ریاضیات DLM

آموزش سه‌بعدی مفاهیم

کاربرد مشتق

طراح، مؤلف و گردآورنده:

امین بنیاد گذار

ویراستار علمی:

حسین خدامی

عنوان **صفحه**

آموزش کلاسیک و تکنیکی کاربرد مشتق

آهنگ تغییر ۷

انواع آهنگ تغییر ۷

کمیت های وابسته ۹

معادلات خطوط مماس و قائم بر منحنی ۱۳

الف) معادله مماس و قائم بر منحنی $y = f(x)$ در نقطه $A(x_0, y_0)$ واقع بر منحنی ۱۳

معادله مماس بر منحنی تابع f باضابطه $y = f(x)$ از نقطه $M(a, b)$ خارج از منحنی ۱۷

روش اول: روش m ۱۷

روش دوم: روش α ۱۸

تعیین معادله قائم بر منحنی $y = f(x)$ از نقطه $M(a, b)$ واقع در خارج منحنی ۲۱

بررسی نقاط تماس و نقاط تقاطع دو منحنی ۲۴

زاویه بین خط و منحنی ۲۵

زوایه بین دو منحنی ۲۷

توابع صعودی و نزولی ۲۹

تعریف تابع اکیداً صعودی ۳۰

تعریف تابع نزولی ۳۰

تعریف تابع اکیداً نزولی ۱۷

ارتباط یکنوایی با مشتق ۳۱

خلاصه نتایج یکنوایی ۳۳

نقاط اکسترمم ۳۹

تعریف Max نسبی ۳۹

تعریف Min نسبی ۴۰

تعریف نقطه ی بحرانی ۴۱

روش تعیین نقاط بحرانی ۴۲
بررسی نموداری نقاط بحرانی ۴۵
روش تعیین اکسترمم های نسبی (تعیین نوع اکسترمم به صورت حرفه ای) ۴۷
اکسترمم های مطلق ۵۲
روش تعیین اکسترمم های مطلق ۵۴
روش های ساده محاسبه ی اکسترمم های مثلثاتی ۶۰
۱. اگر sinx یا cosx از درجه اول باشند ۶۰
۲. اگر sinx یا cosx فقط از درجه دوم باشند ۶۰
۳. اگر sinx یا cosx هم از درجه اول و هم از درجه دوم باشند ۶۱
۴. اگر sinx و cosx هر دو با هم از درجه ی اول باشند ۶۲
۵. کاربرد نامساوی ۶۲
۶. توابع هموگرافیک سینوسی و کسینوسی ۶۳
آزمون های مشتق ۶۴
آزمون مشتق اول برای اکسترم های نسبی ۶۴
آزمون مشتق دوم برای اکسترمم های نسبی ۶۸
نقطه عطف ۷۲
نقطه عطف دارای ۳ شرط همزمان لازم و کافی می باشد ۷۳
۳ نوع عطف داریم ۷۳
۱. عطف قائم ۷۳
۲. عطف افقی ۷۴
۳. عطف مایل ۷۴
مسائل پارامتری عطف ۸۴
قضیه ی رول ۸۵
قضیه ی مقدار میانگین ۸۷
قضیه کوشی ۸۸

ایجاد اکسترمم های مشروط بدون مشتق گیری (راه حرفه ای) ۸۸
منحنی شناسی (بررسی حرفه ای) ۹۰
۱. تابع درجه یک ۹۰
۲. تابع درجه دوم $y = ax^{۲} + bx + c$ ۹۲
حالت تلاقی با محور xها ۹۳
حل حرفه ای معادله درجه ۲($ax^{۲} + bx + c = ۰$) ۹۵
۳. تابع درجه سوم: $y = ax^{۳} + bx^{۲} + cx + d$ ۹۶
محاسبه ی نقطه عطف ۹۷
تابع هموگرافیک (هم نگار) و ویژگی های آن ۹۸
بهینه سازی ۱۰۱
روش های ساده تر برای بهینه سازی(۴قضیه مهم) ۱۰۳
تعریف دیفرانسیل تابع ۱۰۵
دیفرانسیل تابع ۱۰۶
فرمول دیفرانسیل ۱۰۶
تعبیر هندسی دیفرانسیل، خطای خطی سازی ۱۱۰
انتشار خطا ۱۱۱
دیفرانسیل های مراتب بالاتر ۱۱۲
تعیین تعداد ریشه ها به کمک رسم نمودار (تقاطع) ۱۱۳

سوالات آزمون کارشناسی ارشد رشته های مدیریت ، حسابداری و اقتصاد

سوالات آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته مدیریت ۱۱۶

سوالات آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی رشته مدیریت ۱۲۲

سوالات آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته حسابداری ۱۳۴

سوالات آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی رشته حسابداری ۱۳۹

سوالات آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته اقتصاد ۱۴۱

سوالات آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی رشته اقتصاد ۱۴۷

حل سوالات آزمون کارشناسی ارشد رشته های مدیریت و حسابداری و اقتصاد

پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته مدیریت ۱۵۰

پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد رشته مدیریت ۱۶۶

پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته حسابداری ۱۹۴

پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد رشته حسابداری ۲۰۴

پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته اقتصاد ۲۰۹

پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد رشته اقتصاد ۲۲۳

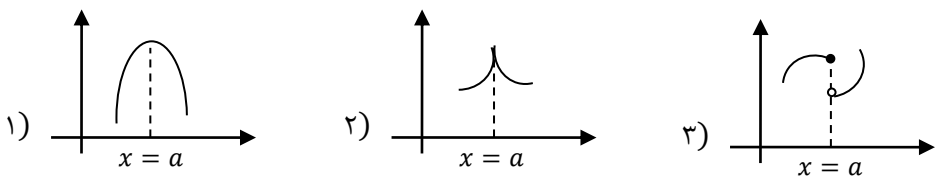
نقاط اکسترمم

تعریف Max نسبی:

اگر در یک بازه‌ی متقارنِ $x_{\cdot} = a$ داشته باشیم: $f(x) \leq f(a)$:یعنی عرض نقطه a از عرض نقاطی که در همسایگی a هستن، مساوی یا بزرگتر باشه.

و اصولاً بخاطر همینه که بهش میگن ماکسیمم نسبی (**ماکسیمم**: بخاطر بیشتر بودن عرضشه در مقایسه با عرض نقاط کناریش، و **نسبی** هم بخاطر اینه که عرضش **نسبت به** نقاط کناریش بیشتره و نه لزوما نسبت به همه نقاط تابع).

مانند توابع زیر که در نقطه $x = a$ ماکزیمم **نسبی** هستند، زیرا در همسایگی $x = a$ نقطه‌ی $x = a$ بالاترین نقطه ی تابع است (بیشترین عرض رو داره).



توضیح شکل‌های بالا:

در شکل (۱): تابع f در $x = a$ پیوسته و مشتق پذیر است و چون خطی که بر روی منحنی در نقطه $x = a$ مماس کنیم، بصورت افقی (با شیب صفر) خواهد بود، پس نتیجه می‌گیریم که در $x = a$ مشتق تابع صفر است، یعنی: $y'_{x=a} = \cdot$

در شکل (۲): تابع f در $x = a$ پیوسته است، ولی مشتق ناپذیر است، زیرا در $x = a$ خط مماس وجود ندارد (یعنی نمی‌تونیم در این نقطه، خطی را بر روی منحنی مماس کنیم)، ولی با این وجود، این تابع در نقطه $x = a$ ماکزیمم **نسبی** است (چون عرضش از عرض بقیه نقاط کناریش بیشتره).

در شکل (۳): تابع در $x = a$ نه پیوسته و نه مشتق پذیر است (چون در اینجا هم مثل شکل ۲ نمی‌تونیم یه خط را بر منحنی مماس کنیم)، ولی با این‌حال، تابع در این نقطه **ماکزیمم نسبی** است (چون عرضش از عرض بقیه نقاط کناریش بیشتره).

ς **نتیجه مهم ۱:** در نقطه‌ی ماکزیمم نسبی برای مشتق، ۲ حالت وجود دارد:

یا مشتق **صفر** است، مانند شکل (۱) و یا مشتق **وجود ندارد**، مانند: شکل‌های (۲) و (۳).

ς **نتیجه مهم۲:** یک تابع در نقطه ای می تواند Max یا Min باشد، بدون آن که لازم باشد تابع در آن نقطه پیوسته یا مشتق پذیر باشد.

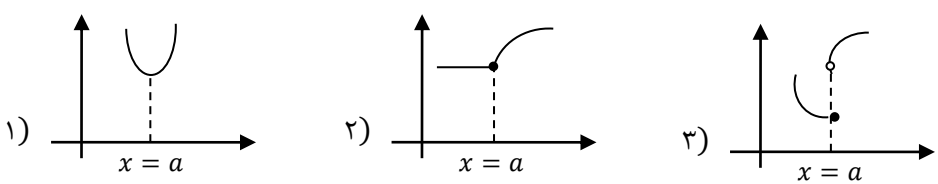
مثل شکل ۲ که تابع مشتق در نقطه $x = a$ مشتق پذیر نبود و مثل شکل ۳ که تابع در نقطه $x = a$ نه پیوسته بود و نه مشتق پذیر، ولی با این‌حال، در این نقطه، ماکسیمم نسبی بود. پس:

ماکسیمم یا می‌نیمم بودن تابع، هیچ ربطی به پیوسته یا مشتق پذیر بودنش نداره.

تعریف Min نسبی:

اگر در یک بازه ی متقارنِ $x. = a$ داشته باشیم: $f(x) \geq f(a)$:یعنی عرض نقطه a از عرض نقاطی که در همسایگی a هستن، مساوی یا کوچکتر باشه.

مانند توابع زیر که در $x = a$ می نیمم **نسبی** هستند، زیرا در همسایگیِ $x = a$ نقطه‌ی $x = a$ پایین ترین نقطه ی تابع است (از آن پایین تر نداریم، خصوصاً شکل (۲))



مشتق **صفره**	مشتق **ناپذیره**	مشتق **ناپذیره**
شیب خط مماس، صفره	خط مماس، قابل رسم نیست	خط مماس، قابل رسم نیست

ς **نتیجه مهم ۱:** در نقطه‌ی می‌نیمم نسبی برای مشتق، ۲ حالت وجود دارد:

یا مشتق **صفر** است، مانند شکل (۱) و یا مشتق **وجود ندارد**، مانند: شکل‌های (۲) و (۳).

ς **نتیجه مهم۲:** یک تابع در نقطه ای می تواند Max یا Min باشد، بدون آن که لازم باشد تابع در آن نقطه پیوسته یا مشتق پذیر باشد.

مثل شکل ۲ که تابع مشتق در نقطه $x = a$ مشتق پذیر نبود و مثل شکل ۳ که تابع در نقطه $x = a$ نه پیوسته بود و نه مشتق پذیر، ولی با این‌حال، در این نقطه، می‌نیمم نسبی بود. پس:

ماکسیمم یا می‌نیمم بودن تابع، هیچ ربطی به پیوسته یا مشتق پذیر بودنش نداره.

تعریف نقطه ی بحرانی:

نقاطی هستند که در آن ها:

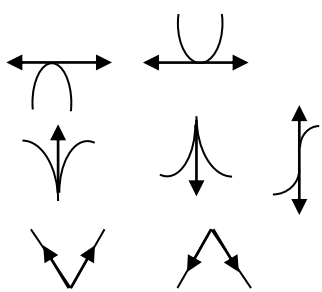
یا **مشتق صفر** است ($y' = ۰$)

و یا **مشتق وجود ندارد** (مشتق راست و چپ برابر نیستن : $y'_+ \neq y'_-$) و یا

اینکه مشتق نامعین است (نامعین $= y'$)

(یعنی دقیقاً همون ۲ حالتی که برای ماکسیمم و می‌نیمم نسبی گفتیم):

نقطه بحرانی
$$\begin{cases} y' = ۰ \xRightarrow{(\text{صورت}=۰)} \\ y' = \text{مخرج نامعین} \rightarrow \\ y'_+ \neq y'_- \rightarrow \end{cases}$$



ς **نتیجه:** نقاط **اکسترمم** (ماکسیمم یا می‌نیمم) از بین نقاط بحرانی به دست می آیند.

روش تعیین نقاط بحرانی:

گام۱: ابتدا مشتق تابع داده شده را محاسبه می‌کنیم.

گام۲: سپس یکبار صورت مشتق را مساوی صفر قرار داده تا ریشه‌های $(y' = ۰)$ به دست آید.

گام۳: و یکبار مخرج مشتق را مساوی صفر قرار داده تا ریشه های (نامعین= y') به دست آید.

مثال ۱۵) نقاط بحرانی هر یک از توابع زیر را به دست آورید:

۱) $f(x) = x^۳ - ۳x^۲ - ۹x + ۷$

حل) $y' = ۳x^۲ - ۶x - ۹ = ۰ \xRightarrow{a+c=b} \begin{cases} x_۱ = -۱ \\ x_۲ = \dfrac{-c}{a} = \dfrac{-(-۹)}{۳} = ۳ \end{cases}$

۲) $f(x) = (x-۱)\sqrt[۳]{x^۲}$

حل) $y' = x^{\frac{۲}{۳}} + \frac{۲}{۳}x^{\frac{-۱}{۳}} \times (x-۱) = x^{\frac{۲}{۳}} + \dfrac{۲(x-۱)}{۳x^{\frac{۱}{۳}}} + \dfrac{۳x^{\frac{۱}{۳}}x^{\frac{۲}{۳}} + ۲(x-۱)}{۳x^{\frac{۱}{۳}}}$

$= \dfrac{۳x + ۲(x-۱)}{۳\sqrt[۳]{x}} = \dfrac{۳x + ۲x - ۲}{۳\sqrt[۳]{x}} = \dfrac{۵x - ۲}{۳\sqrt[۳]{x}}$

$\begin{cases} y' = ۰ : (\text{صورت کسر} = ۰) \to ۵x - ۲ = ۰ \to ۵x = ۲ \to \boxed{x = \frac{۲}{۵}} \\ y' = \text{نامعین} : (\text{مخرج کسر} = ۰) \to \boxed{x = ۰} \end{cases}$

۳) $f(x) = \dfrac{۲x}{x^۲ + ۱}$

حل) $f'(x) = \dfrac{[(۲x)' \times x^۲ + ۱] - [(x^۲ + ۱)' \times ۲x]}{(x^۲ + ۱)^۲}$

$= \dfrac{۲(x^۲ + ۱) - ۲x \times ۲x}{(x^۲ + ۱)^۲} = \dfrac{۲x^۲ + ۲ - ۴x^۲}{(x^۲ + ۱)^۲} = \dfrac{۲ - ۲x^۲}{(x^۲ + ۱)^۲} = ۰$

$\to ۲ - ۲x^۲ = ۰ \to ۲ = ۲x^۲ \to x^۲ = ۱ \to \boxed{x = \pm ۱}$

توجه: تو این مثال، دیگه لازم نیست مخرج مشتق را مساوی صفر قرار بدیم، چون مخرج این کسر $((x^{۲}+۱)^{۲})$ **همیشه مثبته** و هیچ‌وقت صفر نمیشه (چون $x^{۲}$ که همیشه مثبته و وقتی با ۱ جمع بشه، بازم میشه مثبت، و به توان ۲ هم که برسه، باز مثبت میشه).

$$۴)\ y = xcosx - sinx \rightarrow y' = (x)' \times cosx + (cosx)' \times x - cosx$$

$$y' = ۱ \times cosx - xsinx - cosx = \cancel{cosx} - xsinx - \cancel{cosx}$$

$$= -xsinx = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ sinx = ۰ \end{cases} \rightarrow \boxed{x = k\pi}$$

تست ۲۰) مجموعه طول‌های نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = (x^{۲} - ۲۸)\sqrt[۳]{x}$ کدام است؟

۱) $\{-۲, ۲\}$ ۲) $\{-\sqrt{۷}, \sqrt{۷}\}$ ۳) $\{-۲, ۰, ۲\}$ ۴) $\{-۷, ۰, ۱\}$

حل) گزینه ۳ صحیح است.

$$y = (x^{۲} - ۲۸)\sqrt[۳]{x} \rightarrow y' = ۲x\sqrt[۳]{x} + (x^{۲} - ۲۸) \times \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}} = ۲x\sqrt[۳]{x} + \frac{x^{۲} - ۲۸}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}$$

$$= \frac{۲x\sqrt[۳]{x}\ ۳\sqrt[۳]{x^{۲}} + x^{۲} - ۲۸}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}} = \frac{۶xx^{\frac{۱}{۳}}x^{\frac{۲}{۳}} + x^{۲} - ۲۸}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}} = \frac{۶x^{۲} + x^{۲} - ۲۸}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}} = \frac{۷x^{۲} - ۲۸}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}$$

$$\begin{cases} y' = ۰ : (\text{صورت کسر} = ۰) \rightarrow ۷x^{۲} - ۲۸ = ۰ \rightarrow ۷x^{۲} = ۲۸ \rightarrow x^{۲} = ۴ \rightarrow \boxed{x = \pm ۲} \\ y' = \text{نامعین} : (\text{مخرج} = ۰) \rightarrow \boxed{x = ۰} \end{cases}$$

تست ۲۱) عرض نقطه بحرانی تابع $y = \frac{۱}{x} + lnx$ و نوع آن کدام است؟ (اقتصاد- ۸۶)

۱) $y = ۲$، ماکزیمم ۲) $y = ۱$، ماکزیمم

۳) $y = ۱$، می نیمم ۴) $y = ۲$، می نیمم

حل) $y = \frac{۱}{x} + lnx \quad , \quad D_f = (۰, +\infty)$

$$y' = ۰ \rightarrow -\frac{۱}{x^{۲}} + \frac{۱}{x} = ۰ \rightarrow \frac{-۱ + x}{x^{۲}} = ۰ \rightarrow x - ۱ = ۰ \rightarrow \boxed{x = ۱}$$ نقطه بحرانی

حال با قرار دادن این نقطه در تابع، می‌تونیم عرضش رو هم بدست بیاریم:

$$y=\frac{۱}{x}+lnx \overset{x=۱}{\Longrightarrow} y=\frac{۱}{۱}+ln۱=۱+۰=۱ \rightarrow \boxed{y=۱}$$ عرض نقطه بحرانی

x	۰		۱		$+\infty$
y'		$-$		$+$	
y	↘		۱		↗

پس نقطه $(۱,۱)$ **می نیمم** تابع است، چون قبل از $x=۱$ منحنی حالت نزولی داره (↘) ولی بعدش منحنی حالت صعودی داره (↗)، پس نتیجه می‌گیریم که نقطه $x=۱$ ، نقطه **می‌نیمم** تابع است.

گزینه ۳ صحیح است.

تست ۲۲) مقدار تابع $y=xe^{-x}$ در نقطه بحرانی چگونه است؟ (صنایع غذایی ۸۰)

۱) $\frac{۱}{e}$، ماکسیمم ۲) $\frac{۱}{e}$ ، می نیمم

۳) e، ماکسیمم ۴) e، می نیمم

حل) $y'=۰ \rightarrow e^{-x}-xe^{-x}=۰ \rightarrow (۱-x)e^{-x}=۰ \rightarrow \boxed{x=۱}$

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
y'		$-$		$+$	
y	↗		$\frac{۱}{e}$		↘

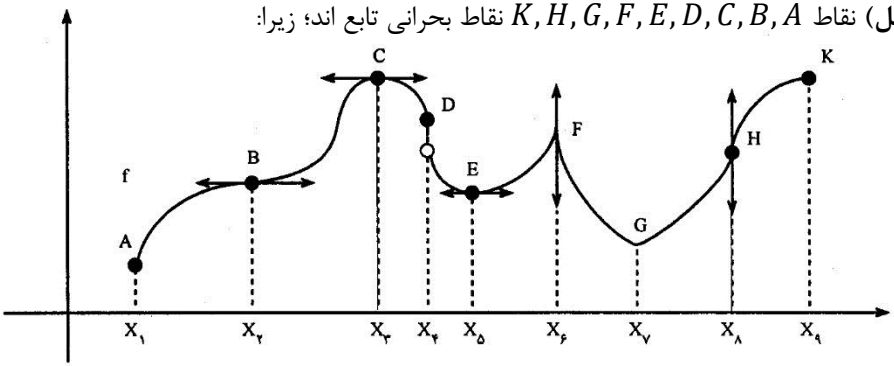
پس تابع در نقطه $(۱,\frac{۱}{e})$ ماکسیمم دارد، چون قبل از $x=۱$ منحنی حالت صعودی داره (↗) ولی بعدش منحنی حالت نزولی داره (↘)، پس نتیجه می‌گیریم که نقطه $x=۱$ ، نقطه **ماکسیمم** تابع است.

گزینه ۱ صحیح است.

بررسی نموداری نقاط بحرانی:

نقاط بحرانی نمودار تابع f را در شکل زیر مشخص کنید.

حل) نقاط $K, H, G, F, E, D, C, B, A$ نقاط بحرانی تابع اند؛ زیرا:



اولاً: تابع f در نقاطی به طول های $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$ تعریف شده است.

ثانیاً:۱) $f'(x_1)$ وجود ندارد (یعنی تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست)، زیرا تابع f در x_1 پیوسته نیست (پیوستگی چپ نداره).

۲) $f'(x_2) = 0$ (یعنی **مشتق یا شیب** خط مماس بر منحنی در این نقطه، صفره)، زیرا خط مماس بر منحنی در این نقطه، موازی محور x هاست (خط مماس **افقی** است).

۳) $f'(x_3) = 0$ زیرا شیب خط مماس در این نقطه، صفره (خط مماس، افقیه).

۴) $f'(x_4)$ وجود ندارد، زیرا تابع در این نقطه ناپیوسته است (حد چپ و راست، با مقدار تابع در این نقطه، برابر نیست).

۵) $f'(x_5) = 0$، زیرا شیب خط مماس در این نقطه، صفره (خط مماس، افقیه).

۶) $f'(x_6)$ وجود ندارد، زیرا خط مماس بر منحنی تابع موازی محور y ها است.

۷) $f'(x_7)$ وجود ندارد، زیرا این نقطه، **نقطه‌ی زاویه دار** تابع f است.

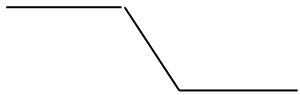
۸) $f'(x_8)$ وجود ندارد، زیرا خط مماس بر نمودار تابع در این نقطه موازی محور y ها است.

۹) $f'(x_9)$ وجود ندارد، زیرا تابع f در این نقطه ناپیوسته است (پیوستگی راست نداره).

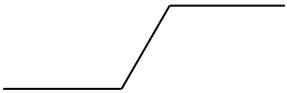
نکته: منحنی تابع $f(x) = |x-a| - |x-b|$ به یکی از ۲ صورت زیر است:

همون‌طور که می‌بینین این منحنی روی کل دامنه اش یکنوا (نه اکیداً یکنوا) است.

(نزولی)



(صعودی)



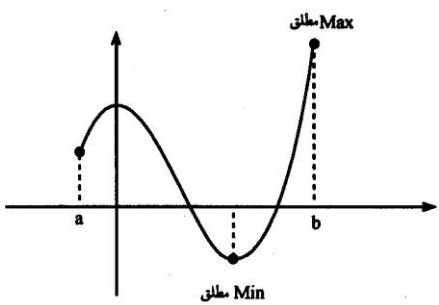
اکسترمم های مطلق:

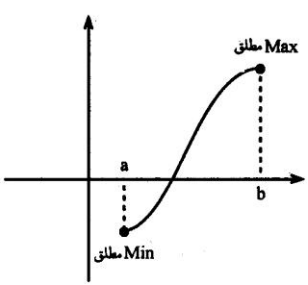
تعریف Max مطلق: اگر در کل دامنه‌ی تابع، نقطه ای مانند $x_. = a$ داشته باشیم که : $f(a) \geq f(x)$ باشه، یعنی عرض نقطه a بزرگتر یا مساوی عرض نقاط مجاورش باشه.

تعریف Min مطلق: اگر در کل دامنه تابع، نقطه ای مانند $x_. = a$ داشته باشیم که در آن: $f(a) \leq f(x)$ باشه، یعنی عرض نقطه a کوچکتر یا مساوی عرض نقاط مجاورش باشه.

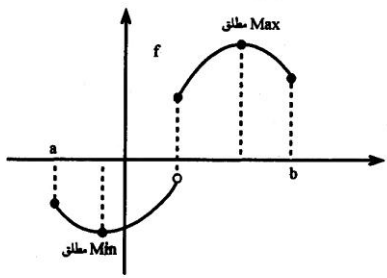
تذکرمهم : در محاسبه اکسترم های مطلق، نقاط سروته بازه نیز در محاسبات بررسی می شوند.

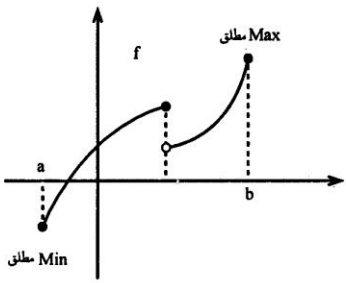
قضیه: اگر تابع f بر بازه ی $[a,b]$ پیوسته باشد، آن گاه f روی $[a,b]$ یک مقدار ماکزیمم **مطلق** و یک مقدار می نیمم **مطلق** دارد؛ مانند شکل های زیر:



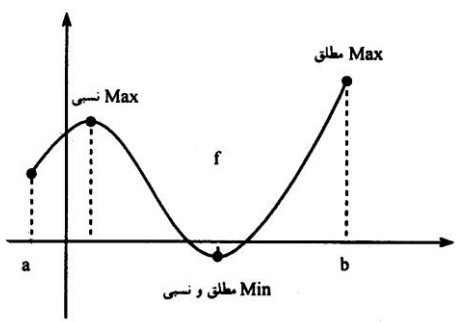


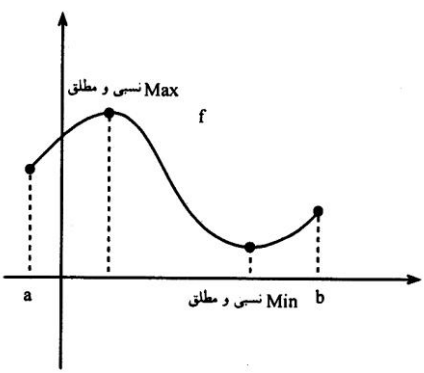
تذکر: باید توجه داشته باشیم که برای وجود ماکزیمم مینیمم و مطلق ، **پیوستگی** تابع روی بازه $[a,b]$، مطلق شرط کافی است ولی لازم نیست، زیرا ممکن است تابع f در بازه ی $[a,b]$ پیوسته نباشد، ولی ماکزیمم **مطلق** و می نیمم **مطلق** داشته باشد؛ مانند نمودارهای زیر:

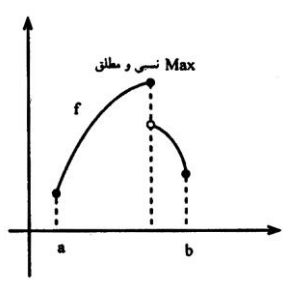


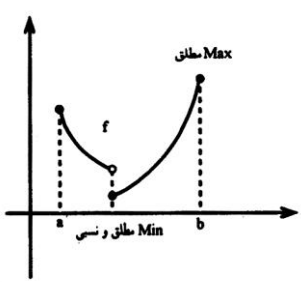


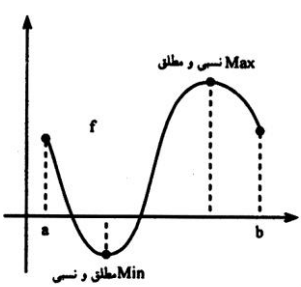
به نمودارهای زیر توجه کنید:











به طوری که در نمودارها ملاحظه می کنید، نمودارهای تابع f در بازه ی $[a,b]$ رسم شده است.

ماکزیمم **مطلق** و می نیمم **مطلق** حتماً وجود دارد.

گاهی ماکزیمم مطلق و نسبی بر هم منطبق اند؛ گاهی هم می‌نیمم نسبی و مطلق برهم منطبق‌اند.

در نقاط اکسترمم **نسبی** و **مطلق**، لزومی ندارد تابع پیوسته باشد.

روش تعیین اکسترمم های مطلق:

گام۱) ابتدا کلیه‌ی نقاط بحرانی را تعیین کرده،

گام۲) سپس مقادیر تابع شان را نیز محاسبه می کنیم.

گام۳) بزرگ ترین عدد Max مطلق و کوچک ترین عدد Min مطلق خواهد بود.

مثال ۱۷) اکسترمم های مطلق هر یک از توابع زیر را در بازه ی $-۳ \leq x < ۴$ تعیین کنید:

۱) $f(x) = |x^۲ - ۱|$

راه اول)

$$y' = \frac{۲x(x^۲ - ۱)}{|x^۲ - ۱|} \rightarrow \text{نقاط بحرانی} : \begin{cases} y' = ۰ \rightarrow x = ۰ \\ y' = \text{نامعین} \rightarrow x = \pm ۱ \\ \text{سر و ته بازه} \rightarrow x = -۳, ۴ \end{cases}$$

چون متعلق به بازه نیست با ضربدر مشخص کردیم

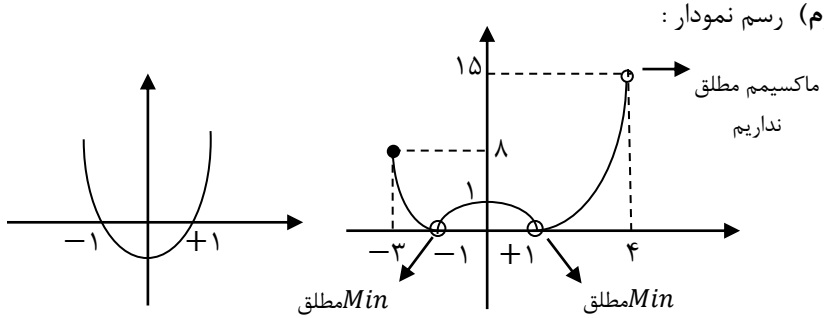
$$\text{اکسترم های مطلق} \rightarrow \begin{cases} \text{بحرانی ها}: x = -۳, -۱, ۰, ۱, \cancel{۴} \\ y = ۸, \underbrace{۰}_{\text{مطلق } Min}, ۱, \underbrace{۰}_{\text{مطلق } Min}, \underbrace{۱۵}_{\text{مطلق ندارد } Max} \end{cases}$$

تذکر خیلی مهم: در تعیین اکسترمم های **مطلق**، اگر نقاط ابتدایی یا انتهایی بازه، متعلق به دامنه نباشند، باز هم ما مقادیر تابع شان را محاسبه می‌کنیم و در صورتی که بزرگ ترین عدد و یا کوچک ترین عدد، از این نقاط حاصل شود، می‌گوییم اکسترم مطلق **نداریم**؛ در مثال بالا نقطه‌ی

$x = ۴$ متعلق به دامنه نمی‌باشد $(-۳ \leq x < ۴)$ اما ما y آن را محاسبه کردیم و چون بزرگ ترین عدد را تولید نموده است، می‌گوییم این تابع ماکزیمم مطلق **ندارد**، زیرا نمودار تابع در $x = ۴$ تو خالی است.

دقت شود: اگر $x = ۴$ در محاسبات منظور نمی شد، به غلط مقدار $f(-۳) = ۸$ را ماکزیمم **مطلق** در نظر می گرفتیم در حالی که Max مطلق وجود ندارد.

راه دوم) رسم نمودار :



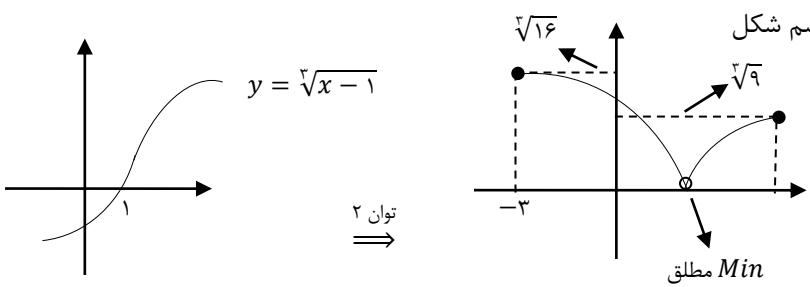
۲) $f(x) = \sqrt[۳]{(x-۱)^۲}$

راه اول)

$$y' = \frac{۲ \times ۱}{۳\sqrt[۳]{x-۱}} \rightarrow \text{نقاط بحرانی} : \begin{cases} y' = ۰ \rightarrow \text{بدون ریشه} \\ y' = \text{نامعین} \rightarrow x = ۱ \\ \text{سرو ته بازه} \rightarrow x = -۳, ۴ \end{cases}$$

$$\text{اکسترمم های مطلق} \rightarrow \begin{cases} \text{بحرانی ها} : x = -۳, ۱, ۴ \\ y = \underbrace{\sqrt[۳]{۱۶}}_{Max\text{مطلق}} \ , \ \underbrace{۰}_{Min\text{مطلق}} \ , \sqrt[۳]{۹} \end{cases}$$

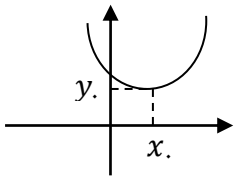
راه دوم) رسم شکل



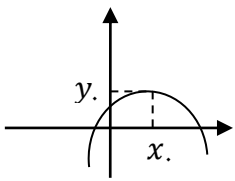
این تابع دارای **محور تقارن** $x = \frac{-b}{۲a}$ بوده:

که برای $a > ۰$ ، نقطه Min بوده با نمودار روبرو:

نقطه **اکسترمم**: $(x_۰ = \frac{-b}{۲a}, y_۰ = \frac{-\Delta}{۴a})$

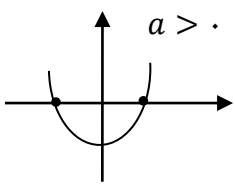


۲) و برای $a < ۰$ نقطه Max بوده با نمودار زیر:

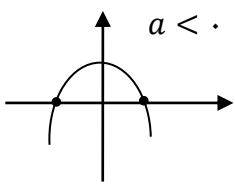


حالت تلاقی با محور xها:

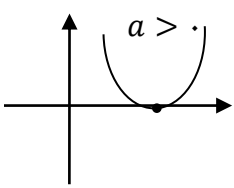
I) اگر $\Delta > ۰$ باشد، نمودار، محور xها را در دو نقطه قطع می کند(چون در این‌حالت، ۲ تا ریشه داره):



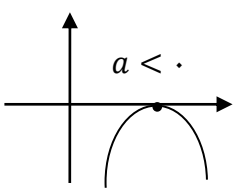
یا



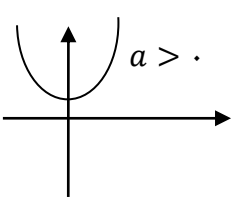
II) اگر $\Delta = ۰$ باشد، نمودار برمحور xها **مماس** خواهد بود (یعنی تنها ۱ ریشه داره).



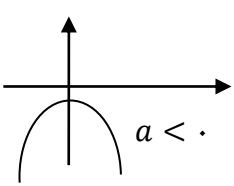
یا



III) اگر $\Delta < ۰$ باشد، نمودار بالای محور xها یا پایین محور xها خواهد بود (یعنی با محور xها برخوردی نخواهد داشت، چون Δ منفیه و ریشه نداریم).



یا



ς **نتایج جالب ومهم:**

۱) شرط آن که تابع $y = ax^۲ + bx + c$ **بالای** محور xها باشد، اینه که:

اولا دلتا منفی باشه، تا منحنی محور xها رو قطع نکنه (بالا یا پایین محور xها باشه)، **ثانیاً** a مثبت باشه تا منحنی رو به بالا باشه و درنتیجه خود منحنی، بالای محور xها قرار بگیره:

$$\begin{cases} \Delta < ۰ \\ a > ۰ \end{cases}$$

۲) شرط آن که تابع $y = ax^۲ + bx + c$ **پایین** محور xها باشد، اینه که:

اولا دلتا منفی باشه، تا منحنی محور xها رو قطع نکنه (بالا یا پایین محور xها باشه)، **ثانیاً** a منفی باشه تا منحنی رو به پایین باشه و درنتیجه خود منحنی، بالای محور xها قرار بگیره: $\begin{cases} \Delta < ۰ \\ a < ۰ \end{cases}$

تست ۵۲) نمودار تابع $y = x^۲ + ۲ax + ۱$ بالای محور xهاست، مقادیر a در کدام گزینه صدق می کند؟

۱) $a > -۱$ ۲) $a < ۱$ ۳) $a < -۱$ یا $a > ۱$ ۴) $-۱ < a < ۱$

حل)

شرط بالای محور xها بودن $\begin{cases} \Delta < ۰ \\ a > ۰ \end{cases} \rightarrow \Delta = b^۲ - ۴ac = (۲a)^۲ - ۴(۱)(۱) < ۰$

$$۴a^۲ - ۴ < ۰ \rightarrow ۴a^۲ < ۴ \rightarrow a^۲ < ۱ \rightarrow |a| < ۱ \rightarrow \boxed{-۱ < a < ۱}$$

گزینه ۴ صحیح است.

تست ۵۳) اگر تابع $y = (۱ - m)x^۲ + (m^۲ - ۶)x + ۱$ در نقطه‌ای به طول (-۱) ماکزیمم باشد m کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۱ ۴) ۲

حل حرفه ای)

$$\left(\text{طول اکسترم}\right) x = \frac{-b}{۲a} = \frac{\cancel{-}(m^۲ - ۶)}{۲(۱ - m)} = \cancel{-}۱ \quad \rightarrow \quad m^۲ - ۶ = ۲ - ۲m$$

$$m^۲ + ۲m - ۸ = ۰ \quad \rightarrow \quad (m + ۴)(m - ۲) = ۰ \quad \rightarrow \quad \begin{cases} m = -۴ \\ m = ۲ \end{cases}$$

چون تابع دارای ماکزیمم است، یعنی تابع، بالای محور xهاست، پس $a < ۰$ یعنی:

$\underbrace{۱ - m}_{a} < ۰ \rightarrow m > ۱$ در نتیجه فقط $m = ۲$ قابل قبول است، زیرا مقدارش از ۱ بزرگتره.

حل حرفه ای معادله درجه ۲($ax^۲ + bx + c = ۰$):

I) اگر جمع ضرایب **صفر** باشد، یکی از ریشه ها (۱) و دیگری $\left(\frac{c}{a}\right)$ است یعنی:

$$a + b + c = ۰ \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_۱ = ۱ \\ x_۲ = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

مثال ۳۶)

$$\underbrace{۱}_{a} x^۲ \underbrace{-۳}_{b} x + \underbrace{۲}_{c} = ۰ \xRightarrow{a+b+c=۰} \begin{cases} x_۱ = ۱ \\ x_۲ = \frac{c}{a} = \frac{۲}{۱} = ۲ \end{cases}$$

II) اگر جمع a و c برابر با b باشد، یکی از ریشه ها (-۱) و دیگری $\left(\frac{-c}{a}\right)$ است یعنی:

$$a + c = b \rightarrow \begin{cases} x_۱ = -۱ \\ x_۲ = \dfrac{-c}{a} \end{cases}$$

مثال ۳۷)

$$\underbrace{۷}_{a} x^۲ \underbrace{-۵}_{b} x - \underbrace{۱۲}_{c} = ۰ \xRightarrow{a+c=b} \begin{cases} x_۱ = -۱ \\ x_۲ = \dfrac{-c}{a} = \dfrac{-(-۱۲)}{۷} = \dfrac{۱۲}{۷} \end{cases}$$

III) با محاسبه‌ی **جمع** ریشه ها: $S = \frac{-b}{a}$ و **ضرب** ریشه ها $P = \frac{c}{a}$ می‌تونیم ریشه ها را حدس بزنیم.

مثال ۳۸) $x^{۲} + ۵x + ۶ = ۰ \rightarrow \begin{cases} S = \frac{-b}{a} = \frac{-۵}{۱} = -۵ \\ P = \frac{c}{a} = \frac{۶}{۱} = ۶ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_{۱} = -۲ \\ x_{۲} = -۳ \end{cases}$

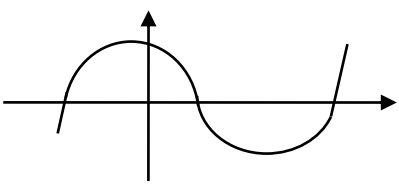
توضیح: برای حدس زدن ریشه‌ها، باید دنبال دو عددی بگردیم که **جمع**شون بشه: ۵- و **ضرب**شون بشه: ۶ که با امتحان کردن اعداد مختلف، به ۲- و ۳- می‌رسیم.

---

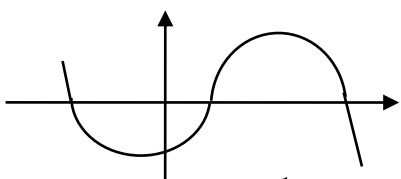
۳) تابع درجه سوم: $y = ax^{۳} + bx^{۲} + cx + d$

نمودار این منحنی، بسته به تعداد ریشه‌های $y' = ۰$ و علامت a به یکی از ۳ صورت زیر است:

الف) اگر معادله‌ی $y' = ۰$ دارای **دو ریشه** متمایز باشد (یعنی Max و Min داشته باشیم)، بسته به مثبت یا منفی بودن a ، دو حالت داریم: (معروف به منحنی N شکل)



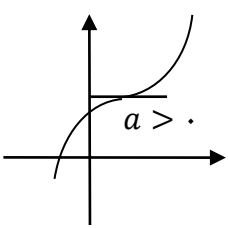
$a > ۰$



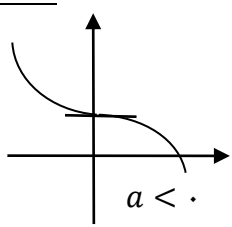
$a < ۰$

تذکر: اگر $a > ۰$ باشد، نمودار از ناحیه ی **سوم** شروع شده و به ناحیه ی **اول** می رود.
اگر $a < ۰$ باشد، نمودار از ناحیه **دوم** شروع شده و به ناحیه **چهارم** می رود.

ب) اگر معادله ی $y' = ۰$ دارای **یک ریشه** باشد. (اکسترمم **نداریم**)



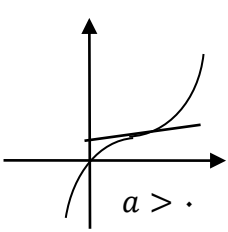
$a > ۰$



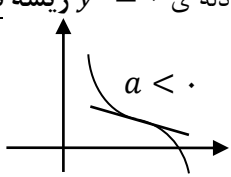
$a < ۰$

تذکر: در این حالت، خط مماس در نقطه‌ی عطف، موازی محور xها خواهد بود (عطف **افقی**)

ج) اگر معادله ی $y' = ۰$ **ریشه نداشته** باشد. (اکسترمم **نداریم**)



$a > ۰$



$a < ۰$

تذکر: در این حالت، خط مماس در نقطه‌ی عطف، موازی محور xها نخواهد بود (عطف **مایل**)

محاسبه ی نقطه عطف:

$$y = ax^{۳} + bx^{۲} + cx + d \quad \rightarrow \quad y' = ۳ax^{۲} + ۲bx + c$$

$$y'' = ۶ax + ۲b = ۰ \quad \rightarrow \quad \boxed{x = \frac{-b}{۳a}}$$

$$\left(\text{مرکز تقارن منحنی}\right) : w\left(\frac{-b}{۳a} \ , \ f\left(\frac{-b}{۳a}\right)\right)$$

نکته: طول مرکز تقارنِ منحنیِ درجه سومِ $y = (x-a)(x-b)(x-c)$ برابر است با:

$$x_w = \frac{a+b+c}{۳}$$

تست ۵۴) مرکز تقارن منحنی $y = -x^{۳} - ۳x^{۲} + ۳$ کدام است؟

۱) $(-۱, ۱)$ ۲) $(۱, ۱)$ ۳) $(-۱, ۲)$ ۴) $(۲, ۱)$

راه اول) مرکز تقارن یا عطف تابع درجه سوم، ریشه‌ی $y'' = ۰$ است، پس:

$$\begin{cases} y = -x^{۳} - ۳x^{۲} + ۳ \\ y' = -۳x^{۲} - ۶x \\ y'' = -۶x - ۶ = ۰ \ \rightarrow \ -۶x = ۶ \ \rightarrow \ x = \frac{۶}{-۶} = -۱ \ \rightarrow \ y = ۱ \end{cases} \rightarrow \boxed{w(-۱,۱)}$$

راه دوم) طول مرکز تقارن، $x = \frac{-b}{۳a}$ می باشد، پس:

$$\begin{cases} x = \frac{-b}{۳a} = \frac{۳}{۳(-۱)} = \frac{۳}{-۳} = \boxed{-۱} \\ y = -(۱)^{۳} - ۳(۱)^{۲} + ۳ = ۱ - ۳ + ۳ = \boxed{۱} \end{cases} \rightarrow w(-۱, ۱)$$

گزینه ۱ صحیح است.

تســـت ۵۵) بــه ازای چــه مقــدار m ، خــط $y = mx$ از نقطــه ی عطــفِ منحنــی تــابعِ $y = x^{۳} - ۶x^{۲}$ می گذرد؟

۱) ۴ ۲) ۴− ۳) ۸− ۴) ۸

حل)

$$x = \frac{-b}{۳a} = \boxed{۲}$$

$$\xrightarrow{x=۲} \; y = ۸ - ۶(۴) = \boxed{-۱۶} \;\rightarrow\; w(۲,-۱۶)$$

حال : $w(۲,-۱۶) \in y = mx \;\rightarrow\; -۱۶ = m(۲) \rightarrow ۲m = -۱۶ \rightarrow \boxed{m = -۸}$

گزینه ۳ صحیح است.

تابع هموگرافیک (هم نگار) و ویژگی های آن:

معادله این تابع به صورت $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq ۰)$ می باشد که دارای خواص زیر است:

۱) این تابع در دامنه اش یک به یک و معکوس پذیر است.

۲) در تابع هموگرافیک می توان گفت: $\underbrace{R_f}_{\text{برد تابع}} = R - \{\frac{a}{c}\}$ $\underbrace{D_f}_{\text{دامنه تابع}} = R - \left\{ \underbrace{-\frac{d}{c}}_{\text{ریشه مخرج}} \right\}$

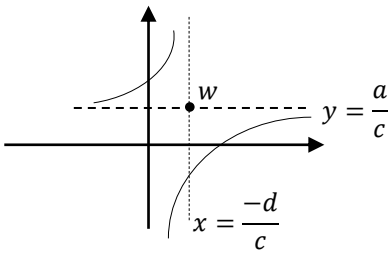
۳) این تابع دارای مجانب **افقی** $y = \frac{a}{c}$ و مجانب **قائم** $x = \frac{-d}{c}$ می باشد، زیرا:

$$\begin{cases} \text{مجانب افقی} : x \to \infty \to y = \dfrac{a}{c} \\ \text{مجانب قائم} : y \to \infty \to x = \dfrac{-d}{c} \end{cases} \rightarrow \left(\text{مرکز تقارن}\right) w \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{-d}{c} \\ y = \dfrac{a}{c} \end{array} \right.$$

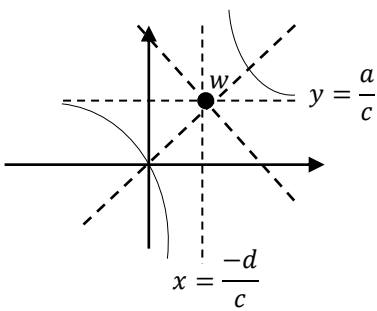
تذکر: **مرکز تقارن** تابع هموگرافیک، محل برخورد مجانب های **افقی و قائم** است.

۴) مشتق آن $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^{۲}}$ دو حالت دارد:

حالت اول) اگر $ad - bc > ۰$ باشد، تابع روی هر شاخه اش **صعودی** است که با مشاهده شکل روبرو می توان گفت:



حالت دوم) اگر $ad - bc < ۰$ باشد تابع روی هر شاخه اش **نزولی** است، یعنی با توجه به شکل روبه رو می توان گفت:



۵) منحنی هموگرافیک دارای **یک** مرکز تقارن (محل برخورد مجانب ها) و **دو محور** تقارن (نیم سازهای مجانب هایش می باشد).

۶) هر تابع هموگرافیک، به علت داشتن مجانب قائم، **نه صعودیه و نه نزولیه.**

تست ۵۶) مرکز تقارن منحنی تابع $y = \frac{x+۳}{ax-۲}$ بر روی خط به معادله ی $x + y = ۶$ واقع است، a کدام است؟

۱) -۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

حل)

$$y = \frac{\overset{a}{۱}x+۳}{\underbrace{a}_{c}x\underbrace{-۲}_{d}}$$

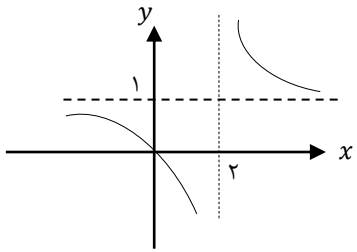
مرکز تقارن $w\left(x = \frac{-d}{c}, y = \frac{a}{c}\right) \rightarrow w\left(x = \frac{۲}{a}, y = \frac{۱}{a}\right) \xrightarrow{x+y=۶} \overset{x}{\frac{۳}{a}} + \overset{y}{\frac{۱}{a}} = ۶$

$$\frac{۳}{a} = ۶ \rightarrow ۳ = ۶a \rightarrow a = \frac{۳}{۶} \rightarrow \boxed{a = \frac{۱}{۲}}$$

گزینه ۲ صحیح است.

تست ۵۷) شکل زیر نمودار تابع $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ است. مقدار $a + b + c$ را بدست آورید؟

(مدیریت بازرگانی آزاد ۸۲)



۱) -۳ ۲) ۲

۳) ۱ ۴) -۱

حل) **تذکر:** **مرکز تقارن** تابع هموگرافیک، محل برخورد مجانب های **افقی و قائم** است.

با توجه به معادله $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ و شکل داده شده (با توجه به شکل: $x = ۲$ و $y = ۱$ است) داریم:

$$\left(\text{مرکز تقارن}\right) w \left| \begin{array}{l} \left(\text{مجانب قائم}\right) x = \frac{-d}{c} \rightarrow ۲ = \frac{-c}{۱} \rightarrow \boxed{c = -۲} \\ \left(\text{مجانب افقی}\right) y = \frac{a}{c} \rightarrow ۱ = \frac{a}{۱} \rightarrow \boxed{a = ۱} \end{array} \right.$$

خب، حالا فقط می‌مونه بدست آوردن b که اونو بصورت زیر بدست میاریم:

با توجه به شکل، منحنی این تابع، از مبدأ مختصات، گذشته، یعنی نقطه $(۰,۰)$ باید در ضابطه تابع صدق کند:

$$f(x) = \frac{ax+b}{x+c} \xRightarrow{(۰,۰)} ۰ = \frac{a(۰)+b}{۰+c} \rightarrow \boxed{b = ۰}$$

$$a + b + c = ۱ + ۰ + (-۲) = \boxed{-۱}$$

گزینه ۴ صحیح است.

تعریف دیفرانسیل تابع:

اگر تابع f با ضابطه $y = f(x)$ در نقطه‌ای به طول x، مشتق پذیر باشد، آنگاه مقدار $f'(x)\Delta x$ را **دیفرانسیل** تابع f می نامند و آن را با df یا dy نشان می‌دهند و می‌نویسند:

$$\boxed{dy = f'(x)\Delta x}$$

یعنی دیفرانسیل هر تابع، برابر است با (**مشتق تابع ضربدر Δx**)، اگر x متغیر مستقل باشد (یعنی تابع، متغیر دیگری نداشته باشد)، می توان گفت:

$$dx = (x)'\Delta x = ۱ \times \Delta x \quad \rightarrow \quad dx = \Delta x$$

درنتیجه در این‌حالت، دیفرانسیل y برابره با: $\boxed{dy = f'(x).dx}$

مثال ۴۵) دیفرانسیل توابع زیر را بیابید.

الف) $y = \sqrt{x}$ ب) $y = x^۲ + ۵x$ ج) $y = sinx + cosx$

حل) با توجه به رابطه:

الف) $dy = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}dx$

ب) $dy = (۲x + ۵)dx$

ج) $dy = (cosx - sinx)dx$

تست ۵۹) دیفرانسیل تابع $y = cos^۴x - sin^۴x$ کدام است؟[۱]

۱) $-۲sin^۲xdx$ ۲) $۲sin^۲xdx$ ۳) $۲cos۲xdx$ ۴) $-۲cos۲xdx$

حل) $\boxed{dy = f'(x).dx}$

$$y = cos^۴x - sin^۴x \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (cos^۲x - sin^۲x)\Big(\underbrace{cos^۲x + sin^۲x}_{۱}\Big)$$

$$cos^۲x - sin^۲x = cos۲x$$

$$dy = y'.dx = -۲sin۲xdx$$

گزینه ۱ صحیح است.

---

[۱] رنجبران صفحه ۳۳۳

سوالات آزمون سراسری

و آزاد کارشناسی ارشد

فصل کاربرد مشتق

رشته های مدیریت و حسابداری

حل سوالات آزمون سراسری

و آزاد کارشناسی ارشد

فصل کاربرد مشتق

رشته های مدیریت و حسابداری و اقتصاد

$$y' = \frac{-۲a - ۱}{\underbrace{(x-۲)^۲}_{\text{همواره مثبت}}} > ۰ \quad \rightarrow \quad -۲a - ۱ > ۰ \quad \rightarrow \quad -۲a > ۱ \quad \rightarrow \quad a < \frac{-۱}{۲}$$

مخرج کسر همواره مثبت است بنابراین برای مثبت بودن عبارت باید بصورت آن نیز مثبت باشد.

---

۲۰۲. گزینه ۳ صحیح است.

$$y = ۸x - x^۲ \xRightarrow{x=۳} y = ۸(۳) - ۳^۲ = ۲۴ - ۹ = ۱۵ \qquad , \qquad A(۳, ۱۵)$$

$$y' = ۸ - ۲x \xRightarrow{x=۳} y' = ۸ - ۲(۳) = ۲ = m \text{ (مماس)}$$

$$y - y_. = m(x - x_.) \quad \rightarrow \quad y - ۱۵ = ۲(x - ۳) \quad \rightarrow \quad y - ۱۵ = ۲x - ۶$$

$$y = ۲x - ۶ + ۱۵ = ۲x + ۹ \quad \text{(معادله خط مماس)}$$

$$y = ۲x + ۹ \xlongequal[\text{باید } x = ۰]{\text{برای قطع محور عرضها}} y = ۲(۰) + ۹ = ۹$$

---

۲۰۳. گزینه ۱ صحیح است.

حل : چنین شرایطی برای نقطه ماکزیمم برقرار است برای مثال تابع $y = -x^۴$ در نقطه $x = ۰$ دارای ماکزیمم می باشد زیرا:

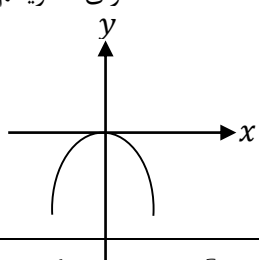
$$f(x) = -x^۴$$

$$f'(x) = -۴x^۳ \quad \rightarrow \quad f'(۰) = ۰$$

$$f''(x) = -۱۲x^۲ \quad \rightarrow \quad f''(۰) = ۰$$

$$f'''(x) = -۲۴x \quad \rightarrow \quad f'''(۰) = ۰$$

$$f^{(۴)}(x) = -۲۴ < ۰ \quad \rightarrow \quad \text{نقطه } Max \text{ دارد}$$



---

۲۰۴. گزینه ۳ صحیح است.

یادآوری : $y = u^n \quad \rightarrow \quad y' = nu'u^{n-۱}$

$$y = (۲ - x)^۲ + (۳ - x)^۲ + (۴ - x)^۲$$

$$y' = ۲(-۱)(۲ - x) + ۲(-۱)(۳ - x) + ۲(-۱)(۴ - x) = ۶x - ۱۸$$

$$y' = ۰ \rightarrow ۶x - ۱۸ = ۰ \rightarrow ۶x = ۱۸ \rightarrow x = \frac{۱۸}{۶} = ۳ \rightarrow \begin{cases} y = (۲ - ۳)^۲ + (۳ - ۳)^۲ + (۴ - ۳)^۲ \\ y = ۱ + ۱ = ۲ \end{cases}$$

x	$-\infty$	۳	$+\infty$
y'	$-$	۰	$+$
	↘	Min	↗

راه دوم : ابتدا تابع داده شده را تا حد امکان ساده کنید و سپس مشتق بگیرید.

یادآوری : $(a-b)^۲ = a^۲ - ۲ab + b^۲$

$$y = (۲-x)^۲ + (۳-x)^۲ + (۴-x)^۲$$

$$y = ۴ - ۴x + x^۲ + ۹ - ۶x + x^۲ + ۱۶ - ۸x + x^۲ = ۲۹ - ۱۸x + ۳x^۲$$

$$y' = ۰ - ۱۸ + ۶x \to y' = ۰ \to ۶x - ۱۸ = ۰ \to ۶x = ۱۸ \to x = \frac{۱۸}{۶} = ۳$$

$$y = ۲۹ - ۱۸x + ۳x^۲ \xRightarrow{x=۳} y = ۲۹ - ۱۸(۳) + ۳(۳)^۲ = ۲۹ - ۵۴ + ۲۷ = ۲$$

x	$-\infty$	۳	$+\infty$
y'	$-$	۰	$+$
	↘	Min	↗

---

۲۰۵. **گزینه ۱ صحیح است.** **یادآوری** : $y = Lnu \quad \to \quad y' = \frac{u'}{u}$

$$y = xln\sqrt{x}$$

$$y' = (x)'ln\sqrt{x} + \left(ln\sqrt{x}\right)' \times x = ۱ \times ln\sqrt{x} + \frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x}}{۱}} \times x$$

$$y' = ln\sqrt{x} + \frac{۱}{۲x} \times x = ln\sqrt{x} + \frac{۱}{۲}$$

$$\to y'' = \frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} + ۰ = \frac{۱}{۲x} \xRightarrow{D_y: x>۰} y'' > ۰$$

تقعر رو به بالاست پس همواره محدب است.

۲۰۶. گزینه ۱ صحیح است.

حل : زمانی نقطه عطف داریم که تابع داده شده در مشتق دوم تغییر علامت دهد.

یادآوری : $y = e^u \;\rightarrow\; y' = u' \times e^u$

$$y = (x+۱)e^{ax}$$
$$y' = (x+۱)'e^{ax} + (e^{ax})'(x+۱) = e^{ax} + a(e^{ax})(x+۱)$$
$$y'' = ae^{ax} + ae^{ax} + a^۲(x+۱)e^{ax}$$
$$y''\Big|_{x=۱} = ۰ \;\rightarrow\; ۲ae^a + a^۲(۲)e^a = ۰$$
$$۲ae^a + ۲a^۲e^a = ۰ \;\rightarrow\; ۲ae^a(۱+a) = ۰$$
$$۲ae^a \neq ۰ \,,\, ۱+a = ۰ \;\rightarrow\; a = -۱$$

---

۲۰۷. گزینه ۲ صحیح است.

حل : برای بدست آوردن ماکزیمم یا مینیمم تابع ابتدا نقاط بحرانی را در فاصله $[-۱,۱]$ بدست آورید و سپس مقدار تابع را در ابتدا و انتهای بازه نیز بدست آورید که بیش ترین مقدار تابع ماکزیمم تابع و کم ترین مقدار تابع می نیمم تابع است. $y = -x^۴ + ۲x^۲ + ۱$

$$y' = -۴x^۳ + ۴x \;\rightarrow\; y' = ۰ \rightarrow -۴x^۳ + ۴x = ۰ \;\rightarrow\; -۴x(x^۲ - ۱) = ۰$$
$$\begin{cases} -۴x = ۰ \;\rightarrow\; x = ۰ \\ x^۲ - ۱ = ۰ \;\rightarrow\; x^۲ = ۱ \;\rightarrow\; x = \pm ۱ \end{cases}$$
$$y\Big|_{x=-۱} = -(-۱)^۴ + ۲(-۱)^۲ + ۱ = -۱ + ۲ + ۱ = ۲ \;\rightarrow\; y(-۱) = ۲$$
$$y\Big|_{x=۰} = -(۰)^۴ + ۲(۰)^۲ + ۱ = ۰ + ۰ + ۱ = ۱ \rightarrow y(۰) = ۱$$
$$y\Big|_{x=۱} = -(۱)^۴ + ۲(۱)^۲ + ۱ = -۱ + ۲ + ۱ = ۲ \rightarrow y(۱) = ۲$$

پس می نیمم تابع برابر است با:

$$y_{min} = y(۰) = ۱$$

۲۰۸. **گزینه ۳ صحیح است.**

$$y = (ax + ۱)ln(ax)$$

$$y' = aln(ax) + \frac{۱}{x}(ax + ۱)$$

$$y'' = \frac{a}{x} + \frac{ax - ax - ۱}{x^۲} = \frac{a}{x} - \frac{۱}{x^۲} = \frac{ax - ۱}{x^۲} \to y'' = ۰ \ \to \ \frac{ax - ۱}{x^۲} = ۰$$

$$y''\Big|_{x = ۱} = \frac{a(۱) - ۱}{(۱)^۲} = ۰ \ \to \ \frac{a - ۱}{۱} = ۰ \ \to \ a - ۱ = ۰ \ \to \ a = ۱$$

---

۲۰۹. **گزینه ۱ صحیح است.**

$$y = (۱۲ - x)^۴ \ \to \ y' = -۴(۱۲ - x)^۳ \ \to \ y'' = ۱۲(۱۲ - x)^۲$$

x	$-\infty$		۱۲		$+\infty$
y''		$-$	۰	$+$	
y	$+\infty$	↘	Min	↗	$-\infty$

پس نقطه $x = ۱۲$ می نیمم تابع است.

توجه شود که مشتق دوم تابع در اطراف نقطه $x = ۱۲$ تغییر علامت نمی دهد بنابراین نقطه عطف وجود ندارد .