ریاضیات DLM

آموزش سه‌بعدی مفاهیم

انتگرال

طراح، مؤلف و گردآورنده:

امین بنیاد گذار

ویراستار علمی:

حسین خدامی

عنوان **صفحه**

آموزش کلاسیک انتگرال

مفاهیم اولیه ۷

تعریف دیفرانسیل تابع ۸

تعریف انتگرال ۹

انتگرال نامعین ۱۰

مهمترین قوانین انتگرال گیری ۱۰

قوانین انتگرال های نمایی ۱۴

قوانین انتگرال های توابع لگاریتمی ۱۶

قوانین انتگرال های مثلثاتی ۱۷

یک قانون مهم (به نام قانون ک) ۱۹

قوانین چند انتگرال خاص ۲۱

قوانین انتگرال‌های هایپربولیک ۲۲

قوانین انتگرال های معکوس هایپربولیک ۲۲

محاسبه انتگرالِ $\int sin^m x cos^n x dx$ ۲۳

روش کاهش توان (توان شکن) ۲۴

حالت دوم: محاسبه ی انتگرال های $\int tan^n x dx$ و $\int cot^n x dx$ ۲۵

آشنایی با چند روش در انتگرال گیری ۲۶

۱. روش اول: ساده سازی عبارت داخل انتگرال ۲۶

۲. روش دوم: تغییر متغیر در محاسبه ی انتگرال..... ۲۸

۳. روش سوم: روش جزء به جزء..... ۳۰

بررسی یک موضوع مهم و پرکاربرد..... ۳۱

انتگرال گیری به شیوه جدول (در روش جزء به جزء)..... ۳۲

۴. روش چهارم: انتگرال گیری از کسرهای گویا..... ۳۶

محاسبه انتگرال $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ ۴۲

محاسبه ی مقدار ثابت c انتگرال..... ۴۴

انتگرال معین ۴۵

انتگرال گیری از توابع شامل عبارات قدر مطلق ۴۶

انتگرال گیری از توابع شامل جزء صحیح ۴۸

انتگرال های رادیکالی..... ۵۰

انتگرال گیری از توابع چند ضابطه ای ۵۲

مشتق انتگرال نامعین..... ۵۴

مشتق انتگرال معین ۵۵

جمع بندی خواص انتگرال معین..... ۵۶

روش جانشینی برای محاسبه انتگرال..... ۵۸

قضیه مقدارمیانگین در انتگرال ها..... ۶۰

سطح محصور ۶۱

بررسی نموداری..... ۶۵

محاسبه حجم جسم دوّار (حجم حادث) ۶۹

طول قوس منحنی ۷۲

آشنایی با انواع انتگرال های ناسِرِه (نامتعارف) ۷۳

۱. ناسرگی نوع اول ۷۳

۲. ناسرگی نوع دوم ۷۵

چند قضیه در مورد همگرایی انتگرال های ناسره ۷۶

آزمون انتگرال p ۷۷

انتگرال سه گانه ۷۹

تبدیل انتگرال از دستگاه دکارتی به دستگاه قطبی ۸۰

آموزش تکنیکی انتگرال

انواع انتگرال ۸۴

۱. انتگرال نامعین (تابع ضد مشتق) ۸۴

راه تستی تعیین انتگرال نامعین ۸۴

انتگرال گیری به کمک دایره مثلثاتی ۸۷

بررسی فرمول مهم $\int x^n dx$ ۸۸

۲. انتگرال معین ۹۰

۱) انتگرال معین تابع جزء صحیح ۹۶

۲) انتگرال معین توابع فرد ۹۶

۳) انتگرال معین توابع زوج ۹۹

۴) بررسی انتگرال معین تابع $sinx$ (با استفاده از رسم شکل) ۱۰۱

۵) بررسی انتگرال معین تابع $cosx$ (با استفاده از رسم شکل)..... ۱۰۱

سوالات آزمون کارشناسی ارشد رشته های مدیریت ، حسابداری و اقتصاد

سوالات آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته مدیریت ۱۰۴

سوالات آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی رشته مدیریت ۱۱۲

سوالات آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته حسابداری ۱۲۵

سوالات آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی رشته حسابداری..... ۱۳۱

سوالات آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته اقتصاد ۱۳۳

سوالات آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی رشته اقتصاد..... ۱۴۰

حل سوالات آزمون کارشناسی ارشد رشته های مدیریت و حسابداری و اقتصاد

پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته مدیریت..... ۱۴۶

پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد رشته مدیریت ۱۸۶

پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته حسابداری ۲۲۵

پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد رشته حسابداری..... ۲۴۵

پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته اقتصاد ۲۵۶

پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد رشته اقتصاد..... ۲۸۶

مفاهیم اولیه:

این فصل رو با سوالی جالب از شما آغاز می کنم:

سوال: کدام تابع است که مشتق آن $۲x$ شده است؟ یعنی: $f'(x) = ۲x \rightarrow f(x) = ?$

پاسخ: مسلما $x^۲$ می باشد، زیرا: $(x^۲)' = ۲x$

بله به همین راحتی شما یک **تابع اولیه** بدست آوردید که به آن **انتگرال** می گویند.

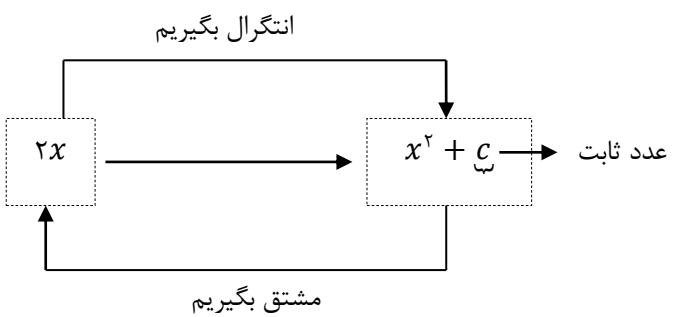
دقت کنید که در فصل مشتق، تابعی به شما داده می شد و مشتق آن را می خواستند، ولی در بسیاری از مسائل، با عکس این قضیه روبه رو هستیم، یعنی مشتق تابعی به شما داده می شود و تابع موردنظر را از شما می خواهند.

سوال: مشتق تابع، منحصر به فرد است یا تابع اولیه ی آن؟

پاسخ: به کمک فرمول‌های مشتق، با مشتق گیری از هر تابع به یک جواب مشخص و منحصر به فرد می‌رسیم، اما در حدس تابع اولیه، به یک جواب مشخص و منحصر به فرد نمی‌رسیم.

به عنوان مثال اگر مشتق یک تابع، $۲x$ باشد، برای تابع اولیه آن، هم می‌توان $x^۲$ را در نظر گرفت و هم $x^۲ + ۲$ و هم $x^۲ - ۶$ و ... زیرا در مشتق گیری از هرکدام از این‌ها، به $۲x$خواهیم رسید پس در حدس تابع اولیه، نمی توان مقدار **ثابت** این تابع را حدس زد.

پس بهتر است بنویسیم:



حال برای به کار بردن نماد انتگرال، یعنی $\int f dx$ نیاز به تعریف دیفرانسیل داریم:

تعریف دیفرانسیل تابع:

برای تابع $y = f(x)$ دیفرانسیل آن را با نماد dy به صورت: **حاصل ضرب مشتق تابع** (y') **در دیفرانسیل متغیر مستقل** (dx) تعریف می کنیم یعنی:

$$\boxed{y = f(x) \quad \rightarrow \quad dy = y'dx}$$

مثال ۱) دیفرانسیل توابع زیر را تعیین کنید:

۱) $y = x^{۴} + ۶x^{۲} \quad \rightarrow \quad dy = (۴x^{۳} + ۱۲x)dx$

۲) $y = Arctanx \quad \rightarrow \quad dy = \frac{۱}{۱ + x^{۲}} dx$

نکته:

اگر از مشتق، تابع اصلی را حدس بزنیم، می گوییم **تابع اولیه** گرفته ایم.

اگر از دیفرانسیل، تابع اصلی را حدس بزنیم، می گوییم **انتگرال** گرفته ایم.

مثال ۲)

$$\begin{cases} y' = ۲x \xrightarrow{\text{تابع اولیه گرفتن}} y = x^{۲} + c \\ dy = ۲xdx \xrightarrow{\text{انتگرال گرفتن}} y = \int ۲xdx = x^{۲} + c \end{cases}$$

توجه: به کاربردن $\int$ (نماد انتگرال) کار را بسیار ساده می کند. زیرا در یک طرف تساوی، دیفرانسیل (مشتق) قرار دارد و در طرف دیگر تساوی، تابع اولیه‌ی آن وجود دارد.

مانند:

$$\int \underbrace{۲xdx}_{\text{دیفرانسیل}} = \underbrace{x^{۲} + c}_{\text{تابع اولیه}}$$

ولی در نگارش $y' = ۲x \rightarrow y = x^{۲} + c$ چنین خبری نیست.

سوال: فرق مشتق و دیفرانسیل چیست؟

جواب: دیفرانسیل، واحد طول است، ولی مشتق یک نسبت است $(\frac{\Delta y}{\Delta x})$ پس واحد ندارد.

تعریف انتگرال:

هرگاه دیفرانسیلِ تابع معلوم باشد، عمل به دست آوردن معادله‌ی اولیه را **انتگرال** می نامیم.

با نماد:

$$f(x)dx = d(F(x)+c) \Leftrightarrow \int \underbrace{f(x)dx}_{\text{دیفرانسیل}} = F(x)+c$$

مثال ۳) از معادله ی دیفرانسیل های زیر، معادله‌ی اولیه ی هر یک را بیابید؟

الف) $dy = ۲xdx$ ب) $dy = \frac{dx}{۱+x^۲}$

حل)

الف) $dy = ۲xdx \;\rightarrow\; y = \int ۲xdx = x^۲ + c$

ب) $dy = \dfrac{dx}{۱+x^۲} \;\rightarrow\; y = \int \dfrac{dx}{۱+x^۲} = Arctanx + c$

☺ اگر f در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد، در این فاصله، انتگرال پذیر است، ولی بدانید برای این که f انتگرال پذیر باشد، لزومی ندارد که حتماً پیوسته باشد.

☺ اگر f در بازه $[a,b]$ به جزء در تعدادی محدود از نقاط این فاصله، پیوسته باشد و در نقاط ناپیوستگی، حد چپ و راست محدود داشته باشد، انتگرال پذیر است.

📖**قضیه**: اگر k یک عدد حقیقی ثابت باشد، آنگاه می توان گفت:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \xrightarrow{\text{مثال}} \int ۳x^۲dx = ۳\int x^۲dx = x^۳ + c$$

یعنی یک عامل **ثابت** (مثلا عدد)، همیشه می تواند از علامت انتگرال عبور نماید (مثلا پشت انتگرال قرار گیرد).

آشنایی با چند روش در انتگرال گیری:

همانطور که دیدید انتگرال گیری از مشتق گیری سخت تر است. درمحاسبه مشتقِ توابع، مشخص است که باید از کدام دستور استفاده کنیم، ولی در محاسبه انتگرال، با پیچیدگی‌های خاصی روربرو هستیم. حال در این قسمت می‌خواهیم شما را با چند روش کاربردی در حل مسائل انتگرال آشنا سازیم.

I) روش اول: ساده سازی عبارت داخل انتگرال:

ابتدا سعی کنید تا حد امکان عبارت تحت انتگرال را ساده سازید که کمک زیادی در حل انتگرال به شما خواهد کرد.

به مثال های زیر توجه فرمایید:

$$۱)\ \int x(۱-۵\sqrt{x})dx \xrightarrow{\text{ساده سازی}} \int (x-۵x\sqrt{x})dx = \int (x-۵x.x^{\frac{۱}{۲}})dx$$

$$= \int x-۵x^{\frac{۳}{۲}}dx = \frac{x^{۱+۱}}{۱+۱} - ۵(\frac{x^{\frac{۳}{۲}+۱}}{\frac{۳}{۲}+۱}) + c = \frac{x^{۲}}{۲} - ۵(\frac{x^{\frac{۵}{۲}}}{\frac{۵}{۲}}) + c$$

$$= \frac{x^{۲}}{۲} - \cancel{۵} \times \frac{۲}{\cancel{۵}} x^{\frac{۵}{۲}} + c = \frac{۱}{۲}x^{۲} - ۲x^{\frac{۵}{۲}} + c$$

$$۲)\ \frac{x\sqrt{x}+۲x}{\sqrt{x}+۲}dx \xrightarrow{\text{ساده سازی}} \int \frac{x\cancel{(\sqrt{x}+۲)}}{\cancel{\sqrt{x}+۲}}dx = \int xdx = \frac{x^{۱+۱}}{۱+۱} + c = \frac{x^{۲}}{۲} + c$$

$$۳)\ \int \underbrace{(sinx+cosx)^{۲}}_{\text{اتحاد اول}} dx \xrightarrow{\text{ساده سازی}} \int (sin^{۲}x + ۲sinxcosx + cos^{۲}x)\, dx$$

$$\xlongequal{sin^{۲}x + cos^{۲}x = ۱} \int (۱ + ۲sinxcox)dx$$

$$\xlongequal{sin۲x = ۲sinxcosx} \int (۱ + sin۲x)dx = x - \frac{۱}{۲}cos۲x + c$$

۴) $\int (x\sqrt{x}-۱)^۲ dx \xrightarrow{\text{ساده سازی}} \int (x.x^{\frac{۱}{۲}}-۱)^۲\, dx = \int \underbrace{(x^{\frac{۳}{۲}}-۱)^۲}_{\text{اتحاد اول}} dx$

$$= \int (x^۳ - ۲x^{\frac{۳}{۲}} + ۱)dx = \frac{x^{۳+۱}}{۳+۱} - ۲(\frac{x^{\frac{۳}{۲}+۱}}{\frac{۳}{۲}+۱}) + x + c$$

$$= \frac{x^۴}{۴} - ۲ \times \frac{۲}{۵} x^{\frac{۵}{۲}} + x + c \;=\; \frac{x^۴}{۴} - \frac{۴}{۵} x^{\frac{۵}{۲}} + x + c$$

---

۵) $\int \frac{۱+cos^۳x}{۱-cosx+cos^۲x} dx \qquad \xrightarrow[a^۳+b^۳=(a+b)(a^۲-ab+b^۲)]{\text{ساده سازی}}$

$$\int \frac{(۱+cosx)\cancel{(۱-cosx+cos^۳x)}}{\cancel{۱-cosx+cos^۲x}} = \int ۱+cosxdx = x + sinx + c$$

تست ۳) با شرط $x \neq k\pi + \frac{\pi}{۴}$ حاصل $\int \frac{cos۲x}{cosx-sinx}$ کدام است؟ (سراسری رشته تجربی ۹۲)

۱) $sinx + cosx + c$ ۲) $sinx - cosx + c$

۳) $-sinx + cosx + c$ ۴) $-sinx - cosx + c$

حل)

$$\int \frac{cos۲x}{cosx - sinx} \qquad \xrightarrow[\text{ساده سازی}]{cos۲x = cos^۲x - six^۲} \qquad \int \frac{cos^۲x - sin^۲x}{cosx - sinx}$$

$$\xrightarrow{(a^۲-b^۲)=(a-b)(a+b)} \int \frac{(cosx - sinx)(cosx + sinx)}{cosx - sinx} dx$$

$$= \int (cosx + sinx)dx = sinx - cosx + c$$

گزینه ۲ صحیح است.

II) روش دوم: تغییر متغیر در محاسبه ی انتگرال:

گام۱) سخت‌ترین عبارت را بدون توانش، u می گیریم که به آن **عامل اصلی** می گوییم.

گام۲) از طرفین عامل اصلی، دیفرانسیل می گیریم که به آن **عامل دیفرانسیل** du: می گوییم.

گام۳) بعد از جای‌گذاریِ عامل اصلی (u) و عامل دیفرانسیل (du)، اگر عباراتی مانند x یا $x^{۲}$ یا ... باقی مانده باشد، آن را برحسب u محاسبه می‌کنیم که به آن **عامل اضافی** می گوییم.

سوال: حاصل انتگرال های زیر را محاسبه کنید:

$$۱)\ \int x\underbrace{(x-۱)}_{\text{سخت‌ترین}}{}^{۵۰}dx \xrightarrow{\text{روش تغییر متغیر}} \text{عامل اصلی}: x-۱=u \rightarrow \begin{cases} \text{عامل دیفرانسیل}: dx=du \\ \text{عامل اضافی}: x=u+۱ \end{cases}$$

$$\int x(x-۱)^{۵۰}dx=\int (u+۱)u^{۵۰}du=\int (u^{۵۱}+u^{۵۰})du=\frac{u^{۵۱+۱}}{۵۱+۱}+\frac{u^{۵۰+۱}}{۵۰+۱}+c$$

$$\underline{\text{تغییر متغیر به حالت اولیه}: u=x-۱} \quad \frac{(x-۱)^{۵۲}}{۵۲}+\frac{(x-۱)^{۵۱}}{۵۱}+c$$

⚠️ **توجه** : در حل سوال ۱ انتگرال، ضربی است و از نوع $u' \times u^n$ هم نمی باشد پس تنها راه باقی مانده آن است که ضرب را به جمع تبدیل کنیم که این روند به دو صورت انجام می گیرد یا این که $(x-۱)$ را به توان ۵۰ برسانیم و یا اینکه جای توان های x و $x-۱$ عوض شود و البته با متغیرهای جدید، تا به جمع تبدیل شود، به این روند **تغییر متغیر** می گوییم.

$$۲)\ \int \frac{x^{۳}}{\sqrt{۱+x^{۲}}}\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{روش تغییر متغیر}} ۱+x^{۲}=u \rightarrow \begin{cases} ۲xdx=du \\ x^{۲}=u-۱ \end{cases}$$

$$\int \frac{x^{۳}dx}{\sqrt{۱+x^{۲}}}=\frac{۱}{۲}\int \frac{x^{۲}۲xdx}{\sqrt{۱+x^{۲}}}=\frac{۱}{۲}\int \frac{(u-۱)du}{\sqrt{u}}=\frac{۱}{۲}\int \sqrt{u}-\frac{۱}{\sqrt{u}}du$$

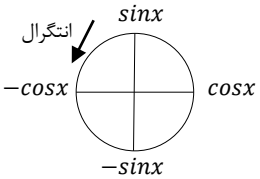
$$=\frac{۱}{۲}\left[\left(\frac{u^{\frac{۱}{۲}+۱}}{\frac{۱}{۲}+۱}-\frac{u^{-\frac{۱}{۲}+۱}}{-\frac{۱}{۲}+۱}\right)\right]+c=\frac{۱}{۲}\left[\left(\frac{u^{\frac{۳}{۲}}}{\frac{۳}{۲}}-\frac{u^{\frac{۱}{۲}}}{\frac{۱}{۲}}\right)\right]+c$$

کتابچه تکنیکی

انتگـــرال

انتگرال گیری به کمک دایره مثلثاتی:

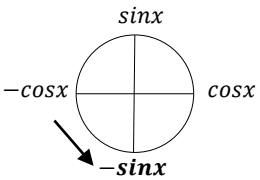
اگر در خلاف جهت عقربه های ساعت (روی دایره مثلثاتی) حرکت کنیم، به ما انتگرال می‌دهد.



تست ۴) حاصل $\int -cosxdx$ کدام است؟

۱) $sinx + c$ ۲) $-cosx + c$ ۳) $-sinx + c$ ۴) $cosx + c$

حل) از دایره مثلثاتی جهت انتگرال گرفتن استفاده می‌کنیم:



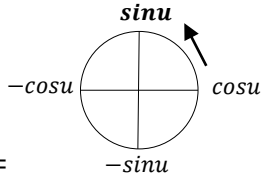
$$\int -cosxdx = -sinx + c$$

توجه : برای اطمینان خاطر از درستی جواب، می توان از آنان مشتق گرفت، یعنی:

انتگرال صورت سوال $= -cosx = (-sinx + c)'$

گزینه ۳ صحیح است.

سوال مهم: اگر در عبارت مثلثاتی، x دارای ضریب باشد، چه کاری باید انجام دهیم، مثلا اگر داشته باشیم:

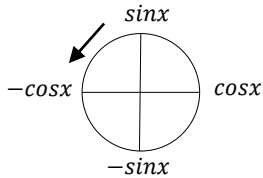


$$\int cos\underbrace{۲}_{\text{ضریب}}xdx = \frac{۱}{۲}(sin۲x) + c$$

❄اگر از طرف راست تساوی مشتق بگیریم یعنی: $(sin۲x)' = ۲cos۲x$، عدد ۲ زیادی است، پس باید عبارت $sin۲x$ را بر عدد ۲ تقسیم کنیم تا بشود: $\frac{۱}{۲}(sin۲x) \xleftarrow{\text{انتگرال}} \frac{۱}{۲}sin۲x + c$

$$(\frac{۱}{۲}(sin۲x))' = (۲cos۲x)\frac{۱}{۲} = cos۲x$$

مثال)



$$\int sin۳xdx = \frac{۱}{۳}(-cos۳x) + c = \frac{-۱}{۳}cos۳x + c$$

تذکرجالب: دو تابع مهم که ایجاد منفی می‌کنند شامل:

$$\begin{cases} (cosx)' = -sinx \\ (\frac{۱}{x})' = \frac{-۱}{x^۲} \end{cases}$$

بررسی فرمول مهم $\int x^n dx$:

در اکثر سوالات انتگرال، با این فرمول مواجه می شوید که باید فرمول انتگرال آن را یاد بگیرید که به صورت $\int x^n dx = \frac{x^{n+۱}}{n+۱} + c$ می باشد .

(مثال $\int x^۲ dx = \left(\frac{x^{۲+۱}}{۲+۱}\right) + c = \frac{x^۳}{۳} + c$

(مثال $\int ۳x^۴ dx = ۳\left(\frac{x^{۴+۱}}{۴+۱}\right) + c = \frac{۳x^۵}{۵} + c$

تست ۵) حاصل $\int \frac{۳-۳x}{۱-\sqrt{x}} dx = x.f(x) + c$ مقدار $f(x)$ کدام است؟

۱) $۳ + ۲\sqrt{x}$ ۲) $۳ + \sqrt{x}$ ۳) $۳x - \sqrt{x}$ ۴) $۲x - ۳\sqrt{x}$

راه اول) ابتدا انتگرال صورت سوال را تا حدامکان ساده می کنیم:

$$\int \frac{۳-۳x}{۱-\sqrt{x}} dx = \int \frac{۳(۱-x)}{۱-\sqrt{x}} dx \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} \int \frac{۳\cancel{(۱-\sqrt{x})}(۱+\sqrt{x})}{\cancel{۱-\sqrt{x}}} dx$$

$$= \int ۳(۱+\sqrt{x})dx = ۳\int (۱+\sqrt{x})dx \xrightarrow{\text{تفکیک انتگرال}} ۳\int x^۰ dx + ۳\int x^{\frac{۱}{۲}} dx$$

$$\xrightarrow{\int x^n dx = \frac{x^{n+۱}}{n+۱} + c} ۳(\frac{x^{۰+۱}}{۰+۱}) + ۳(\frac{x^{\frac{۱}{۲}+۱}}{\frac{۱}{۲}+۱}) + c = ۳x + ۳\frac{x^{\frac{۳}{۲}}}{\frac{۳}{۲}} + c$$

$$= ۳x + ۳\left(\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}\right) + c = ۳x + ۲x^{\frac{۳}{۲}} + c \xlongequal{\text{فاکتورگیری از } x} x(۳ + ۲x^{\frac{۱}{۲}}) + c$$

$$= x(\underbrace{۳ + ۲\sqrt{x}}_{f(x)}) + c$$

راه حل دوم) ابتدا تابع تحت انتگرال را تا حد امکان ساده می کنیم، یعنی:

$$\int \frac{۳ - ۳x}{۱ - \sqrt{x}}dx = \int \frac{۳(۱ - x)}{۱ - \sqrt{x}}dx = \int \frac{۳\cancel{(۱ - \sqrt{x})}(۱ + \sqrt{x})dx}{\cancel{۱ - \sqrt{x}}} = \int ۳\left(۱ + \sqrt{x}\right)dx$$

حال می توان از گزینه ها مشتق گرفت. گزینه ای صحیح خواهد بود که پس از مشتق گیری با عبارت $۳(۱ + \sqrt{x})$ برابر شود:

بررسی گزینه ها:

$$\text{گزینه ۱)}\ x.f(x) \rightarrow x\left(۳ + ۲\sqrt{x}\right) = ۳x + ۲x\sqrt{x} = ۳x + ۲x^{\frac{۳}{۲}}$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق گیری}} \left(۳x + ۲x^{\frac{۳}{۲}}\right)' = ۳ + ۲\left(\frac{۳}{۲}x^{\frac{۱}{۲}}\right) = ۳ + ۳x^{\frac{۱}{۲}} = ۳ + ۳\sqrt{x} = ۳(۱ + \sqrt{x})$$

مشاهده می کنید که مشتق گزینه ۱ با تابع تحت انتگرال صورت سوال برابر شد .

گزینه ۱ صحیح است.

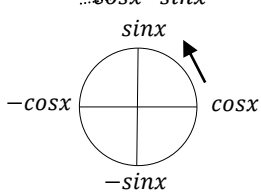
تست ۶) با شرط $x \neq k\pi + \frac{\pi}{۴}$ حاصل $\int \frac{cos۲x}{cosx - sinx}dx$ کدام است؟

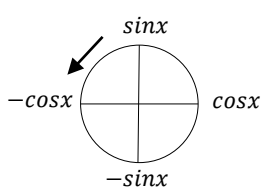
۱) $sinx + cosx + c$ ۲) $sinx - cosx + c$

۳) $-sinx + cosx + c$ ۴) $-sinx - cosx + c$

حل) اول باید انتگرال سوال $\int \frac{cos۲x}{cosx - sinx}dx = \int \frac{cos^۲x - sin^۲x}{cosx - sinx}dx$ را تا حد امکان ساده کنید.

$$= \int \frac{\cancel{(cosx - sinx)}(cosx + sinx)}{\cancel{cosx - sinx}}dx = \int (cosx + sinx)dx$$





$$\int (cosx + sinx)dx = sinx - cosx + c$$

گزینه ۲ صحیح است.

تست ۷) حاصل $\int(sin^{۲}x + cos^{۲}x)$ برابر است با:

۱) $x + c$ ۲) $\frac{sin^{۳}x}{۳} + \frac{cos^{۳}x}{۳}$

۳) $۱ + tan^{۲}x$ ۴) $cot^{۲}x + tan^{۲}x + ۱$

حل) $\int(sin^{۲}x + cos^{۲}x)dx = \int ۱dx = x + c$

گزینه ۱ صحیح است.

نکته:

$$\begin{cases} (lnu)' = \frac{u'}{u} \\ \int \frac{u'}{u}du = ln|u| + c \overset{\text{یعنی}}{\Rightarrow} \int \frac{\text{مشتق تابع مخرج}}{\text{تابع}} d\left(\text{متغیر}\right) = ln\left|\text{تابع}\right| + c \end{cases}$$

مثال) $\int cotgxdx = \int \frac{\overbrace{cosx}^{\text{مشتق مخرج}}}{sinx} = ln|sinx| + c$

مثال) $\int \frac{\overbrace{۱ + tg^{۲}x}^{\text{مشتق مخرج}}}{tgx}dx = ln|tgx| + c$

مثال) $\int tgxdx = -\int \frac{\overbrace{sinx}^{\text{مشتق مخرج(منفی کم دارد)}}}{cosx}dx = -ln|cosx| + c$

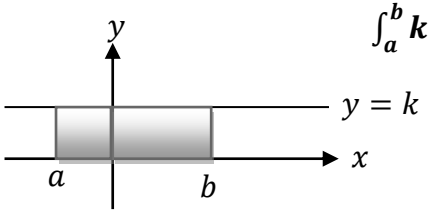
انتگرال معین:

اگر بخواهم به صورتی ساده بیان کنم، محاسبه سطح زیر منحنی در بازه ای تعیین شده از a تا b بر روی محور x ها را انتگرال **معین** گویند.

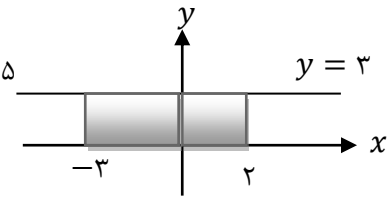
محاسبه انتگرال معین معمولا با استفاده از ۳ روش زیر امکان پذیر است.

۱) مساحت **مستطیل** ۲) مساحت **مثلث** ۳) مساحت **ذوزنقه**

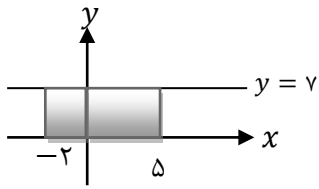
I) مساحت مستطیل: $\int_a^b k\,dx = \underbrace{k}_{\text{عرض}}\ (\underbrace{b-a}_{\text{طول مستطیل}})$



مثال) $\int_{-۳}^{۲} ۳dx = \underbrace{۳}_{\text{عرض}}^{k}\left(\underbrace{۲^{b} - (-۳)^{a}}_{\text{طول مستطیل}}\right) = ۳(۵) = ۱۵$



مثال) $\int_{-۲}^{۵} ۷dx = \underbrace{۷}_{k}\left(\underbrace{۵}_{b} - \left(\underbrace{-۲}_{a}\right)\right) = ۷(۷) = ۴۹$

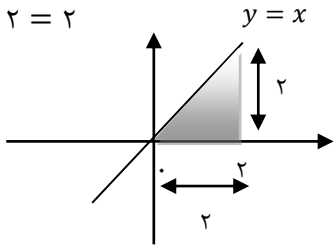


II) مساحت مثلث (ارتفاع ×قاعده×$\frac{۱}{۲}$ = S):

مثال) $\int_{۰}^{۲} x\,dx$

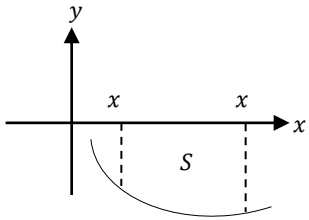
$$\begin{cases} x = ۰ \to y = ۰ \\ x = ۲ \to y = ۲ \end{cases}$$

$\left(\text{مساحت مثلث}\right) S = \frac{۱}{۲} \times \text{قاعده} \times \text{ارتفاع} = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲ = ۲$

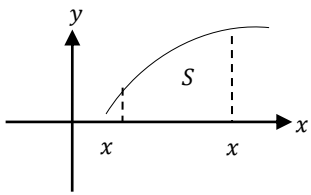


تذکر: اگر بخواهیم مساحت سطح زیرمنحنی در **<u>بالای</u>** محور x ها را حساب کنیم: $+S$ و اگر بخواهیم مساحت سطح زیر منحنی در **<u>پایین</u>** محور x ها را محاسبه کنیم: $-S$ می باشد،

یعنی :

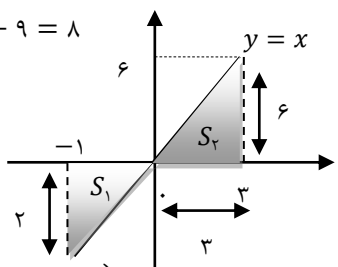


$$\int_a^b f(x)dx = -s$$

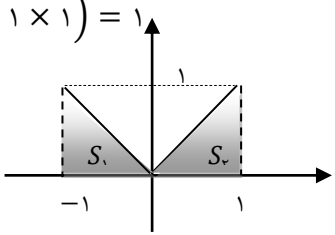


$$\int_a^b f(x)dx = S$$

مثال) $\int_{-۱}^{۳} ۲x dx = -S_۱ + S_۲ = -\frac{۲\times۱}{۲} + \frac{۳\times۶}{۲} = -۱ + ۹ = ۸$



مثال) $\int_{-۱}^{۱} |x|\, dx = S_۱ + S_۲ = \left(\frac{۱}{۲}\times ۱ \times ۱\right) + \left(\frac{۱}{۲}\times ۱ \times ۱\right) = ۱$



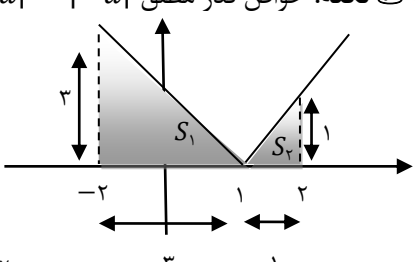
تست ۸) حاصل $\int_{-۲}^{۲} |۱ - x| dx$ برابر است با؟ (مدیریت سراسری ۸۰) (مدیریت دولتی آزاد ۸۰)

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۵

حل) **نکته:** خواص قدر مطلق $|u| = |-u|$ بنابراین: $|۱ - x| = |x - ۱|$

$$\int_{-۲}^{۲} |x - ۱| dx$$

$$x - ۱ = ۰ \rightarrow x = ۱$$

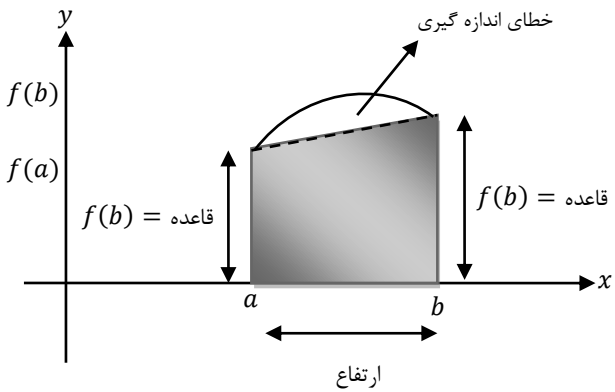


$$\begin{cases} y = |x-۱| \xrightarrow{x=-۲ \text{ : کران پایین انتگرال}} y = |-۲-۱| = ۳ \\ y = |x-۱| \xrightarrow{x=۲ \text{ : کران بالای انتگرال}} y = |۲-۱| = ۱ \end{cases}$$

$$S_۱ + S_۲ = \left(\frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۳\right) + \left(\frac{۱}{۲} \times ۱ \times ۱\right) = \frac{۹}{۲} + \frac{۱}{۲} = \frac{۱۰}{۲} = ۵$$

گزینه ۴ صحیح است.

III) مساحت ذوزنقه:



با توجه به این که محاسبه سطح منحنی بر روی محور x ها در بازه a تا b معرّف انتگرال تابع می‌باشد، برای مسائل دشواری که نمی‌توان شکل آنها را رسم کرد، می توان در حالت کلی گفت که مساحت آن ها به صورت مساحت ذوزنقه به همراه خطای اندازه گیری که در شکل بالا نشان داده شده است، می باشد. حال با توجه به فرمول مساحت ذوزنقه داریم :

$$\boxed{\left[\underbrace{f(a)+f(b)}_{\text{مجموع دو قاعده}}\right] \times \frac{\overbrace{b-a}^{\text{ارتفاع}}}{۲}}$$

تذکر: برای کاهش خطای اندازه گیری، کافیست فاصله بازه داده شده را شکسته و سپس سوال را حل کنیم، یعنی:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx}$$

🔔 **نکته**: در محاسبه به روش تستی، باید در انجام محاسبات عددی، تا حدی قوی باشید.

بعنوان مثال باید حاصل عباراتی مانند عبارات زیر را حفظ باشید:

$$\begin{cases} \sqrt{۵} \simeq ۲/۳ \\ \sqrt{۴} = ۲ \\ \sqrt{۳} \simeq ۱/۷ \\ \sqrt{۲} \cong ۱/۴ \end{cases} \quad -۰/۳ \quad -۰/۳ \quad -۰/۳$$

$$\begin{cases} \sqrt{۹} = ۳ \\ \sqrt{۸} \simeq ۲/۸ \\ \sqrt{۷} \cong ۲/۶ \\ \sqrt{۶} \cong ۲/۴ \end{cases} \quad -۰/۲ \quad -۰/۲ \quad -۰/۲$$

$$\begin{cases} ln۱ = ۰ \\ ln۱/۵ = ۰/۴ \\ ln۲ = ۰/۷ \\ lne = ln۳ = ۱ \end{cases} \quad +۰/۳ \quad +۰/۳$$

$$\begin{cases} log۱ = ۰ \\ log۱/۵ = ۰/۱۵ \\ log۲ = ۰/۳ \\ log۳ = ۰/۴۵ \\ log۴ = ۰/۶ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ln۴ = ۱/۴ \\ ln۵ = ۱/۴ + ۰/۲ \\ ln۶ = ۱/۶ + ۰/۲ \\ ln۸ = ۱/۸ + ۰/۲ \\ ln۱۰ = ۲/۳ \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^{۱} \simeq ۲/۷ \\ e^{۲} \simeq ۷/۲ \end{cases}$$

تست ۹) مساحت محدود به منحنی $y = xlnx$ و محور x ها در بازه $[۱, e]$ کدام است؟

(مدیریت و حسابداری سراسری ۹۰)

۱) $\frac{۱}{۴}(e^{۲} + ۱)$ ۲) $\frac{۱}{۲}(e^{۲} - ۱)$ ۳) $\frac{۱}{۲}e^{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}(e^{۲} - ۲)$

حل تکنیکی) محاسبه مساحت با استفاده از فرمول مساحت ذوزنقه، یعنی: $[f(a) + f(b)] \times \frac{b-a}{۲}$

جهت کاهش خطای اندازه گیری بازه را می‌شکنیم:

$$\int_{۱}^{e} xlnxdx = \int_{۱}^{۲} xlnxdx + \int_{۲}^{e=۲/۷} xlnxdx$$

$$\left([f(۱) + f(۲)] \times \frac{۲ - ۱}{۲}\right) + ([f(۲) + f(e)] \times \frac{e - ۲}{۲}$$

$$= \left([۱ \times ln۱ + ۲ln۲] \times \frac{۱}{۲}\right) + ([۲ln۲ + elne] \times \frac{۲/۷ - ۲}{۲}$$

$$\frac{ln۱ = ۰}{ln۲ = ۰/۷} \quad [۱ \times ۰ + ۲(۰/۷)] \times \frac{۱}{۲}) + ([۲(۰/۷) + e(۱)] \times \frac{۰/۷}{۲}$$

$$\xrightarrow{lne=۱} [(۰ + ۱/۴) \times \frac{۱}{۲}] + [۱/۴ + ۲/۷] \times ۰/۳۵ = [\frac{۱/۴}{۲}] + [۴/۱ \times \frac{۳۵}{۱۰۰}]$$

$$= ۰/۷ + \frac{۴۱}{۱۰} \times \frac{۳۵}{۱۰۰} = ۰/۷ + \frac{۱۴۳۵}{۱۰۰۰} \cong ۰/۷ + ۱/۴۵ = ۲/۱۵$$

بررسی گزینه ها:

✓ ۱) $\frac{۱}{۴}(e^۲ + ۱) = \frac{۱}{۴}(۷/۲ + ۱) \cong ۲/۱$ (نزدیک ترین عدد به ۲/۱۵ می باشد)✓

✗ ۲) $\frac{۱}{۲}(e^۲ - ۱) = \frac{۱}{۲}(۷/۲ - ۱) = ۳/۱$

✗ ۳) $\frac{۱}{۲}e^۲ = \frac{۱}{۲}(۷/۲) = ۳/۶$

✗ ۴) $\frac{۱}{۲}(e^۲ - ۲) = \frac{۱}{۲}(۷/۲ - ۲) = ۲/۶$

گزینه ۱ صحیح است.

تست ۱۰) اگر $f(x) = \int \frac{۲x^۲}{x+۱} dx$ باشد، مقدار $f(۱) - f(۰)$ کدام است؟

(اقتصاد سراسری ۹۲)

۱) $۲ln۲ - ۱$ ۲) $۲ln۳ + ۲$ ۳) $۲ln۳ - ۲$ ۴) $۲ln۲ + ۱$

حل تکنیکی) می توان از فرمول $[f(a) + f(b)] \times \frac{b-a}{۲}$ سوال را حل کرد، یعنی:

$$\int_۰^۱ \frac{۲x^۲}{x+۱} dx = \int_۰^{\frac{۱}{۲}} \frac{۲x^۲}{x+۱} dx + \int_{\frac{۱}{۲}}^۱ \frac{۲x^۲}{x+۱} dx$$

$$[f(۰) + f(\frac{۱}{۲})] \times \frac{\frac{۱}{۲} - ۰}{۲}) + ([f(\frac{۱}{۲}) + f(۱)] \times \frac{۱ - \frac{۱}{۲}}{۲} = [۰ + \frac{۲(\frac{۱}{۲})^۲}{\frac{۱}{۲} + ۱}] \times \frac{۱}{۴}) + [\frac{۲(\frac{۱}{۲})^۲}{\frac{۱}{۲} + ۱} + \frac{۲(۱)^۲}{۱ + ۱}] \times \frac{۱}{۴})$$

$$= \left(\left[\frac{۲\left(\frac{۱}{۴}\right)}{\frac{۳}{۲}}\right] \times \frac{۱}{۴}\right) + \left(\left[\frac{۲\left(\frac{۱}{۴}\right)}{\frac{۳}{۲}} + ۱\right] \times \frac{۱}{۴}\right) = \left(\left[\frac{\left(\frac{۱}{۲}\right)}{\frac{۳}{۲}}\right] \times \frac{۱}{۴}\right) + \left(\left[\frac{\left(\frac{۱}{۲}\right)}{\frac{۳}{۲}} + ۱\right] \times \frac{۱}{۴}\right)$$

$$= [(\frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۴})] + [(\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۱}) \times \frac{۱}{۴}]$$

$$= \frac{۱}{۱۲} + \left(\frac{۴}{۳} \times \frac{۱}{۴}\right) = \frac{۱}{۱۲} + \frac{۱}{۳} = \frac{۱+۴}{۱۲} = \frac{۵}{۱۲} \simeq \frac{۴}{۱۲} = ۰/۳ \cong ۰/۴$$

بررسی گزینه ها:

۱) $۲ln۲ - ۱ \cong ۲(۰/۷) - ۱ = ۰/۴$ ✓

۲) $۲ln۳ + ۲ \cong ۲(۱) + ۲ = ۴$ ✗

۳) $۲ln۳ - ۲ \cong ۲(۱) - ۲ = ۰$ ✗

۴) $۲ln۲ + ۱ \cong ۲(۰/۷) + ۱ = ۲/۴$ ✗

گزینه ۱ صحیح است.

انتگرال معین تابع جزء صحیح:

همیشه اول سعی کنید جزء صحیح را برداشته، سپس مسئله را حل کنید.

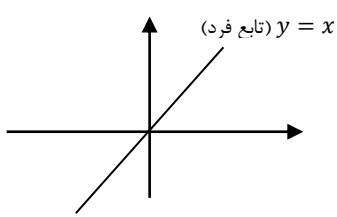
فرمولی مهم برای انتگرال توابع جزء صحیح:

$$\boxed{\int_a^b [x]dx = \frac{(b-a)(b+a-۱)}{۲} \qquad (a, b \in z)}$$

مثال) $\int_{-۱}^{۳} [x]\, dx = \frac{\big(۳-(-۱)\big)(۳+(-۱)-۱)}{۲} = \frac{(۴)(۱)}{۲} = ۲$

انتگرال معین توابع فرد:

تابع فرد : $\begin{cases} \forall\, x \in D_f \rightarrow \ -x \in D_f \text{(دامنه متقارن)} \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$

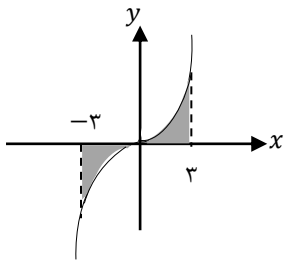


$$\boxed{\int_{-a}^{a} \underbrace{f(x)}_{\text{تابع فرد}} = ۰}$$

توضیح: می‌دونیم که انتگرال در یه بازه، یعنی همون مساحت زیر منحنی در اون بازه، خب حالا اگه گفتین چرا انتگرال تابع فرد، میشه صفر؟...

چون تابع فرد، حالت **قرینه** داره، و مساحت این دو قسمت قرینه با هم برابره، ولی چون موقع جمع کردن این دو مساحت، ما باید مساحت قسمتی که زیر منحنی x ها قرار داره رو **منفی** درنظربگیریم، بنابراین، جمع این دو مساحت، مساوی صفر میشه. (به شکل مثال زیر دقت کنید).

(مثال $\int_{-۳}^{۳} x^۳\,dx = \int_{-۳}^{۳} \left(\text{تابع فرد}\right) = ۰$



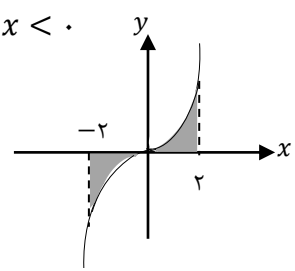
تست ۱۱) مقدار $\int_{-۲}^{۲} x|x|dx$ برابر است با: (حسابداری آزاد۸۳)

۱) $\frac{۸}{۳}$ ۲) ۰ ۳) $\frac{۱۲}{۵}$ ۴) $\frac{۱۴}{۵}$

حل)

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq ۰ \\ -x & x < ۰ \end{cases} \xrightarrow{\times x} \begin{cases} x.x & x \geq ۰ \\ -x.x & x < ۰ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^۲ & x \geq ۰ \\ -x^۲ & x < ۰ \end{cases}$$

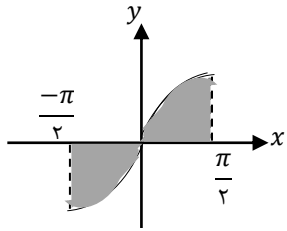
$x|x| = x^۳$ (تابع فرد)



$$\int_{-۲}^{۲} x|x|dx = \int_{-a}^{a} \text{تابع فرد} = ۰$$

گزینه ۲ صحیح است.

مثال) انتگرال معین توابع زیر را بدست آورید:



$$\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} \underbrace{sinx}_{\text{تابع فرد}}\, dx = ۰$$

$$\int_{-۲\pi}^{+۲\pi} \underbrace{\frac{sinx}{cos^{۲}x}}_{\text{تابع فرد}} = \int_{-a}^{a} \text{تابع فرد}\, dx = ۰$$

$$\boxed{\text{نکته :}\quad \int_{-a}^{+a}\left[\text{تابع فرد}\right] = -a}$$

$$\text{(مثال}\quad \int_{-۳}^{+۳} \underbrace{[x]}_{\text{تابع فرد}}\, dx = -۳$$

تست ۱۲۲) حاصل $\int_{-۲}^{+۲}(x+[x])dx$ چیست؟

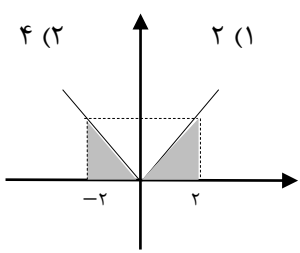
۱) ۲ ۲) ۲− ۳) ۰ ۴) ۱

$$\text{(حل}\quad \int_{-۲}^{۲} \underbrace{x}_{\text{تابع فرد}}\, dx + \int_{-۲}^{۲} \underbrace{[x]}_{\text{تابع فرد}}\, dx = ۰ + (-۲) = -۲$$

گزینه ۲ صحیح است.

تست ۱۳) حاصل $\int_{-۲}^{+۲}(۲x+|x|)dx$ چیست؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۰ ۴) ۳



$$\text{(حل}\quad \int_{-۲}^{۲} \underbrace{۲x}_{\text{تابع فرد}}\, dx + \int_{-۲}^{۲} \underbrace{|x|}_{\text{مساحت مثلث}}\, dx = ۰ + (۴) = -۲$$

$$\left(\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۲\right) + \left(\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۲\right) = ۴$$

گزینه ۲ صحیح است.

انتگرال معین توابع زوج:

تابع زوج : $\begin{cases} \forall x \in D_f \ \rightarrow \ -x \in D_f \ \text{(دامنه متقارن میباشد)} \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$

$$\boxed{\int_{-a}^{a} \underbrace{f(x)}_{\text{تابع زوج}}\, dx = \boxed{۲} \int_{\boxed{۰}}^{a} f(x)dx}$$

(مثال $\int_{-۱}^{۱} \overbrace{x^۲}^{\text{تابع زوج}}\ dx = \boxed{۲} \int_{\boxed{۰}}^{۱} x^۲ dx = ۲[\frac{x^۳}{۳}]_{۰}^{۱} = ۲\left[\frac{۱^۳}{۳} - \frac{۰^۳}{۳}\right] = ۲ \times \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}$

(مثال $\int_{-\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۴}} \underbrace{tan^۲}_{\text{تابع زوج}} x dx = \boxed{۲} \int_{\boxed{۰}}^{\frac{\pi}{۴}} tan^۲ x dx = ۲ \int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} \underbrace{tan^۲ x + ۱} - ۱ dx$

$= ۲(tanx - x)]_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} = ۲\left(۱ - \frac{\pi}{۴}\right) = ۲ - \frac{\pi}{۲}$

$$\boxed{y^۲ = \boxed{a}x \ \text{ و } \ x^۲ = \boxed{a}y \ \rightarrow \ S = \frac{۱}{۳}a^۲}$$

تست ۱۴) سطح بین دو منحنی $x^۲ = ۴y$ و $y^۲ = ۴x$ کدام است؟

۱) $\frac{۸}{۳}$ ۲) $\frac{۱۰}{۳}$ ۳) $\frac{۱۴}{۳}$ ۴) $\frac{۱۶}{۳}$

حل) با توجه به نکته گفته شده در بالا می توان گفت :

$$y^۲ = \boxed{۴}x \ \text{ و } \ x^۲ = \boxed{۴}y \ \rightarrow \ S = \frac{۱}{۳}a^۲ \xrightarrow{a=۴} S = \frac{۱}{۳}(۴)^۲ = \frac{۱۶}{۳}$$

گزینه ۴ صحیح است .

🔔 **نکته:** $I_n = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} sin^n xdx = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} cos^n xdx$

$$\boxed{I_n = \frac{n-۱}{n} \times I_{n-۲} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} I_۰ = \frac{\pi}{۲} \\ I_۱ = ۱ \end{cases}}$$

اثبات
$$\begin{cases} \xrightarrow{n=۰} \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} sin^۰ xdx = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} ۱dx = ۱\left(\frac{\pi}{۲} - ۰\right) = \frac{\pi}{۲} \\ \xrightarrow{n=۱} \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} sinxdx = -cosx]_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} = \left(-cos\frac{\pi}{۲}\right) - (-cos۰) = ۰ - (-۱) = ۱ \end{cases}$$

تست ۱۵) مقدار $I = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} sin^۴ xdx$ برابر است با:

(حسابداری سراسری ۸۳)(مدیریت بازرگانی ۸۱)

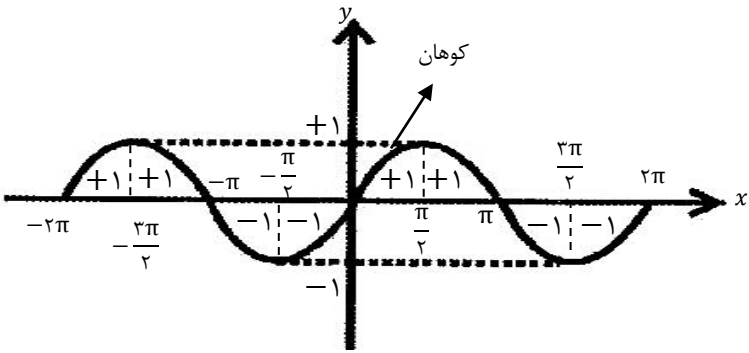
۱) $\frac{\pi}{۱۶}$ ۲) $\frac{۳\pi}{۱۶}$ ۳) $\frac{\pi}{۸}$ ۴) $\frac{۲\pi}{۳}$

حل) $\boxed{I_n = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} sin^n xdx = I_n = \frac{n-۱}{n} \times I_{n-۲}}$

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} sin^۴ xdx \rightarrow \begin{cases} I_۴ = \frac{۴-۱}{۴} \times I_۲ = \frac{۳}{۴} \times \frac{\pi}{۴} = \frac{۳\pi}{۱۶} \\ I_۲ = \frac{۲-۱}{۲} \times I_۰ \xrightarrow{I_۰ = \frac{\pi}{۲}} \frac{۱}{۲} \times \frac{\pi}{۲} = \frac{\pi}{۴} \end{cases}$$

بررسی انتگرال معین تابع $sinx$ (با استفاده از رسم شکل):

بررسی $y = sinx$ در بازه $[-۲\pi, ۲\pi]$:

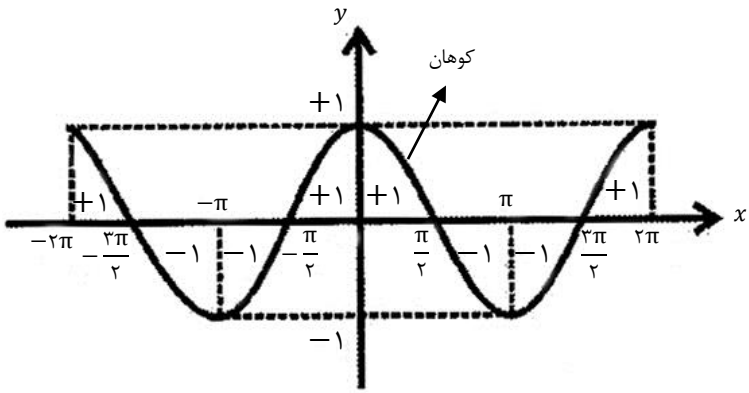


نتیجه: مساحت هر کوهان اگر **بالای** محور x باشد: $(+۱)$ است و اگر **زیر** محور x باشد (-۱) است.

مثال : $\int_{۰}^{\frac{۳\pi}{۲}} sinxdx = ۱ + ۱ - ۱ = ۱$

بررسی انتگرال معین تابع $cosx$ (با استفاده از رسم شکل):

بررسی $y = cosx$ در بازه $[-۲\pi, ۲\pi]$:



نتیجه: مساحت هرکوهان اگر **بالای** محور x ها باشد $(+۱)$ و اگر پایین محور x ها باشد (-۱) خواهد بود.

مثال: $\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{۲\pi} cosxdx = ۱ + ۱ - ۱ - ۱ + ۱ = ۱$

تست های کنکور کارشناسی ارشد

انتگرال

رشته های مدیریت و حسابداری و اقتصاد

سراسری و آزاد

۵۳) سطح محدود به منحنی $y = \frac{\sqrt{x}}{۱+x}$ و محور x ها و خط به معادله $x = ۱$ کدام است؟

(مدیریت و حسابداری سراسری۹۱)

۱) $\frac{\pi}{۲} - ۱$ ۲) $۱ - \frac{\pi}{۴}$ ۳) $۲ - \frac{\pi}{۲}$ ۴) $۲ - \frac{\pi}{۴}$

۵۴) حاصل انتگرال $\int_{۰}^{۱} ۲xln(x+۱)dx$ کدام است؟ (مدیریت و حسابداری سراسری۹۱)

۱) ۱ ۲) $-\frac{۱}{۲} + ln۲$ ۳) $۱ - ln۲$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

سوالات آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی رشته مدیریت

۵۵) $\int e^{\delta u} du$ برابر است با: (مدیریت آزاد۷۵)

۱) e^u ۲) $\frac{۱}{\delta} e^{\delta u}$ ۳) u ۴) du

۵۶) انتگرال $\int \frac{xdx}{x^۲+۱}$ عبارتست از: (مدیریت آزاد۷۶)

۱) $۲ln(x^۲+۱)$ ۲) $ln(x^۲+۱)$

۳) $\frac{۱}{۲} ln(x^۲+۱)$ ۴) $ln\frac{x}{x+۱}$

۵۷) انتگرال معین $\int_{۰}^{۴} \frac{xdx}{\sqrt{۱+۲x}}$ مساویست با: (مدیریت آزاد۷۶)

۱) $\frac{۳}{۱۰}$ ۲) $\frac{۱۰}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۵۸) $\int \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} dx$ برابر است با :(مدیریت صنعتی و دولتی آزاد ۷۷)(مدیریت صنعتی آزاد ۸۹)

۱) $lne^x + c$ ۲) $lne^{-x} + c$

۳) $ln(e^x + e^{-x}) + c$ ۴) $ln(e^x - e^{-x}) + c$

۳) $\frac{۱}{۲}e^{۲} = \frac{۱}{۲}۷/۲ = ۳/۶$ ۴) $\frac{۱}{۲}(e^{۲} - ۲) = \frac{۱}{۴}(۷/۲ - ۲) = ۱/۳$

گزینه اول نزدیکترین عدد به ۱/ ۲می باشد.

---

۵۳. **گزینه ۳ صحیح است.** حل: برخورد با محور x ها یعنی جایی که $y = ۰$ باشد بنابراین :

$$y = \frac{\sqrt{x}}{۱+x} \rightarrow ۰ = \frac{\sqrt{x}}{۱+x} \rightarrow \sqrt{x} = ۰ \rightarrow x = ۰$$

$$\int_{۰}^{۱} \frac{\sqrt{x}}{۱+x}dx \xlongequal[\text{تغییر متغیر}]{\text{استفاده از روش}} \{\sqrt{x} = u \rightarrow x = u^{۲} \rightarrow dx = ۲udu$$

$$= \int_{۰}^{۱} \frac{u}{۱+u^{۲}} ۲udu = ۲\int_{۰}^{۱} \frac{u^{۲}}{۱+u^{۲}}du = ۲\int_{۰}^{۱} \frac{u^{۲}+۱-۱}{۱+u^{۲}}du$$

$$= ۲\int_{۰}^{۱} \left(\frac{u^{۲}+۱}{u^{۲}+۱} - \frac{۱}{u^{۲}+۱}\right)du = ۲\int_{۰}^{۱} \left(۱ - \frac{۱}{u^{۲}+۱}\right)du = ۲(u - Arctanu)]_{۰}^{۱}$$

$$\xRightarrow{u=\sqrt{x}} ۲(\sqrt{x} - Arctan\sqrt{x})]_{۰}^{۱} = ۲[(\sqrt{۱} - Arctan\sqrt{۱}) - (\sqrt{۰} - Arctan\sqrt{۰})]$$

$$\xRightarrow{Arctan۱=\frac{\pi}{۴}} ۲\left[\left(۱ - \frac{\pi}{۴}\right) - (۰ - ۰)\right] = ۲\left(۱ - \frac{\pi}{۴}\right) = ۲ - \frac{\pi}{۲}$$

حل تکنیکی : محاسبه با فرمول $[f(a) + f(b)] \times \frac{b-a}{۲}$

$$\int_{۰}^{۱} \frac{\sqrt{x}}{۱+x}dx = \int_{۰}^{\frac{۱}{۲}} + \int_{\frac{۱}{۲}}^{۱}$$

$$([۰ + \frac{\sqrt{۰/۵}}{۱+۰/۵}] \times \frac{۱}{۴}) + ([\frac{\sqrt{۰/۵}}{۱+۰/۵} + \frac{۱}{۲}] \times \frac{۱}{۴}) \xRightarrow{\sqrt{۰/۵}=۰/۵+۰/۲} (\frac{۰/۷}{۱/۵} \times \frac{۱}{۴}) + [(\frac{۰/۷}{۱/۵} + \frac{۱}{۲}) \times \frac{۱}{۴}]$$

$$\cong (\frac{۰/۷}{۶}) + [(\frac{۰/۷}{۱/۴} + \frac{۱}{۲}) \times \frac{۱}{۴}] \cong \frac{۰/۷}{۶} + \frac{۱}{۴} = ۰/۱۱ + ۰/۲۵ = ۰/۳۶$$

بررسی همه گزینه ها :

۱) $\frac{\pi}{۲} - ۱ \rightarrow \frac{۳/۲}{۲} - ۱ \cong ۰/۶$ ✗

۲) $۱ - \frac{\pi}{۴} \rightarrow ۱ - \frac{۳/۲}{۴} = ۰/۲$ ✗

$$۳)\ ۲-\frac{\pi}{۲} \to ۲-\frac{۳/۲}{۲} = ۰/۴ \checkmark$$

$$۴)\ ۲-\frac{\pi}{۴} \to ۲-\frac{\frac{۳}{۲}}{۴} = ۱/۲ \times$$

---

۵۴. **گزینه ۴ صحیح است. راه اول** : با استفاده از روش تغییر جزء به جزء داریم:

$$\begin{cases} u = ln(x+۱) \ \to \ du = \frac{۱}{x+۱}dx \\ dv = ۲xdx \ \to \ v = x^۲ \end{cases}$$

$$\int_۰^۱ ۲xln(x+۱)dx = x^۲\, ln(x+۱) - \int_۰^۱ \frac{x^۲}{x+۱}dx$$

$$= x^۲\, ln(x+۱) - \int_۰^۱ \frac{x^۲\overbrace{-۱+۱}^{۰}}{x+۱}dx = x^۲\, ln(x+۱) - \int_۰^۱ \left(\frac{(x-۱)(x+۱)+۱}{x+۱}\right)dx$$

$$= x^۲\, ln(x+۱) - \int_۰^۱ \left(x-۱+\frac{۱}{x+۱}\right)dx = x^۲ \ln(x+۱) - (\frac{x^۲}{۲} - x + ln|x+۱)]_۰^۱$$

$$= \left(ln۲ - \frac{۱}{۲} + ۱ - ln۲\right) - \left(\underbrace{ln۱}_{۰} - ۰\right) = -\frac{۱}{۲} + ۱ - ۰ = \frac{۱}{۲}$$

راه دوم: حل انتگرال با استفاده از جدول :

$ln(x+۱)$ و مشتقات آن	$۲x$ و انتگرال های آن
$ln(x+۱)$	$۲x$
$\frac{۱}{x+۱}$	$x^۲$

$$\int_۰^۱ ۲xln(x+۱)dx = x^۲\, ln(x+۱)]_۰^۱ - \int_۰^۱ \frac{x^۲}{x+۱}dx$$

$$= x^۲\, ln(x+۱)]_۰^۱ - \int_۰^۱ \frac{x^۲\overbrace{-۱+۱}^{۰}}{x+۱}dx$$

$$= x^۲\, ln(x+۱)]_۰^۱ - \int_۰^۱ \frac{(x-۱)(x+۱)+۱}{x+۱}dx$$

$$= x^۲ l\, n(x+۱)]_۰^۱ - \int_۰^۱ \left(x-۱+\frac{۱}{x+۱}\right)dx$$

$$= x^{۲}\, ln(x+۱)]_{۰}^{۱} - [\frac{x^{۲}}{۲} - x + \ln(x+۱)]_{۰}^{۱}$$

$$= [ln۲ - (\frac{۱}{۲} - ۱ + ln۲] - [۰ - \left(۰ - ۰ + \underbrace{ln۱}_{۰}\right] = -\frac{۱}{۲} + ۱ = \frac{۱}{۲}$$

حل تکنیکی : استفاده از فرمول ذوزنقه $[f(a) + f(b)] \times \frac{b-a}{۲}$

$$\int_{۰}^{۱} ۲xln(x+۱)dx = \int_{۰}^{\frac{۱}{۲}} + \int_{\frac{۱}{۲}}^{۱}$$

$$([۰ + ۲(\frac{۱}{۲})ln(\frac{۱}{۲} + ۱)] \times \frac{\frac{۱}{۲} - ۰}{۲}) + (۲(\frac{۱}{۲})ln(\frac{۱}{۲} + ۱) + ۲(۱)ln(۱+۱) \times \frac{۱}{۴}$$

$$= [(ln۱/۵) \times \frac{۱}{۴})] + [(ln۱/۵) + ۲ln۲] \times \frac{۱}{۴}$$

$$\frac{ln۱/۵ = ۰/۴}{ln۲ = ۰/۷} \quad [(\frac{۴}{۱۰} \times \frac{۱}{۴})] + [\frac{۴}{۱۰} + ۲(\frac{۷}{۱۰})] \times \frac{۱}{۴})$$

$$= \left(\frac{۱}{۱۰}\right) + \left[\left(\frac{۴}{۱۰} + \frac{۱۴}{۱۰}\right)\right] \times \frac{۱}{۴}) = \frac{۱}{۱۰} + \left(\frac{۱۸}{۱۰} \times \frac{۱}{۴}\right) = \frac{۱}{۱۰} + \frac{۱۸}{۴۰} = \frac{۴+۱۸}{۴۰} = \frac{۲۲}{۴۰} \simeq ۰/۵۵ \cong \frac{۱}{۲}$$

پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد رشته مدیریت

۵۵. **گزینه ۲ صحیح است.** $\int e^{\delta u} du = \frac{۱}{\delta} e^{\delta u} + c \quad (\delta \neq ۰)$

---

۵۶. **گزینه ۳ صحیح است. حل کلاسیک :** از روش تغییر متغیر استفاده می کنیم:

$$\begin{cases} x^{۲} + ۱ = u \\ ۲xdx = du \end{cases} \rightarrow \quad xdx = \frac{du}{۲}$$

$$\int \frac{xdx}{x^{۲}+۱} = \int \frac{\frac{du}{۲}}{u} = \frac{۱}{۲}\int \frac{du}{u} = \frac{۱}{۲} ln|u| + c \xRightarrow{u=x^{۲}+۱} \frac{۱}{۲} ln|x^{۲}+۱| + c$$

اگر $c = ۰$ فرض شود حاصل انتگرال برابر است با $\frac{۱}{۲} ln|x^{۲}+۱|$

$$y\Big|_{(۱,۰)} \to \frac{a(۱)^۳}{۶} - ۵(۱)^۲ + k_۱(۱) + k_۲ = ۰ \to \frac{a}{۶} - ۵ + k_۱ + k_۲$$

$$y\Big|_{(۲,۰)} \to \frac{a(۲)^۳}{۶} - ۵(۲)^۲ + ۲k_۱ + k_۲ = ۰ \to \frac{۴a}{۳} - ۲۰ + ۲k_۱ + k_۲ = ۰$$

$$\to \frac{۷a}{۶} - ۱۵ + k_۱ = ۰$$

$$y'\Big|_{(۲,۰)} = ۰ \quad \to \quad \frac{(۲)^۲ a}{۲} - ۱۰(۲) + k_۱ = ۰ \quad \to \quad ۲a - ۲۰ + k_۱ = ۰$$

$$\begin{cases} \frac{۷a}{۶} - ۱۵ + k_۱ = ۰ & \leftarrow \text{معادله اول} \\ ۲a - ۲۰ + k_۱ = ۰ \to k_۱ = ۲۰ - ۲a & \leftarrow \text{معادله دوم} \end{cases}$$

(قرار دادن در معادله اول) $\to$

$$\to \frac{۷a}{۶} - ۱۵ + \left(۲۰ - \frac{۲a}{۱}\right) = ۰ \to = \frac{۷a - ۱۲a}{۶} + ۵ = ۰ \quad \to \quad -\frac{۵a}{۶} = -۵$$

$$-۵a = -۳۰ \quad \to \quad a = \frac{۳۰}{۵} \quad \to \quad \boxed{a = ۶}$$

---

۲۷۲ . **گزینه ۱ صحیح است. حل)** با استفاده از روش تغییر متغیر می توان گفت:

$$\begin{cases} lnx = u \quad \to \quad \frac{۱}{x}dx = du \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{lnx}} = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int \frac{du}{u^{\frac{۱}{۲}}} = \int u^{-\frac{۱}{۲}} du \xRightarrow{\int u^n du = \frac{u^{n+۱}}{n+۱} + c} \frac{u^{-\frac{۱}{۲}+۱}}{-\frac{۱}{۲}+۱} + c = \frac{u^{\frac{۱}{۲}}}{\frac{۱}{۲}} + c$$

$$= ۲u^{\frac{۱}{۲}} + c \xRightarrow{u = lnx} ۲lnx^{\frac{۱}{۲}} + c = ۲\sqrt{lnx} + c$$

حل تکنیکی : از گزینه ها مشتق می گیریم گزینه ای صحیح خواهد بود که پس از مشتق گیری حاصل آن با تابع تحت انتگرال(صورت سؤال) برابر شود.

(**یادآوری:** $y = lnx \to y' = \frac{۱}{x} \quad , \quad y = \sqrt{u} \to y' = \frac{u'}{۲\sqrt{u}}$)

گزینه۱: $y = ۲\sqrt{\underbrace{lnx}_{u}} + c \to y' = ۲\left(\frac{\frac{۱}{x}}{\frac{۲\sqrt{lnx}}{۱}}\right) + ۰$

$$\rightarrow y' = ۲\left(\frac{۱}{۲x\sqrt{lnx}}\right) = \frac{۱}{x\sqrt{lnx}} = \frac{۱}{x\sqrt{lnx}}$$

---

۲۷۳ . گزینه ۳ صحیح است.

$$(x^۲+۱)dy - ydx = ۰ \;\rightarrow\; (x^۲+۱)dy = ydx \;\rightarrow\; \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x^۲+۱}$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفین تساوی انتگرال می گیریم}} \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x^۲+۱} \rightarrow lny = Arctgx + c \rightarrow y = e^{Arctgx} + c$$

$$y(۰) = ۱ \rightarrow ۱ = e^{Arctg۰} + c \rightarrow ۱ = e^{۰} + c \rightarrow ۱ = ۱ + c \;\rightarrow\; c = ۱ - ۱ = ۰$$

بنابراین جواب یکتا معادله برابر است با: $y = e^{Arctgx}$

---

۲۷۴ . گزینه ۴ صحیح است.

$$\frac{dx}{dt} - ۲xt = ۰ \rightarrow \frac{dx}{dt} = ۲xt \rightarrow \frac{dx}{x} = ۲tdt \xrightarrow{\text{از طرفین تساوی انتگرال می گیریم}} \int \frac{dx}{x} = \int ۲tdt$$

$$lnx = ۲\left(\frac{t^{۱+۱}}{۱+۱}\right) + c \rightarrow\; lnx = t^۲ + c \;\rightarrow\; x = e^{t^۲+c} \;\rightarrow\; x = e^{t^۲} \times e^{c} = ke^{t^۲}$$

$$x(۰) = ۱ \;\rightarrow\; ۱ = ke^{۰} \;\rightarrow\; ۱ = k(۱) \;\rightarrow\; k = ۱$$

$$x(۱)\Big|_{k=۱} = (۱)e^{(۱)^۲} = e$$

---

۲۷۵ . گزینه ۴ صحیح است.

$$G(x) = \int (x - \frac{۱}{x})\,dx = \frac{x^{۱+۱}}{۱+۱} - lnx + c = \frac{x^۲}{۲} - lnx + c$$

با توجه به اینکه $G(۱) = ۲$ می باشد بنابراین: $G(۱) = \frac{۱^۲}{۲} - ln۱ + c = ۲$

$$\rightarrow G(۱) = \frac{۱}{۲} - ۰ + c = ۲ \;\rightarrow\; c = ۲ - \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۲} \;\rightarrow\; c = \frac{۳}{۲}$$

$$G(x) = \frac{x^۲}{۲} - lnx + \frac{۳}{۲} \;\rightarrow\; G(۲) = \frac{۲}{۱} - ln۲ + \frac{۳}{۲} = \frac{۷}{۲} - ln۲$$

و از طرفی دیگر می توان گفت: $G'(x) = x - \frac{۱}{x}$ پس $G'(۱) = ۱ - \frac{۱}{۱} = ۰$ بنابراین:

$$G(۲)+G'(۱)=\left(\frac{۷}{۲}-ln۲\right)+(۰)=\frac{۷}{۲}-ln۲$$

---

۲۷۶ . گزینه ۴ صحیح است. راه اول :

$$\int_{۰}^{۳}([x]-۱)\,dx=\int_{۰}^{۱}((۰)-۱)dx+\int_{۱}^{۲}((۱)-۱)dx+\int_{۲}^{۳}((۲)-۱)dx$$

$$=\int_{۰}^{۱}(-۱)\,dx+\int_{۱}^{۲}۰\,dx+\int_{۲}^{۳}۱\,dx=-x]_{۰}^{۱}+x]_{۲}^{۳}$$

$$=(-۱-۰)+(۳-۲)=-۱+۱=۰$$

راه دوم :

$$\int_{۰}^{۳}([x]-۱)dx=\int_{۰}^{۳}[x]\,dx-\int_{۰}^{۳}۱\,dx$$

$$\xrightarrow{\left(n\text{ عدد صحیح و مثبت}\right)\int_{۰}^{n}[x]dx=\frac{n(n-۱)}{۲}}=\frac{۳(۳-۱)}{۲}-x]_{۰}^{۳}=۳-(۳-۰)=۳-۳=۰$$

---

۲۷۷ . گزینه ۱ صحیح است.

$$\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{x+۱}۸\,xydydx=\int_{۰}^{۱}(۴xy^{۲})]_{۰}^{x+۱}=\int_{۰}^{۱}(۴x)\,(x+۱)^{۲}dx$$

$$\xrightarrow{(a+b)^{۲}=a^{۲}+۲ab+b^{۲}}\int_{۰}^{۱}(۴x)\,(x^{۲}+۲x+۱)dx=\int_{۰}^{۱}(۴x^{۳}+۸x^{۲}+۴x)dx$$

$$\xrightarrow{\int x^{n}dx=\frac{x^{n+۱}}{n+۱}+c}۴\left(\frac{x^{۳+۱}}{۳+۱}\right)+۸\left(\frac{x^{۲+۱}}{۲+۱}\right)+۴(\frac{x^{۱+_۱}}{۱+۱})]_{۰}^{۱}$$

$$\frac{۴x^{۴}}{۴}+\frac{۸x^{۳}}{۳}+\frac{۴x^{۲}}{۲}]_{۰}^{۱}=x^{۴}+\frac{۸}{۳}x^{۳}+۲x^{۲}]_{۰}^{۱}=\left[(۱)^{۴}+\frac{۸}{۳}(۱)^{۳}+۲(۱)^{۲}\right)-(۰+۰+۰)]$$

$$=۱+\frac{۸}{۳}+۲=۳+\frac{۸}{۳}=\frac{۹+۸}{۳}=\frac{۱۷}{۳}$$

---

۲۷۸ . گزینه ۲ صحیح است.

$$S=\left|\int_{۱}^{۳}(-x^{۲}+۴x-۳)dx\right|$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+۱}}{n+۱} + c \xrightarrow[\int adx = ax + c]{} \left| -\frac{x^{۲+۱}}{۲+۱} + ۴\left(\frac{x^{۱+۱}}{۱+۱}\right) - ۳x\right|_{۱}^{۳} = \left| -\frac{x^{۳}}{۳} + \frac{۴x^{۲}}{۲} - ۳x\right|_{۱}^{۳}$$

$$= \left| -\frac{x^{۳}}{۳} + ۲x^{۲} - ۳x\right|_{۱}^{۳} = \left| \left(-\frac{۳^{۳}}{۳} + ۲(۳)^{۲} - ۳(۳)\right) - \left(-\frac{۱^{۳}}{۳} + ۲(۱)^{۲} - ۳(۱)\right)\right|$$

$$= \left|(-۹ + ۱۸ - ۹) - \left(-\frac{۱}{۳} + ۲ - ۳\right)\right| = \left|۰ - \left(-\frac{۱}{۳} - ۱\right)\right| = \left|\frac{۱}{۳} + ۱\right| = \left|\frac{۱+۳}{۳}\right| = \frac{۴}{۳}$$