2$  و  $\delta$  را حساب کنیم:

$$\delta^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N} = \frac{126}{56} \Rightarrow \boxed{\delta^2 = 2/25}$$

گام اول: محاسبه واریانس:

$$\delta = +\sqrt{\delta^2} \Rightarrow \delta = \sqrt{2/25} \Rightarrow \boxed{\delta = 1/5}$$

گام دوم: محاسبه انحراف معیار:

گام سوم: محاسبه ضریب چولگی:

$$SK = \frac{\frac{\sum (x_i - \mu)^3}{N}}{\delta^2 \delta} = \frac{\frac{-140}{56}}{2/25 \times 1/5} = \frac{-2/5}{2/25 \times 1/5} \xrightarrow[\text{ساده می کنیم}]{\text{صورت و مخرج را به ۰/۵}} \frac{-5}{2/25 \times 3} = \frac{-5}{6/25}$$

$$sk = \frac{-500}{675} \Rightarrow \boxed{sk = -0/74}$$

برای ساده شدن تقسیم، صورت و مخرج کسر را در ۱۰۰ ضرب می کنیم:

## سوالات و پاسخ های تشریحی درس آمار- کارشناسی ارشد مدیریت- سال ۹۵-دفترچه ۱۰۷۸

۵۰- از بین ۹ کالای موجود در یک کارتن ۳ عدد معیوب است، به تصادف ۴ کالا از بین آن ها برداشته شده است. با کدام احتمال، ۳ کالا سالم و یک کالا معیوب انتخاب شده است؟

(۱)	$\frac{7}{20}$	(۲)	$\frac{10}{21}$	(۳)	$\frac{11}{21}$	(۴)	$\frac{9}{20}$
-----	----------------	-----	-----------------	-----	-----------------	-----	----------------

جواب: گزینه ۲

۳ معیوب  
۶ سالم

⇒

انتخاب ۴ کالا  
 ↙ ↘  
 ۳ سالم      ۱ معیوب

۹ کالا      ۴ کالا

$$p(A) \frac{n(A)}{n(s)} = \frac{\binom{6}{3} \times \binom{3}{1}}{\binom{9}{4}} = \frac{\binom{6}{3} \times \binom{3}{1}}{\binom{9}{4}} = \frac{10}{21}$$

محاسبات:

$$\frac{\binom{6}{3} \times \binom{3}{1}}{\binom{9}{4}} = \frac{\frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \cdot 3!} \times 3}{\frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \cdot 4!}} = \frac{\frac{6 \times 5 \times 4}{3!} \times 3}{\frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4!}} = \frac{5 \times 4 \times 3}{\frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2}} = \frac{5 \times 4 \times 3}{9 \times 8 \times 7} = \frac{5 \times 4}{3 \times 2 \times 7} \Rightarrow \frac{5 \times 2}{3 \times 7} = \frac{10}{21}$$

## سوالات و پاسخ های تشریحی درس آمار- کارشناسی ارشد مدیریت- سال ۹۵-دفترچه ۱۰۷A

۵۱- در یک روش جدید بازاریابی احتمال موفقیت ۷۵ درصد است. احتمال اینکه هزینه های این روش از میزان بودجه بندی تجاوز نکند ۶۰ درصد است. احتمال تحقق هر دو هدف ۴۵ درصد است. با چند درصد احتمال، لااقل به یکی از این اهداف می‌رسیم؟

(۱)	۹۰	۸۰ (۲)	۹۵ (۳)	۱۰۰ (۴)
-----	----	--------	--------	---------

جواب: گزینه ۱

$$P(A) = 0.75 = \text{موفقیت روش جدید بازاریابی}$$

$$P(B) = 0.60 = \text{تجاوز نکردن هزینه این روش از بودجه بندی}$$

$$P(A \cap B) = 0.45 = \text{تحقق هر دو هدف بالا}$$

$$P(A \cup B) = ? = \text{تحقق حداقل یکی از ۲ هدف}$$

**نکته:** عبارت «لااقل یکی» یا «حداقل یکی» همیشه به معنای **اجتماع** پیشامدها است.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0.75 + 0.60 - 0.45 \Rightarrow 0.75 + 0.15$$

$$\Rightarrow \boxed{P(A \cup B) = 0.9}$$

## سوالات و پاسخ های تشریحی درس آمار- کارشناسی ارشد مدیریت- سال ۹۵-دفترچه ۱۰۷A

۵۲- در تابع احتمال توام دو متغیر تصادفی  $x$  و  $y$  در جدول زیر،  $\cos(x, y)$  کدام است؟

$x \backslash y$	۱	۲	۴
۳	۰/۱	۰/۲	۰/۲
۵	۰/۴	۰/۱	۰

(۱) ۰/۶

(۲) -۰/۶

(۳) ۰/۷

(۴) -۰/۷

جواب: گزینه ۴

$$cov(x, y) = \underbrace{E(xy)}_{\text{امید حاصلضرب}} - \underbrace{E(x)E(y)}_{\text{حاصلضرب امیدها}}$$

$x \backslash y$	۱	۲	۴	$f(y)$
۳	۰/۱	۰/۲	۰/۲	۰/۵
۵	۰/۴	۰/۱	۰	۰/۵
$f(x)$	۰/۵	۰/۳	۰/۲	$\Sigma=1$

با توجه به فرمول بالا، برای محاسبه کواریانس اول باید  $E(x)$ ،  $E(y)$  و  $E(xy)$  را حساب کنیم.

**گام ۱) محاسبه  $E(x)$  و  $E(y)$ :** برای این کار ابتدا باید توابع حاشیه‌ای  $f(x)$  و  $f(y)$  را در جدول روبرو بدست بیاریم.

$$E(x) = \sum x f(x) = (1 \times 0/5) + (2 \times 0/3) + (4 \times 0/2) \Rightarrow 0/5 + 0/6 + 0/8 \Rightarrow$$

$$\boxed{E(x) = 1/9}$$

$$E(y) = \sum y f(y) = (3 \times 0/5) + (5 \times 0/5) \Rightarrow 1/5 + 2/5 \Rightarrow \boxed{E(y) = 4/5}$$

**گام ۲) محاسبه  $E(xy)$ :**

$$E(xy) = \sum xy f(x, y) \Rightarrow$$

$$(1 \times 3 \times 0/1) + (2 \times 3 \times 0/2) + (4 \times 3 \times 0/2) + (1 \times 5 \times 0/4) + (2 \times 5 \times 0/1) + (4 \times 5 \times 0) \Rightarrow$$

$$0/3 + 1/2 + 2/4 + 2 + 1 \Rightarrow \boxed{E(xy) = 6/9}$$

**گام ۳) محاسبه کواریانس:**

$$cov(x, y) = E(xy) - E(x)E(y) = 6/9 - (1/9)(4) \Rightarrow 6/9 - 4/9 \Rightarrow \boxed{cov(x, y) = 2/9}$$

سوالات و پاسخ های تشریحی درس آمار- کارشناسی ارشد مدیریت- سال ۹۵-دفترچه ۱۰۷۸

۵۳- به ازای مقداری از  $k$  تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{k}{x^3}; & x > 2 \\ 0 & \text{جای دیگر} \end{cases}$  یک تابع چگالی متغیر تصادفی  $x$  است. مقدار  $p(4 \leq x \leq 6)$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{5}{18}$  (۲)  $\frac{5}{36}$  (۳)  $\frac{7}{18}$  (۴)  $\frac{7}{36}$

جواب: گزینه ۲

**توجه:** از آنجایی که در صورت سوال کلمه «چگالی» دیده می شود و بازه  $x$  هم به صورت پیوسته است:  $(x > 2)$ ، پس متوجه می شویم که تابع ما از نوع پیوسته است. در توابع پیوسته، احتمال در یک بازه برابر با انتگرال در آن بازه. پس در این سوال هم:

$$p(4 \leq x \leq 6) = \int_4^6 \frac{k}{x^3} dx$$

ولی با توجه به مجهول بودن مقدار  $k$ ، اول باید  $k$  رو حساب کنیم. برای این کار باید از قانون زیر استفاده کنیم:

$$\int_{\text{حد پایین}}^{\text{حد بالا}} f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_2^{\infty} \frac{k}{x^3} dx \xrightarrow{\text{تبدیل به حالت توانی}} \int_2^{\infty} kx^{-3} dx = \left[ \frac{kx^{-3+1}}{-3+1} \right]_2^{\infty} = \left[ \frac{kx^{-2}}{-2} \right]_2^{\infty} \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{را بیرون میاریم.}} -\frac{k}{2} \left[ x^{-2} \right]_2^{\infty} \xrightarrow{\text{برگرداندن به حالت کسری}} -\frac{k}{2} \left[ \frac{1}{x^2} \right]_2^{\infty} \Rightarrow -\frac{k}{2} \left[ \frac{1}{\infty^2} - \frac{1}{2^2} \right] \Rightarrow -\frac{k}{2} \left( 0 - \frac{1}{4} \right)$$

$$\Rightarrow -\frac{k}{2} \left( -\frac{1}{4} \right) = \frac{k}{8} \xrightarrow{\text{قانون}} \frac{k}{8} = 1 \rightarrow \boxed{k=8}$$

$$p(4 \leq x \leq 6) = \int_4^6 \frac{k}{x^3} dx \xrightarrow{k=8} \int_4^6 \frac{8}{x^3} dx \xrightarrow{\text{تبدیل به حالت توانی}} \int_4^6 8x^{-3} dx = \left[ \frac{8x^{-3+1}}{-3+1} \right] = \left[ \frac{8x^{-2}}{-2} \right] \Rightarrow$$

$$\left[ -4x^{-2} \right]_4^6 \xrightarrow{\text{برگرداندن به حالت کسری}} \left[ -\frac{4}{x^2} \right]_4^6 = \left( -\frac{4}{6^2} - \left( -\frac{4}{4^2} \right) \right) = \frac{-4}{36} + \frac{4}{16} \Rightarrow \frac{-1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{-4+9}{36} \Rightarrow$$

$$\boxed{p(4 \leq x \leq 6) = \frac{5}{36}}$$



## سوالات و پاسخ های تشریحی درس آمار- کارشناسی ارشد مدیریت- سال ۹۵-دفترچه ۱۰۷۸

۵۹- با حروف کلمه WHENCE چند رمز عبور سه حرفی می توان ساخت؟

(۱) ۹۶ (۲) ۷۸ (۳) ۶۰ (۴) ۷۲

جواب: گزینه ۴

**قاعده کلی:** هرگاه بخواهیم با استفاده از  $n$  حرف (یا  $n$  رقم) که بعضی از اونها تکراری هستند، یک کلمه یا عدد  $m$  حرفی (یا  $m$  رقمی) بسازیم (به طوری که  $m$  از  $n$  کوچکتر باشد)، آنگاه باید تک تک حالت های ممکن را بنویسیم.

خب، در این سوال کلمه «WHENCE» دارای ۶ حرف است  $n=6$  که ۲ حرف «E» تکراری هستند، پس برای نوشتن رمز عبور ۳ رقمی ( $m=3$ ) باید تک تک حالت های زیر را در نظر بگیریم و در آخر آنها را با هم جمع بزنیم (با توجه به اصل جمع):

**حالت (۱) اگر کلمه ۳ حرفی فاقد حروف تکراری باشد:** در این حالت تنها ۵ حرف برای انتخاب داریم: W, H, E, N, C

حرف سوم    حرف دوم    حرف اول

$$\boxed{5} \quad \boxed{4} \quad \boxed{3} \Rightarrow 5 \times 4 \times 3 = 20 \times 3 = \boxed{60}$$

**حالت (۲) اگر کلمه ۳ حرفی فاقد ۲ حرف تکراری «E» باشد:** در این حالت با ۳ وضعیت زیر روبرو هستیم.

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{ccc} E & E & \text{حرف سوم} \\ \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{4} \rightarrow 1 \times 1 \times 4 = \boxed{4} \\ E & & E \\ \boxed{1} & \boxed{4} & \boxed{1} \rightarrow 1 \times 4 \times 1 = \boxed{4} \\ & E & E \\ \boxed{4} & \boxed{1} & \boxed{1} \rightarrow 4 \times 1 \times 1 = \boxed{4} \end{array} \end{array} \right\} \Rightarrow 4 + 4 + 4 = \boxed{12}$$

**جمع دو حالت بالا:**  $60 + 12 = \boxed{72}$