ریاضیات DLM

آموزش سه‌بعدی مفاهیم

توابع چندمتغیره

طراح، مؤلف و گردآورنده:

امین بنیاد گذار

ویراستار علمی:

حسین خدامی

عنوان **صفحه**

آموزش توابع چند متغیره

توابع چند متغیره ۷

توابع با بیش از یک متغیر ۹

دامنه و برد توابع چند متغیره ۸

نمودار و منحنی های تراز ۱۲

خم تراز (خم بی تفاوتی) ۱۲

دامنه ترکیب دو تابع ۱۴

حد توابع چند متغیره ۱۵

دستورالعمل محاسبه حد توابع چند متغیره ۱۷

حدهای مکرر ۱۹

پیوستگی توابع چند متغیره ۲۰

قضایای پیوستگی در توابع چند متغیره ۲۱

مشتقات نسبی (جزئی) ۲۲

رابطه بین پیوستگی و مشتقات جزئی ۲۵

مشتقات جزئی مراتب بالاتر ۲۵

دیفرانسیل کامل (دیفرانسیل کل) ۲۷

دیفرانسیل مراتب بالاتر ۲۸

مشتق کامل ۳۰

مشتق تابع ضمنی ۳۲
ژاکوبین ۳۴
تابع همگِن ۳۵
قضیه اویلر ۳۶
ماکزیمم و مینیمم توابع چند متغیره ۳۸
نقاط بحرانی ۴۱
نقطه ی زینی ۴۲
تعیین نوع نقاط بحرانی ۴۴
۱) آزمون مشتق دوم ۴۵
۲) آزمون ΔM ۴۶
۳) آزمون دترمینان های هشین ۴۷
بردار گرادیان ۵۰
مشتق جهتی (سویی) ۵۰
محدب و مقعر بودن ۵۱
ماکزیمم و مینیمم توابع مقیّد ۵۲
۱) روش ضرب لاگرانژ ۵۲
۲) روش جای گذاری ۵۴

سوالات آزمون کارشناسی ارشد رشته های مدیریت ، حسابداری و اقتصاد

سوالات آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته مدیریت ۵۸

سوالات آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی رشته مدیریت ۷۱

سوالات آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته حسابداری ۸۱

سوالات آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته اقتصاد ۸۹

سوالات آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی رشته اقتصاد ۱۰۳

حل سوالات آزمون کارشناسی ارشد رشته های مدیریت و حسابداری و اقتصاد

پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته مدیریت ۱۱۲

پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد رشته مدیریت ۱۵۴

پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته حسابداری ۱۷۵

پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته اقتصاد ۱۹۶

پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد رشته اقتصاد ۲۳۲

توابع چند متغیره:

توابعی که بیش تر از یک متغیر مستقل داشته باشند، به توابع چند متغیره معروف هستند.

در حالت کلی می توان گفت در توابع تک متغیره، تنها یک متغیر مستقل وجود دارد، زمانی که گفته می‌شود $y = f(x)$ یعنی متغیر y ، فقط وابسته به متغیر مستقل x می‌باشد.

حال ممکن است یک متغیر وابسته، مانند u، تابع **دو** متغیر مستقل x و y باشد که به آن تابع **دو** متغیره می‌گیم و یا یک متغیر وابسته مانند w، تابع **سه** متغیر مستقل x و y و z باشد که به آن تابع **سه** متغیره می‌گیم.

توابع با بیش از یک متغیر:

متغیر وابسته z تابعی از متغیرهای مستقل x و y می باشد که برای مشخص کردن تابع، از نماد $z = f(x, y)$ استفاده می شود.

برای مثال $v = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲} h$ حجم مخروط قائم دوّار با شعاع r و ارتفاع h می باشد و می‌توان گفت $v = f(r, h)$ است، یعنی v تابعی از دو متغیر r و h می باشد.

اگر تابعی n متغیر مستقل داشته باشد. یعنی دامنه تابع، مجموعه n تایی های مرتب مانند $(x_۱, x_۲, \dots, x_n)$ باشد، آن گاه تابع را n متغیره نامیده و اونو با نماد $z = f(x_۱, x_۲, \dots, x_n)$ نشان می‌دیم.

مثال ۱) مقدار هر یک از توابع زیر را در نقطه‌ی داده شده بیابید. (رنجبران صفحه ۶۰۱)

الف) $f(x, y) = e^{x} + e^{-y} \quad , \quad (۰, ۰)$

ب) $f(x, y, z) = xy + lnz \quad , \quad (۱, ۲, ۱)$

حل) الف) $f(۰, ۰) = e^{۰} + e^{-۰} = ۱ + ۱ = ۲$

تست ۱۳) در تابع حقیقی دو متغیرهٔ $z = x^۲ + ۲xy + ۴y^۲$ به ازای $dx = dy = ۰/۱$

مقدار $d^۲z$ کدام است؟ (اقتصاد سراسری ۷۸)

۱) ۰/۰۷ ۲) ۰/۱۲ ۳) ۰/۱۴ ۴) ۰/۷

حل)

$$\begin{cases} z_x = ۲x + ۲y \ \rightarrow \ z_{xx} = ۲ \\ z_y = ۲x + ۸y \ \rightarrow \ z_{yy} = ۸ \\ z_{xy} = ۲ \end{cases}$$

$$\left(\text{دیفرانسیل مرتبه دوم}\right): d^۲z = z_{xx}dx^۲ + ۲z_{xy}dxdy + z_{yy}dy^۲$$

$$d^۲z = ۲dx^۲ + ۲(۲)dxdy + ۸dy^۲ = ۲dx^۲ + ۴dxdy + ۸dy^۲$$

$$d^۲z\Big|_{dx = dy = ۰/۱} = ۲(۰/۱)^۲ + ۴(۰/۱)(۰/۱) + ۸(۰/۱)^۲$$

$$d^۲z = ۰/۰۲ + ۰/۰۴ + ۰/۰۸ = ۰/۱۴$$

گزینه ۳ صحیح است.

مشتق کامل:

اگر $z = f(x,y)$ و x و y توابعی قابل دیفرانسیل گیری، نسبت به t باشند، آنگاه z تابعی مشتق پذیر از t است و:

مشتق گیری از تابع z نسبت به متغیر x

مشتق گیری از تابع x نسبت به متغیر t

مشتق گیری از تابع z نسبت به متغیر y

مشتق گیری از تابع y نسبت به متغیر t

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \times \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \times \frac{dy}{dt}}$$

به طور مشابه اگر $w = f(x, y, z)$ باشد و x وyو z توابعی قابل دیفرانسیل‌گیری نسبت به t باشند، آنگاه w تابعی مشتق پذیر از t است و می‌توان گفت:

$$\boxed{\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \times \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \times \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \times \frac{dz}{dt}}$$

مثال ۲۰) اگر $z = xy^{۲} + ۲y$ و $x = \frac{۱}{۲}e^{۲t}$ و $y = t^{۲}$ باشد، مطلوب است $\frac{dz}{dt}$؟[۱]

حل)

$$\frac{dz}{dt} = \underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}}_{\downarrow} \times \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{\downarrow} + \underbrace{\frac{\partial z}{\partial y}}_{\downarrow} \times \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{\searrow}$$

$$(y^{۲}) \times (e^{۲t}) + (۲xy + ۲)(۲t)$$

$$\frac{dz}{dt} = (t^{۲})^{۲}\,(e^{۲t}) + (۲\left(\frac{۱}{۲}e^{۲t}\right)((t^{۲}) + ۲)(۲t) = t^{۴}e^{۲t} + (t^{۲}e^{۲t} + ۲)(۲t)$$

$$\frac{dz}{dt} = t^{۴}e^{۲t} + ۲t^{۳}e^{۲t} + ۴t$$

تست ۱۴) اگر $z = t, y = sint, x = cost, w = xy + z$ باشد $\frac{dw}{dt}$ کدام است؟[۲]

۱) $۱ + cos۲t$ ۲) $cos۲t$

۳) $sin۲t$ ۴) $۱ - sin۲t$

حل)

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \times \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \times \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \times \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dw}{dt} = (y) \times (-sint) + (x) \times (cost) + (۱) \times (۱)$$

$$\frac{dw}{dt} = (sint)(-sint) + (cost)(cost) + ۱$$

$$\frac{dw}{dt} = -sin^{۲}t + cos^{۲}t + ۱ = cos^{۲}t - sin^{۲}t + ۱ = cos۲t + ۱$$

گزینه ۱ صحیح است.

---

[۱] رنجبران صفحه ۶۱۷

[۲] رنجبران صفحه ۶۱۷

*اگر $z = f(x,y)$ و x و y توابعی قابل دیفرانسیل‌گیری نسبت به r و t باشند، آنگاه z تابعی مشتق پذیر از r و t است و:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial t} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial r}}$$

مثال۲۱) اگر $z = x^۲ + xy$, $x = r^۲ + s^۲$, $y = ۳r - ۲s$ حاصل $\frac{\partial z}{\partial s}$ در نقطه ی $r = s = ۱$ چقدر است؟

حل)

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial s} = (۲x + y)(۲s) + (x)(-۲)$$

$$x = r^۲ + s^۲ \xrightarrow{r=s=۱} x = ۱ + ۱ = ۲$$

$$y = ۳r - ۲s \quad \rightarrow \quad y = ۳ - ۲ = ۱$$

$$\frac{\partial z}{\partial s}\Big|_{r=s=۱} = (۲ \times ۲ + ۱)(۲ \times ۱) + (۲)(-۲) = (۴ + ۱)(۲) + (-۴)$$

$$= (۵)(۲) - ۴ = ۱۰ - ۴ = ۶$$

مشتق تابع ضمنی:

تابع ضمنیِ $F(x,y,z) = ۰$ را در نظر بگیرید که تابع دو متغیره $z = f(x,y)$ در آن صدق نماید. این تابع دارای **دو** مشتق بصورت زیر می‌باشد:

مشتق گیری نسبت به متغیر x — مشتق گیری نسبت به متغیر y

$$z_x = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{\overbrace{F_x}^{\uparrow}}{\underbrace{F_z}_{\downarrow}} \quad , \quad z_y = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{\overbrace{F_y}^{\uparrow}}{\underbrace{F_z}_{\downarrow}}$$

مشتق گیری نسبت به متغیر z — مشتق گیری نسبت به متغیر z

مثال۲۲) تابع ضمنی $x^۳ + xy^۲ + z^۳ - xyz + ۴ = ۰$ را در نظر بگیرید. مطلوب است محاسبه z_x و z_y.[۱]

حل)

$$F(x,y,z) = x^۳ + xy^۲ + z^۳ - xyz + ۴ = ۰$$
$$F_x = ۳x^۲ + y^۲ - yz$$
$$F_y = ۲xy - xz$$
$$F_z = ۳z^۲ - xy$$

لذا داریم:

$$Z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{(۳x^۲ + y^۲ - yz)}{(۳z^۲ - xz)}$$
$$Z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{(۲xy - xz)}{(۳z^۲ - xy)}$$

تست ۱۵) اگر $\frac{۱}{x} + \frac{۱}{y} + \frac{۱}{z} - ۱ = ۰$ مقدار $\frac{\partial z}{\partial y}$ در نقطه ی $(۲,۳,۶)$ کدام است؟

۱) -۹ ۲) ۴ ۳) -۴ ۴) ۹

حل)

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{-\frac{۱}{y^۲}}{-\frac{۱}{z^۲}} = -\frac{z^۲}{y^۲} = -(\frac{z}{y})^۲$$
$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(۲,۳,۶)} = -(\frac{۶}{۳})^۲ = -(۲)^۲ = -۴$$

گزینه ۳ صحیح است.

---

[۱] محمودیان صفحه ۷۸۷

مثال ۲۹)[1] مشاهده کردیم که تابع $f(x,y)=\sqrt{۹-x^۲-y^۲}$ در نقطه‌ی $(۰,۰)$ دارای ماکزیمم نسبی است. از طرفی:

$$f_x(x,y)=\frac{-x}{\sqrt{۹-x^۲-y^۲}} \quad , \quad f_y(x,y)=\frac{-y}{\sqrt{۹-x^۲-y^۲}}$$

و ملاحظه می‌کنیم که:

$$f_x(۰,۰)=\frac{۰}{\sqrt{۹}}=۰ \quad , \quad f_y(۰,۰)=\frac{۰}{\sqrt{۹}}=۰$$

نقاط بحرانی:

اگر در تابع دو متغیره $z=f(x,y)$ نقاطی از دامنه تابع وجود داشته باشد که در آنها مشتقات جزئی مرتبه اول (Z_x,Z_y) برابر صفر باشند یا وجود نداشته باشند. این نقاط را **نقاط بحرانی** تابع می‌گویند، یعنی:

$$\boxed{\begin{cases} \overbrace{Z_x}=\dfrac{\partial z}{\partial x}=۰ \\ \underbrace{Z_y}=\dfrac{\partial z}{\partial y}=۰ \end{cases}}$$

(مشتق گیری از تابع z نسبت به متغیر x)

(مشتق گیری از تابع z نسبت به متغیر y)

دقت داشته باشید که این موضوع برای توابع با بیش از دو متغیر نیز صدق می کند، یعنی برای تابع $z=f(x_۱,x_۲,\dots,x_n)$ مجموعه نقاطی از دامنه تابع که در آنها مشتقات جزئی مرتبه اول وجود نداشته یا برابر صفر باشد را **مجموعه نقاط بحرانی** گویند.

تست ۱۹) طول و عرض نقطه بحرانی تابع $Z=۴x^۲+۲xy+۳y^۲-x-۱۴y$ کدام است؟ (اقتصاد سراسری ۸۵)

۱) $(\frac{-۱}{۲},\frac{۵}{۲})$ ۲) $(-۱,۵)$ ۳) $(۲,-۳)$ ۴) $(۲,۳)$

---

[1] رنجبران صفحه ۶۲۶

حل) $Z = ۴x^۲ + ۲xy + ۳y^۲ - x - ۱۴y$

مشتق گرفتن از تابع z نسبت به متغیر x (y عدد ثابت فرض می شود)

$$\begin{cases} \overbrace{Z_x}^{\uparrow} = ۰ \to Z_x = ۸x + ۲y - ۱ = ۰ \\ \underbrace{Z_y}_{\downarrow} = ۰ \to Z_y = ۲x + ۶y - ۱۴ = ۰ \end{cases} \qquad (-۴) \times \begin{cases} ۸x + ۲y = ۱ \\ ۲x + ۶y = ۱۴ \end{cases}$$

مشتق گرفتن از تابع Z نسبت به متغیر y (x عدد ثابت فرض شود)

$$\xrightarrow{\text{معادله پایین را در ۴−ضرب کردیم}} \begin{cases} ۸x + ۲y = ۱ \\ -۸x - ۲۴y = -۵۶ \end{cases}$$

$$-۲۲y = -۵۵ \to y = \frac{۵۵}{۲۲} = \frac{۵}{۲} \to y = \underbrace{\frac{۵}{۲}}_{\downarrow}$$

عرض نقطه بحرانی (حذف گزینه های ۲ و ۳ و ۴، زیرا در این گزینه ها y عددی دیگر معرفی شده است).

ادامه محاسبه جهت یادگیری بیشتر $\to ۸x + ۲y = ۱ \Big|_{y = \frac{۵}{۲}} \quad ۸x + ۲\left(\frac{۵}{۲}\right) = ۱$

$$۸x + ۵ = ۱ \to ۸x = -۴ \to x = \frac{-۴}{۸} = \underbrace{\frac{-۱}{۲}}_{\text{طول نقطه بحرانی}}$$

بنابراین طول و عرض نقطه بحرانی برابر است با $(\overbrace{\frac{-۱}{۲}}^{x}, \overbrace{\frac{۵}{۲}}^{y})$. **گزینه ۱ صحیح است.**

نقطه ی زینی [۱]

تابع مشتق پذیر $z = f(x, y)$ در نقطه‌ی بحرانی (a, b) دارای **نقطه زینی** است، اگر در هر دایرهٔ باز به مرکز (a, b) نقاطی چون (x, y) از دامنه باشند که در آن $f(x, y) > f(a, b)$ و نقاطی چون (x, y) از دامنه باشند که در آن $f(x, y) < f(a, b)$ باشد. در این‌حالت، نقطه $(a, b, f(a, b))$ واقع بر تابع $Z = f(x, y)$ را **نقطه زینی** تابع می نامند.

[۱] رنجبران صفحه ۶۲۷ و ۶۲۸

$$x = ۰\,,\ \ y = -\frac{۳}{۲} \ \rightarrow\ \ z = -\frac{۹}{۴} \ \rightarrow\ \ (۰, -\frac{۳}{۲}, -\frac{۹}{۴})$$

$$x = ۲\ ,\ \ y = -\frac{۳}{۲} \ \rightarrow\ z = \frac{۷}{۴} \ \rightarrow\ \ (۲, -\frac{۳}{۲}, \frac{۷}{۴})$$

حال برای تعیین نوع نقطه بحرانی از (آزمون ΔM) استفاده می‌کنیم.

$$z_{xx} = ۶ - ۶x \quad , \quad z_{yy} = ۲ \quad , \quad z_{xy} = z_{yx} = ۰$$

$$\Delta M = z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^{۲} = ۲(۶ - ۶x) = ۱۲ - ۱۲x$$

$$\Delta\left(۰, -\frac{۳}{۲}\right) = ۱۲ > ۰ \quad , \ z_{xx}\left(۰, -\frac{۳}{۲}\right) = ۶ > ۰$$

بنابراین نقطه بحرانی $(۰, -\frac{۳}{۲}, -\frac{۹}{۴})$ نقطه می‌نیمم **نسبی** است.

و نقطه بحرانی $(۰, -\frac{۳}{۲}, \frac{۷}{۴})$ نقطه **زینی** است: $\Delta\left(۲, -\frac{۳}{۲}\right) = -۱۲ < ۰$

❄۳) آزمون دترمینان های هشین: (روشی مفید در حل تست ها)

با توجه به اینکه فرمول $d^{۲}z$ (دیفرانسیل مرتبه دوم) به صورت زیر می باشد:

$$d^{۲}z = z_{xx}dx^{۲} + ۲z_{xy}dxdy + z_{yy}dy^{۲}$$

حال اگر بخواهیم آن را به فرم ماتریسی نشان دهیم، به صورت زیر می باشد:

$$d^{۲}z = [dx \quad dy]\begin{bmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

که ماتریس **هشین** آن به صورت زیر می باشد:

$$H = \begin{bmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{bmatrix}$$

می دانیم که علامت فرم درجه دوم $d^{۲}z$ به علامت دترمینان های اصلی ماتریس هشین بستگی دارد. حال می توان گفت دترمینان های اصلی ماتریس هشین (مینورهای اصلی) عبارتند از:

$$|H_{۱}| = z_{xx} \qquad , \quad |H_{۲}| = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix}$$

بنابراین:

الف) اگر $|H_1| < 0$, $|H_2| > 0$ باشد، آنگاه نقطه M **ماکزیمم** است.

ب) اگر $|H_1| > 0$, $|H_2| > 0$ باشد، آنگاه نقطه M **مینیمم** است.

ج) در غیر این صورت، نقطه بحرانیِ ما از نوع نقطه **زینی** می باشد.

توجه: قضیه گفته شده در بالا برای تابع n متغیره $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ نیز قابل تعمیم می باشد. یعنی باید دترمینان های اصلی ماتریس هشین را تشکیل می دهیم:

$$|H_1| = Z_{x_1x_1} \quad , \quad |H_2| = \begin{bmatrix} Z_{x_1x_1} & Z_{x_1x_2} \\ Z_{x_2x_1} & Z_{x_2x_2} \end{bmatrix}, \dots, |H_n| = \begin{vmatrix} Z_{x_1x_1} & Z_{x_1x_1} \cdots Z_{x_1x_n} \\ Z_{x_1x_1} & Z_{x_2x_2} \dots Z_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots \\ Z_{x_nx_1} & Z_{x_nx_2} \dots Z_{x_nx_n} \end{vmatrix}$$

شرط های گفته شده را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

الف) اگر $|H_1| < 0$, $|H_2| > 0$, $|H_3| < 0$, $|H_4| > 0$ و .... آنگاه نقطه M **ماکزیمم** است.

(در این حالت، علامت ها یکی در میان، منفی و مثبت هستند.)

ب) اگر $|H_1| > 0$, $|H_2| > 0$, ... $|H_n| > 0$ آنگاه نقطه M **می‌نیمم** است.

ج) در غیر این صورت، نقطه بحرانی نقطه **زینی** است.

اگر برخی از نامساویها به تساوی تبدیل شود بهتر است علامت d^2z را مستقیماً بررسی کنیم.

تست ۲۰) تابع $z = 2x^2 + xy + 2y^2 + 1$ مفروض است، مقدار تابع در نقطه بحرانی این تابع کدام است؟ (اقتصاد سراسری ۹۰)

۱) $z = 1$ ماکزیمم

۲) $z = 1$ می نیمم مطلق

۳) $z = 2$ ماکزیمم مطلق

۴) $z = 2$ زینی

حل)

$$z = ۲x^۲ + xy + ۲y^۲ + ۱$$

$$\begin{cases} z_x = ۰ \to ۴x + y = ۰ \\ z_y = ۰ \to ۴y + x = ۰ \end{cases} \xRightarrow{(-۴)\times} \begin{cases} ۴x + y = ۰ \\ x + ۴y = ۰ \end{cases} \xrightarrow[\text{ضربدر}(-۴)]{\text{معادله پایین}} \begin{cases} ۴x + y = ۰ \\ -۴x - ۱۶y = ۰ \\ \hline -۱۵\,y = ۰ \to y = ۰ \end{cases}$$

$$z\Big|_{\substack{x=۰\\ y=۰}} = ۲(۰)^۲ + (۰)(۰) + ۲(۰)^۲ + ۱ = ۱ \to \boxed{z = ۱} \to$$ حذف گزینه های ۳و۴

$$۴x + y = ۰\Big|_{y=۰} \quad ۴x + ۰ = ۰ \to \boxed{x = ۰}$$

برای تشخیص نوع نقطه، از **آزمون دترمینان هشین** استفاده می کنیم:

$$|H_۲| = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۴ & ۱ \\ ۱ & ۴ \end{vmatrix} = (۴)(۴) - (۱)(۱) = ۱۵ > ۰ \to |H_۲| > ۰$$

$|H_۱| = z_{xx} = ۴ > ۰ \to$ نقطه بحرانی می نیمم است

گزینه ۲ صحیح است.

تست ۲۱) نقطه بحرانی تابع دو متغیری $z = ۲x^۲ + y^۲ - ۳xy - ۲x + ۲y$ چگونه است؟

(مدیریت و حسابداری سراسری ۸۸)

۱)زینی ۲) عطف ۳) ماکسیمم ۴) می نیمم

حل) $z = ۲x^۲ + y^۲ - ۳xy - ۲x + ۲y$

$$\begin{cases} z_x = ۴x - ۳y - ۲ \quad \to \quad z_{xx} = ۴ \\ z_y = ۲y - ۳x + ۲ \quad \to \quad z_{yy} = ۲ \\ z_{xy} = z_{yx} = -۳ \end{cases}$$

حال با استفاده از **آزمون دترمینان هشین** می توان گفت:

$$|H_۱| = z_{xx} = ۴ > ۰ \quad , \quad |H_۲| = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۴ & -۳ \\ -۳ & ۲ \end{vmatrix}$$

$$|H_۲| = (۴)(۲) - (-۳)(-۳) = ۸ - ۹ = -۱ < ۰$$

بنابراین $|H_۱| > ۰$, $|H_۲| < ۰$ می باشد، پس نقطه بحرانی، **زینی** می باشد (چون علامت‌ها باهم فرق دارند). **گزینه ۱ صحیح است.**

سوالات آزمون های کارشناسی ارشد سراسری و آزاد

فصل:

توابع چند متغیره

(مدیریت – حسابداری)

حل سوالات آزمون کارشناسی ارشد سراسری و آزاد

فصل توابع چند متغیره

(مدیریت – حسابداری)

۳۲۰. **گزینه ۳ صحیح است.** **حل کلاسیک** : ابتدا مقدار U و V را بدست می آوریم :

$$Z = e^{u+V}\begin{cases} U = x^{۲} - y^{۲} \xRightarrow{x=y=۱} ۱^{۲} - ۱^{۲} \;\rightarrow\; U = ۰ \\ V = ۳x + ۲y \xRightarrow{x=y=۱} ۳(۱) + ۲(۱) = ۵ \;\rightarrow\; V = ۵ \end{cases}$$

$$Z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial x} = (e^{u+v})(۲x) + (e^{u+v})(۳)$$

$$Z_x \left| \begin{array}{l} x = ۱ \;\; (e^{۰+۵})\big(۲(۱)\big) + (e^{۰+۵})(۳) = ۲e^{۵} + ۳e^{۵} = ۵e^{۵} \\ y = ۱ \\ u = ۰ \\ v = ۵ \end{array} \right.$$

$$Z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial y} = (e^{u+v})(-۲y) + (e^{u+V})(۲)$$

$$Z_y \left| \begin{array}{l} x = ۱ \;\; (e^{۰+۵})\big(-۲(۱)\big) + (e^{۰+۵})(۲) = -۲e^{۵} + ۲e^{۵} = ۰ \\ y = ۱ \\ U = ۰ \\ V = ۵ \end{array} \right.$$

حل تکنیکی :

ابتدا مقادیر داده شده U و V را در تابع Z قرار داده و در صورت امکان ساده کرده سپس از خود تابع Z نسبت به متغیر x و نسبت به متغیر y جداگانه مشتق گرفته و در مرحله آخر با یکدیگر جمع کنید. بنابراین داریم:

$$Z = e^{U+V} \xRightarrow{U=x^{۲}-y^{۲},V=۳x+۲y} Z = e^{\overbrace{x^{۲}-y^{۲}+۳x+۲y}^{u}}$$

$$\xRightarrow{y=e^{u}\rightarrow y'=u'\times e^{u}} Z_x = (۲x + ۳x) \times e^{x^{۲}-y^{۲}+۳x+۲y} \xRightarrow{x=y=۱} (۲ \times ۱ + ۳ \times ۱)e^{۵} = ۵e^{۵}$$

در بالا مشتق گیری نسبت به متغیر x انجام شد در ضمن yعدد ثابت فرض شد.

$$\xRightarrow{y=e^{u}\rightarrow y'=u'\times e^{u}} Z_y = (-۲y + ۲) \times e^{x^{۲}-y^{۲}+۳x+۲y} \xRightarrow{x=y=۱} (-۲(۱) + ۲)e^{۵} = ۰$$

در بالا مشتق گیری نسبت به متغیر y انجام شد در ضمن xعدد ثابت فرض شد

$$Z_x + Z_y = ۵e^{۵} + ۰ = ۵e^{۵}$$

۳۲۱. **گزینه ۲ صحیح است.** **یادآوری**: قضیه اولر: اگر تابع همگن از درجه n باشد داریم:

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)+x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)+\cdots+x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)=nf(x)$$

$$z(\lambda x,\lambda y)=\frac{(\lambda x)^3(\lambda y)^3}{(\lambda x)(\lambda y)}=\frac{(\lambda^3x^3)(\lambda^3y^3)}{(\lambda x)(\lambda y)}=\frac{\lambda^6x^3y^3}{\lambda^2xy}=\lambda^4\frac{\overbrace{x^3y^3}^{z}}{xy}=\lambda^4z\to n=4$$

بنابراین تابع $z=\frac{x^3y^3}{xy}$ تابع همگنی از درجه ۴ می باشد و قضیه اولر صادق است.

---

۳۲۲. **گزینه ۳ صحیح است.**

$$Q=\lim_{\rho\to 0}\left[0/3k^{-\rho}+0/7L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}=\left[0/3+0/7\right]^{-\frac{1}{\rho}}=1^{\infty}$$

$$\xRightarrow{\text{از طرفین } ln \text{ می گیریم}}\quad \lim_{\rho\to 0}\ln Q=\lim_{\rho\to 0}\frac{\ln(0/3k^{-\rho}+0/7L^{-\rho})}{-\rho}$$

$$=\frac{0}{0}\ \frac{\text{مشتق صورت}}{\text{مشتق مخرج}}\xRightarrow{Hopital}\lim_{\rho\to 0}\frac{\frac{-0/3k^{-\rho}\ln k-0/7k^{-\rho}\ln l}{0/3k^{-\rho}+0/7L^{-\rho}}}{-1}$$

$$\lim_{\rho\to 0}\ln Q=\frac{-(0/3\ln k+0/7\ln l)}{-(0/3+0/7)}=0/3\ln k+0/7\ln L=\ln k^{0/3}+\ln L^{0/7}=\ln k^{0/3}L^{0/7}$$

$$\lim_{\rho\to 0}\ln Q=\ln k^{0/3}L^{0/7}\to\quad \lim_{\rho\to 0}Q=k^{0/3}L^{0/7}$$

---

۳۲۳. **گزینه ۲ صحیح است.**

حل : شرط مرتبه دوم برای حداکثر شدن یک تابع مقید که دارای یک قید است آن است که دترمینان های هشین مرزی دترمینان اول منفی و بقیه از مثبت به منفی تغییر علامت پیدا کند. یعنی:

$$|H_1|<0\,,|H_2|>0\,,|H_3|<0,\dots,\dots.$$

---

۳۲۴. **گزینه ۴ صحیح است.**

$$z(\lambda x,\lambda y)=\frac{(\lambda x)^4+(\lambda y)^4}{(\lambda x)^2(\lambda y)^2}=\frac{\lambda^4x^4+\lambda^4y^4}{(\lambda^2x^2)(\lambda^2y^2)}=\frac{\lambda^4(x^4+y^4)}{\lambda^4(x^2y^2)}==\lambda^0\frac{\overbrace{x^4+y^4}^{z}}{x^2y^2}=\lambda^0z$$

پس تابع همگنی از درجه صفر $n=0$ می باشد.

۳۲۵. گزینه ۲ صحیح است.

$$z = ۳x^۲ + ۴y^۲$$

$$\begin{cases} z_x = ۶x \to z_{xx} = ۶ \\ z_y = ۸y \to z_{yy} = ۸ \\ z_{xy} = zyx = ۰ \end{cases}$$

حال دترمینان هشین را بدست می آوریم:

$$|H_۲| = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۶ & ۰ \\ ۰ & ۸ \end{vmatrix} = (۶)(۸) - (۰)(۰) = ۴۸ - ۰ = ۴۸$$

با توجه به اینکه $|H_۲| = ۴۸ > ۰ , |H_۱| = Z_{xx} = ۶ > ۰$ می باشد بنابراین تابع در مبدأ مختصات دارای مینیمم است یعنی نسبت به مبدأ محدب می باشد.

---

۳۲۶. گزینه ۴ صحیح است.

$$Q(\lambda K, \lambda L) = A[\alpha(\lambda K)^{-\rho} + \beta(\lambda L)^{-\rho}]^{-\frac{r}{p}}$$

$$A[\alpha\lambda^{-\rho}k^{-\rho} + \beta\lambda^{-\rho}L^{-\rho}]^{-\frac{r}{p}} = A[\lambda^{-\rho}(\alpha K^{-\rho}\beta L^{-\rho}]^{-\frac{r}{p}}$$

$$A(\lambda^{-\rho})^{-\frac{r}{p}}[\alpha K^{-\rho} + \beta L^{-\rho}]^{-\frac{r}{p}} = (\lambda^{-\rho})^{-\frac{r}{p}} \underbrace{A[\alpha K^{-\rho} + \beta L^{-\rho}]^{-\frac{r}{p}}}_{Q} = \lambda^r Q$$

بنابراین تابع Q همگن از درجه r می باشد.

---

۳۲۷. گزینه ۲ صحیح است.

$$Q = Q_. \to K = \sqrt[\alpha]{\frac{Q_.}{AL^\alpha}} = \sqrt[\alpha]{\frac{Q_.}{A}} L^{-\frac{\beta}{\alpha}}$$

$$\left(\text{مشتق اول}\right) \frac{dK}{dL} = \sqrt[\alpha]{\frac{Q_.}{A}} \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) L^{-(\frac{\beta}{\alpha}+۱)}$$

$$\left(\text{مشتق اول}\right) \frac{dK}{dL} = -\sqrt[\alpha]{\frac{Q_.}{A}} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) L^{-\left(\frac{\beta}{\alpha}+۱\right)} \text{(همواره منفی است)}$$

$$\left(\text{مشتق دوم}\right)\frac{d^{۲}K}{dL^{۲}} = \sqrt[\alpha]{\frac{Q_{۰}}{A}}\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(-\frac{\beta}{\alpha}-۱\right)L^{-\left(\frac{\beta}{\alpha}+۲\right)}$$

$$\left(\text{مشتق دوم}\right)\frac{d^{۲}K}{dL^{۲}} = \sqrt[\alpha]{\frac{Q_{۰}}{A}}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}+۱\right)L^{-\left(\frac{\beta}{\alpha}+۲\right)}\left(\text{همواره مثبت است}\right)$$

بنابراین مشتق اول همواره منفی و مشتق دوم همواره مثبت است.

---

۳۲۸. گزینه ۲ صحیح است.

$$Z_{xx} = ۰ \quad , \quad Z_{yy} < ۰ \quad , \quad Z_{xy} = Z_{yx}$$

با استفاده از دترمینان هشین نوع نقطه اکسترمم را مشخص می کنیم:

$$|H| = \begin{vmatrix} Z_{xx} = ۰ & Z_{xy} \\ Z_{xy} & Z_{yy} < ۰ \end{vmatrix} = \underbrace{(Z_{xx})}_{۰}\underbrace{(Z_{yy})}_{\text{منفی}} - (Z_{xy})(Z_{xy}) = ۰ - (Z_{xy})^{۲} = -(Z_{xy})^{۲} < ۰$$

نقطه اکسترمم از نوع زینی می باشد.

---

۳۲۹. گزینه ۳ صحیح است.

$$f(x,y) = x\left(\sqrt{y} + ۲\sqrt{x}\right)$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda x\left(\sqrt{\lambda y} + ۲\sqrt{\lambda x}\right) = \lambda x\left(\sqrt{\lambda}\sqrt{y} + ۲\sqrt{\lambda}\sqrt{x}\right)$$

$$\xRightarrow{\text{از داخل پرانتز}\sqrt{\lambda}\text{ را فاکتور می گیریم}} \lambda\sqrt{\lambda}\,\underbrace{x\left(\sqrt{y} + ۲\sqrt{x}\right)}_{f(x,y)} = \lambda.\lambda^{\frac{۱}{۲}}f(x,y) = \lambda^{\frac{۳}{۲}}f(x,y)$$

تابع f همگن از درجه $n = \frac{۳}{۲}$ می باشد، بنابراین حاصل $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$ برابر $\frac{۳}{۲}f \leftarrow$