ریاضیات DLM

آموزش سه‌بعدی مفاهیم

مشتق

طراح، مؤلف و گردآورنده:

امین بنیاد گذار

ویراستار علمی:

حسین خدامی

عنوان **صفحه**

آموزش مشتق

تعبیر هندسی مشتق ۵
مشتق راست و مشتق چپ ۱۰
مشتق پذیری و پیوستگی ۱۱
فرمول های اصلی مشتق ۱۲
مشتق عبارات جبری ۱۴
مشتق توابع مثلثاتی ۱۵
مشتق توابع معکوس مثلثاتی ۱۶
مشتق توابع نمایی ۱۷
مشتق توابع لگاریتمی ۱۷
مشتق تابع هذلولی ۱۸
مشتق توابع مثلثاتی ۱۹
مشتق تابع $f(x) = u^v$ ۱۹
تمرینات مشتق‌گیری ۲۶
مشتق مراتب بالاتر (مشتق مرتبه n ام) ۲۷
مشتق مرتبه ی n ام برخی از توابع ۲۸
مشتق تابع مرکب ۳۳
مشتق توابع ضمنی ۳۸
مشتق منحنی های پارامتری ۴۶
مشتق تابع نسبت به تابع ۴۸
مشتق تابع جزء صحیح ۴۹
مشتق چند ضابطه ای ها ۵۰
مشتق تابع قدر مطلق ۵۲

مشتق تابع معکوس ۵۴
نقاطی که تابع در آن ها مشتق پذیر نیست..... ۵۹
۱) نقاط زاویه دار منحنی..... ۵۹
۲) نقطه عطف با مماس قائم..... ۶۲
۳) نقطه بازگشتی ۶۴
۴) نقاطی که منحنی تابع، در همسایگی آن نوسان کند..... ۶۶
۵) نقطه توقف منحنی ۶۷
۶) نقاط ناپیوستگی..... ۶۷
دامنه مشتق تابع ۶۸
مشتق عامل صفرکننده (روش ضعیف کشی) ۶۹
جواب تمرین های مشتق گیری (تمرینات صفحه ۲۶) ۷۱

سوالات آزمون کارشناسی ارشد رشته های مدیریت و حسابداری و اقتصاد

سوالات آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته مدیریت ۷۶
سوالات آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی رشته مدیریت..... ۸۱
سوالات آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته حسابداری..... ۹۷
سوالات آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی رشته حسابداری..... ۹۹
سوالات آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته اقتصاد..... ۱۰۴
سوالات آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی رشته اقتصاد..... ۱۰۹

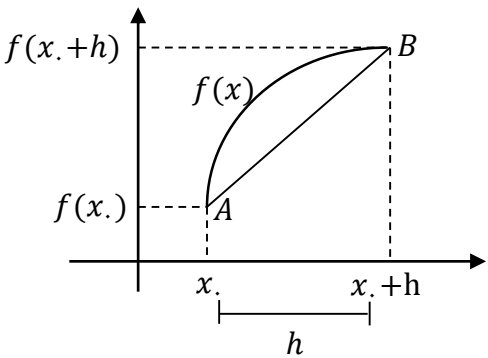
حل سوالات آزمون کارشناسی ارشد رشته های مدیریت و حسابداری و اقتصاد

پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته مدیریت..... ۱۱۴
پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد رشته مدیریت ۱۳۱
پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته حسابداری ۱۶۶
پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد رشته حسابداری..... ۱۷۴
پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته اقتصاد ۱۸۴
پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد رشته اقتصاد..... ۲۰۵

تعبیر هندسی مشتق:

در ابتدای کار، مشتق را بصورت کاملاً مفهومی به شما آموزش می دهم، پس با من همراه شوید.

ابتدا یک منحنی رسم می‌کنیم که نقطه اول آن را $(x_. , f(x_.))$ قرار داده و این نقطه را A می نامیم. سپس نقطه دوم را $(x_. + h , f(x_. + h))$ قرار داده و این نقطه را B می نامیم. سپس نقطه A را توسط خطی به نقطه B وصل می کنیم (خط AB را خط **واصل** گویند).



(به اندازه گام h جلو می رویم)

پس از آن **شیب خط** AB را بدست می آوریم، یعنی:

$$\left(\text{شیب خط } AB\right) m_{AB} = \frac{f(x_. + h) - f(x_.)}{h}$$

حال می‌خواهیم **شیب مماس** بر منحنی f را در نقطه A بدست آوریم. یعنی **شیب خط واصل** دو نقطه A و B را بدست آوریم که باید خط AB را حول نقطه A دَوَران دهیم که این خط واصل AB تبدیل به خط مماس بر تابع شود (به شکل صفحه بعد توجه کنید).

در انجام این عمل، نقطه B دائماً به نقطه A نزدیک می شود و در واقع این خط واصل می رود که به خط مماس تبدیل شود، در نتیجه آن قدر خط واصلِ AB حول نقطه A دَوَران می یابد که به مماس At تبدیل شود و نقطه A به نقطه B نزدیک می شود که در این صورت برای شیب At داریم:

۱) مشتق عبارات جبری:

تابع	مشتق تابع	مثال
$y = c$	$y' = ۰$	$y = \sqrt{۲} \rightarrow y' = ۰ \ , \ y = log۷ \rightarrow y' = ۰$
$y = ax + b$	$y' = a$	$y = ۵x + ۷ \rightarrow y' = ۵$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-۱}$	$y = x^۵ \rightarrow y' = ۵x^۴$
$y = cf(x)$	$y' = cf'(x)$	$y = ۳x^۴ \rightarrow y' = ۳(x^۴)' = ۳(۴x^۳) = ۱۲x^۳$
$y = u(x) \pm v(x)$	$y' = u'(x) \pm v'(x)$	$y = ۷x^۳ - ۲x^۵ \rightarrow y' = ۲۱x^۲ - ۱۰x^۴$
$y = u.v$	$y' = u'.v + v'.u$	$y = (x + ۱)(x - ۲)$ $y' = ۱ \times (x - ۲) + ۱ \times (x + ۱)$ $= ۲x - ۱$
$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - v'u}{v^۲}$	$y = \frac{۲x + ۱}{x^۲}$ $y' = \frac{۲x^۲ - ۲x(۲x + ۱)}{(x^۲)^۲} = \frac{-۲x^۲ - ۲x}{x^۴}$
$y = u^n$	$y' = nu'u^{n-۱}$	$y = (x^۲ + ۱)^{۵۰} \rightarrow y'$ $= ۵۰ \times ۲x \times (x^۲ + ۱)^{۴۹}$
$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{۲\sqrt{u}}$	$y = \sqrt{x} \rightarrow y' = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}$ $y = \sqrt{x^۳ - ۱} \rightarrow y' = \frac{۳x^۲}{۲\sqrt{x^۳ - ۱}}$
$y = \sqrt[n]{u^m}$	$y' = \frac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$	$y = \sqrt[۳]{(x + ۱)^۲} \rightarrow y' = \frac{۲ \times ۱}{۳\sqrt[۳]{(x + ۱)^{۳-۲}}}$ $y' = \frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x + ۱}}$
$y = \|x\|$	$y' = \frac{x}{\|x\|}$	
$y = \|u\|$	$y' = \frac{uu'}{\|u\|}$	$y = \|۲x^۳ - x\| \rightarrow y' = \frac{(۲x^۳ - x)(۶x^۲ - ۱)}{\|۲x^۳ - x\|}$
$y = [x]$	$y' = \begin{cases} ۰ & x \notin z \\ \text{موجود نیست} & x \in z \end{cases}$	

۲) مشتق توابع مثلثاتی:

در عبارات زیر u و v توابعی مشتق پذیر از x می باشند.

تابع	مشتق تابع	مثال
$y = sinx$	$y' = cosx$	$y' = \frac{۲}{۳}sinx \rightarrow y' = \frac{۲}{۳}cosx$
$y = cosx$	$y' = -sinx$	$y = ۳cosx \rightarrow y' = -۳sinx$
$y = tanx$	$y' = ۱ + tan^{۲}x$	
$y = cotgx$	$y' = -(۱ + cot^{۲}gx)$	$y = tanx - ۴cotx$ $y' = (۱ + tan^{۲}x) - (-۴)(۱ + cot^{۲}gx)$
$y = sinu$	$y' = u'cosu$	$y = sin(x^{۲} + ۱) \rightarrow y' = ۲xcos(x^{۲} + ۱)$
$y = cosu$	$y' = -u'sinu$	$y = cos(۳x + ۵) \rightarrow y' = -۳sin(۳x + ۵)$
$y = tgu$	$y' = u'(۱ + tg^{۲}u)$	$y = tg(۷x + ۱) \rightarrow y' = ۷(۱ + tg^{۲}(۷x + ۱))$
$y = cotgu$	$y' = -u'(۱ + cotg^{۲}u)$	$y = cot\ g(۲x + ۵)$ $y' = -۲(۱ + cotg^{۲}(۲x + ۵))$
$y = sin^{n}u$	$y' = nu'cosusin^{n-۱}u$	$y = sin^{۶}\sqrt{x}$ $y' = ۶ \times \frac{۱}{۲\sqrt{x}}cos\sqrt{x}sin^{۵}\sqrt{x}$
$y = cos^{n}u$	$y' = -nu'sinucos^{n-۱}u$	$y = cos^{۵}\lvert x\rvert$ $y' = -۵\frac{x}{\lvert x\rvert}sin\lvert x\rvert\ cos^{۴}\lvert x\rvert$
$y = tan^{n}u$	$y' = nu'(۱ + tan^{۲}u)tan^{n-۱}u$	$y = tan^{۱۰}(x^{۲})$ $y' = ۱۰ \times ۲x \times (۱ + tan^{۲}x^{۲})tan^{۹}x^{۲}$
$y = cotg^{n}u$	$y' = -nu'(۱ + cot^{۲}u)cot^{n-۱}u$	$y = cot^{۷}(x^{۳} - ۱)$ $y' = -۷ \times ۳x^{۲} \times \left(۱ + cot^{۲}(x^{۳} - ۱)\right) \times cot^{۶}(x^{۳} - ۱)$

۳) مشتق توابع معکوس مثلثاتی:

در عبارات زیر u و v توابعی مشتق پذیر از x می باشند:

تابع	مشتق تابع	مثال
$y = Arcsinx$	$y' = \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^۲}}$	
$y = Arcsinu$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{۱ - u^۲}}$	$y = Arcsin۳x \to y' = \frac{(۳x)'}{\sqrt{۱ - (۳x)^۲}} = \frac{۳}{\sqrt{۱ - ۹x^۲}}$
$y = Arccosx$	$y' = \frac{-۱}{\sqrt{۱ - x^۲}}$	
$y = Arccosu$	$y' = \frac{-u'}{\sqrt{۱ - u^۲}}$	$y = Arccos۲x \to y' = \frac{-(۲x)'}{\sqrt{۱ - (۲x)^۲}} = \frac{-۲}{\sqrt{۱ - ۴x^۲}}$
$y = Arctgx$	$y' = \frac{۱}{۱ + x^۲}$	
$y = Arctgu$	$y' = \frac{u'}{۱ + u^۲}$	$y = Arctan(e^x) \to y' = \frac{(e^x)'}{۱ + (e^x)^۲} = \frac{e^x}{۱ + e^{۲x}}$
$y = Arccotgx$	$y' = \frac{-۱}{۱ + x^۲}$	
$y = Arccotgu$	$y' = \frac{-u'}{۱ + u^۲}$	$y = Arccotgx^۲ \to y' = \frac{-(x^۲)'}{۱ + (x^۲)^۲} = \frac{-۲x}{۱ + x^۴}$

مشتق توابع نمایی:

تابع	مشتق تابع	مثال
$y = a^x$	$y' = a^x lna$	
$y = a^u$	$y' = u'a^u lna$	$y = ۳^x \rightarrow y' = ۱ \times ۳^x ln۳$
$y = e^x$	$y' = e^x$	
$y = e^u$	$y' = u' \times e^u$	$y = e^{\lvert sinx \rvert} \rightarrow y' = \frac{cosx.sinx}{\lvert sinx \rvert} e^{\lvert sinx \rvert}$

مشتق توابع لگاریتمی:

تابع	مشتق تابع	مثال
$y = lnx$	$y' = \frac{۱}{x}$	
$y = lnu$	$y' = \frac{u'}{u}$	$y = ln(Arcsinx)$ $y' = \frac{(Arcsinx)'}{Arcsinx} = \frac{\frac{۱}{\sqrt{۱ - x^۲}}}{Arcsinx} = \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^۲} Arcsinx}$
$y = log_a^x$	$y' = \frac{۱}{x} log_a^e = \frac{۱}{xlna}$	
$y = log_a^u$	$y' = \frac{u'}{u} log_a^e = \frac{u'}{ulna}$	$y = log(x^۳ + ۱) \rightarrow y' = \frac{۳x^۲}{(x^۳ + ۱)ln۱۰}$

مشتق تابع هذلولی:

در عبارتهای زیر u و v توابعی <u>مشتق پذیر</u> از x می باشند.

$$\begin{cases} f(x) = sinhx \rightarrow f'(x) = coshx \\ f(x) = sinhu \rightarrow f'(x) = u'coshu \end{cases} \overset{\text{مثال}}{\Rightarrow} y = sinh(۲x) \rightarrow y' = ۲cosh(۲x)$$

$$\begin{cases} f(x) = coshx \rightarrow f'(x) = sinhx \\ f(x) = coshu \rightarrow f'(x) = u'sinhu \end{cases} \overset{\text{مثال}}{\Rightarrow} y = cosh(x^۳) \rightarrow y' = ۳x^۲sinh(x^۳)$$

$$\begin{cases} f(x) = tghx \rightarrow f'(x) = ۱ - tgh^۲x \\ f(x) = tghu \rightarrow f'(x) = u'(۱ - tg^۲hu) \end{cases}$$

$$\overset{\text{مثال}}{\Rightarrow} y = tgh۳x \rightarrow y' = ۳(۱ - tg^۲h۳x)$$

$$\begin{cases} f(x) = cotghx \rightarrow f'(x) = ۱ - cotgh^۲x \\ f(x) = cotghu \rightarrow f'(x) = u'(۱ - cotgh^۲u) \end{cases}$$

$$\overset{\text{مثال}}{\Rightarrow} y = cotghx^۳ \rightarrow y' = ۳x^۲(۱ - cotgh^۲x^۳)$$

نکته: یک فرمول مهم در حل تستها:

$$f(x) = \frac{k}{(x-a)^n} \rightarrow f'(x) = \frac{-kn}{(x-a)^{n+۱}} \quad K \in \overset{\text{اعداد حقیقی}}{\overset{\uparrow}{\overbrace{R}}} \quad , \quad n \in \overset{\text{اعداد طبیعی}}{\overset{\uparrow}{\overbrace{N}}}$$

تست ۹) مشتق عبارت $y = \frac{۱}{(x-۲)^۳}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{(x-۲)^۴}$ ۲) $\frac{-۳}{(x-۲)^۴}$ ۳) $\frac{۲}{(x-۲)^۳}$ ۴) $\frac{-۲}{(x-۲)^۳}$

حل نکته ای :

$$y = \frac{\overset{k}{\overbrace{۱}}}{(x-۲)^{\overset{n}{\overbrace{۳}}}} \rightarrow y' = \frac{-۱ \times ۳}{(x-۲)^{۳+۱}} = \frac{-۳}{(x-۲)^۴}$$

گزینه ۲ صحیح است.

مشتق تابع نسبت به تابع:

برای بدست آوردن مشتق تابع $u = f(x)$ نسبت به تابع $v = g(x)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$\frac{du}{dv} = \frac{df}{dg} = \frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dx}} = \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{u'}{v'}$$

تست ۴۹) نسبت تغییر $(x^۲ - \sqrt{x})$ بر تغییر $(x - \frac{۱}{x})$ در لحظه $x = ۱$ کدام است؟

(مدیریت و حسابداری سراسری ۸۹)

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

حل) توجه: منظور از نسبت تغییرات، بدست آوردن **مشتق** دو معادله است که مشتق اولی را در صورت و دیگری را در مخرج قرار می دهیم، یعنی :

$$\text{نسبت تغییرات} = \frac{(x^۲ - \sqrt{x})'}{(x - \frac{۱}{x})'} = \frac{۲x - \frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{(۱ - \frac{-۱}{x^۲})} = \frac{(۲x - \frac{۱}{۲\sqrt{x}})}{(۱ + \frac{۱}{x^۲})} \xRightarrow{(x=۱)} \frac{(۲(۱) - \frac{۱}{۲})}{(۱ + \frac{۱}{۱})} = \frac{\frac{۳}{۲}}{۲} = \frac{۳}{۴}$$

گزینه ۳ صحیح است.

تست ۵۰) نسبت تغییرات $(x^۳ - x^۲ + x)$ نسبت به تغییرات $(x^۲ - x)$ در لحظه $x = -۱$ کدام است؟[۱]

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۳

$$\frac{df}{dg} = \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{(x^۳ - x^۲ + x)'}{(x^۲ - x)'} = \frac{۳x^۲ - ۲x + ۱}{۲x - ۱}$$

$$\Big|_{x = -۱} \frac{۳(-۱)^۲ - ۲(-۱) + ۱}{۲(-۱) - ۱} = \frac{۳ + ۲ + ۱}{-۲ - ۱} = \frac{۶}{-۳} = -۲$$

گزینه ۲ صحیح است.

---

[۱] پوران پژوهش- صفحه ۱۹۸- تست ۱۱۹

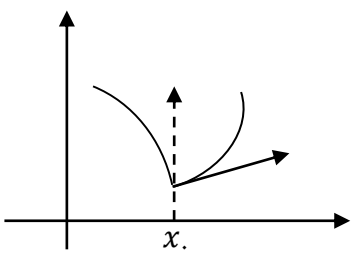
$$f(x) = x + sinx$$
$$f'(x) = ۱ + cosx \;\rightarrow\; f'(۰) = ۱ + cos۰ = ۱ + ۱ = ۲ \;\rightarrow\; m' = -۲$$
$$y - y_۰ = m(x - x_۰) \;\rightarrow\; y - ۰ = -۲(x - ۰) \;\rightarrow\; y + ۲x = ۰$$

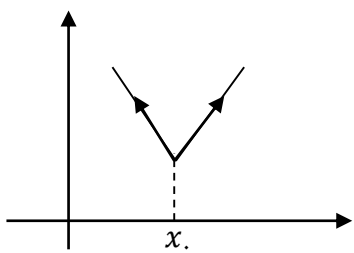
گزینه ۱ صحیح است.

نقاطی که تابع در آن ها مشتق پذیر نیست:

۱) نقاط زاویه دار منحنی: نقاطی که مشتق چپ و راست در آنها برابر نباشد و حداقل یکی از آن ها محدود باشد، در این نقاط منحنی دارای نیم مماس چپ و راست می باشد در واقع منحنی دارای مماس کامل نیست، یعنی نقطه $x_۰$ نقطه زاویه دار است اگر:

$$\begin{cases} f'_+(x_۰) = k \\ f'_-(x_۰) = L \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} f'_+(x_۰) = \infty \\ f'_-(x_۰) = L \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} f'_+(x_۰) = k \\ f'_-(x_۰) = \infty \end{cases}$$





مثال ۲۰) مشتق پذیری تابع $f(x) = |x|$ را در نقطه $x = ۰$ بررسی کنید.

حل) تابع در $x = ۰$ پیوسته و $f(۰) = ۰$ می باشد، یعنی:

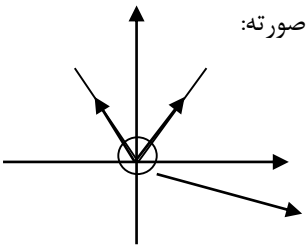
$$|x| = \begin{cases} x & x \geq ۰ \\ -x & x < ۰ \end{cases} \;\rightarrow\; \begin{cases} x \rightarrow ۰^+ = f(۰) = ۰ \\ x \rightarrow ۰^- = ۰ \end{cases}$$

حال بررسی مشتق پذیری با استفاده از تعریف مشتق:

$$f'(۰^+) = \lim_{x \to ۰^+} \frac{f(x) - f(۰)}{x - ۰} = \lim_{x \to ۰^+} \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = \boxed{۱}$$
$$f'(۰^-) = \lim_{x \to ۰^-} \frac{f(x) - f(۰)}{x - ۰} = \lim_{x \to ۰^-} \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = \boxed{-۱}$$

چون $f'(۰^-), f'(۰^+)$ وجود دارند، ولی با هم مساوی نیستند (مشتق راست $\neq$ مشتق چپ)

پس مبدأ مختصات، یک نقطه زاویه دار است که نمودارش به این صورته:



$x = ۰$ نقطه زاویه دار می باشد.

نکته ۱: ریشه های ساده عبارات درون قدرمطلق، طول نقاط زاویه دار منحنی هستند.

یادآوری: ریشه ساده یعنی این که عامل، **درجه یک** باشد، مثلا: $x - a = ۰ \rightarrow \boldsymbol{x = a}$

تست ۶۳) تعداد نقاط مشتق ناپذیری تابع $f(x) = |\,|x| - ۱\,|$ بر روی R کدام است؟

(سراسری ریاضی ۸۵)

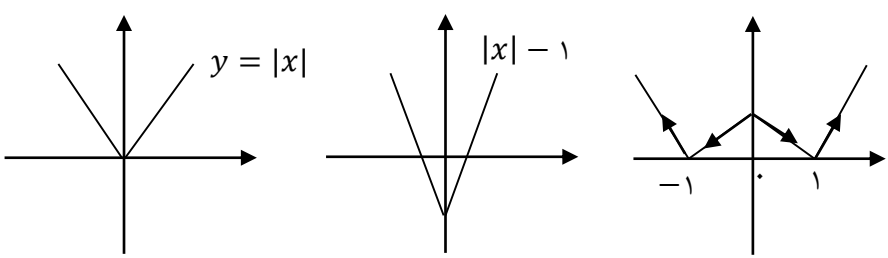
۱)صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

راه اول) ریشه های ساده قدر مطلق ها، مشتق ناپذیرند، پس: $|x| = ۰ \rightarrow \boxed{x = ۰}$

$|x| - ۱ = ۰ \rightarrow |x| = ۱ \rightarrow \boxed{x = \pm ۱}$

چون ۳ ریشه ساده داشتیم، پس جمعاً ۳ نقطه ی مشتق ناپذیر وجود دارد.

راه دوم) رسم شکل :



با نگاه به شکل، هم کاملاً مشخصه که سه نقطه زاویه‌ای داریم: پس سه نقطه مشتق ناپذیر داریم.

گزینه ۴ صحیح است.

توابع قدر مطلق، به ازای ریشه های **ساده** داخل قدر مطلق، مشتق پذیر نیستند.

$$f(x) = |x^{۲} - ۱| \to x^{۲} - ۱ = ۰ \to (x-۱)(x+۱) = ۰ \begin{cases} x = ۱ \text{ ریشه ساده} \\ x = -۱ \text{ ریشه ساده} \end{cases}$$

$\boxed{D_{f'} = R - \{\pm ۱\}}$

گزینه ۴ صحیح است.

تست ۶۷) دامنه‌ی مشتق تابع $f(x) = x[x]$ کدام است؟

۱) Z ۲) R ۳) $R - Z$ ۴) $(R - Z) \cup \{۰\}$

حل)

$$[x]' = \begin{cases} ۰ & x \notin Z \\ \text{وجود ندارد} & x \in Z \end{cases}$$

$f'(۰)$ را جداگانه بررسی می کنیم:

$$f'(۰) = \lim_{x \to ۰} \frac{x[x] - ۰}{x - ۰} \to \begin{cases} f'_{+}(۰) = ۰ \\ f'_{-}(۰) = -۱ \end{cases}$$

مشتق چپ $\neq$ مشتق راست، پس f در $x = ۰$ مشتق ندارد و در سایر نقاط $x. \in Z$ نیز مشتق وجود ندارد. بنابراین: $\boxed{D_{f'} = R - Z}$

گزینه ۳ صحیح است.

مشتق عامل صفرکننده (روش ضعیف کشی):

اگر تابعی، حاصلضرب چند عبارت مشتق پذیر باشد، به طوری که یکی از این عبارات به ازای $x = a$ صفر شود (عامل صفر شونده) و بخواهیم مشتق تابع را در نقطه $x = a$ بدست آوریم کافیست از عامل صفر شونده، مشتق گرفته و به جای هر چه x داریم، a قرار دهیم:

فرمول عامل صفر کننده:

بقیه عبارت در آن نقطه × مشتق عامل صفر کننده

تست ۶۸) مشتق مرتبه دوم تابع $y=(2x-1)^2(4x^2+7)^{\frac{1}{3}}$ در نقطه $x=\frac{1}{2}$ کدام است؟

(مدیریت و حسابداری سراسری ۹۱)

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۴ ۴) ۸

حل حرفه ای:

$$y=\underbrace{(2x-1)^2}_{\text{عامل صفر کننده}}\ \underbrace{(4x^2+7)^{\frac{1}{3}}}_{\text{بقیه عبارت}}$$

کافیست از عامل صفرکننده ۲ بار مشتق می گیریم سپس نقطه $x=\frac{1}{2}$ را در بقیه عبارت قرار دهیم بنابراین:

$$y=(2x-1)^2$$

$$y'=2\times 2(2x-1)^1=4(2x-1)=8x-8$$

$$y''=8$$

$$y''\Big|_{x=\frac{1}{2}}\ 8\times(4(\frac{1}{2})^2+7)^{\frac{1}{3}}=8\times(1+7)^{\frac{1}{3}}=8\times\sqrt[3]{8}=8\times 2=16$$

گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۳۰) اگر $f(x)=\frac{sinx-cosx}{(1+sin^2x)^4}$ آن گاه $f'(\frac{\pi}{4})$ را محاسبه کنید.

حل) عبارت را به شکل زیر می نویسیم:

$$f(x)=\underbrace{(sinx-cosx)}_{\text{عامل صفر کننده}}\times\underbrace{\frac{1}{(1+sin^2x)^4}}_{\text{بقیه عبارت}}$$

$$f'(x)=\underbrace{(cosx+sinx)}_{\text{عامل صفر کننده که مشتقش گرفته شد}}\times\frac{1}{(1+sin^2x)^4}$$

$$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}} f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2})\times\frac{1}{(1+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2)^4}=(\frac{2\sqrt{2}}{2})\times\frac{1}{(1+\frac{1}{2})^4}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\times\frac{1}{(\frac{3}{2})^4}=\sqrt{2}\times\frac{1}{\frac{81}{16}}=\sqrt{2}\times\frac{16}{81}=\frac{16\sqrt{2}}{81}$$

تست های کنکور کارشناسی ارشد

مشتق

رشته های مدیریت و حسابداری و اقتصاد

(سراسری از ۷۴ تا ۹۱)

(آزاد از ۷۴ تا ۸۹)

حل تست های کنکور کارشناسی ارشد

مشتق

رشته های مدیریت و حسابداری

(سراسری از ۷۴ تا ۹۱)

(آزاد از ۷۴ تا ۸۹)

حل تکنیکی : یادآوری : $y = f(u) \quad \rightarrow \quad y' = u' \times f'(u)$

چون در سوال $f'(۰)$خواسته شده پس در قسمت اول سوال که گفته شده $f(x^۲ - ۱) = ۶x^۲ + ۱$ سعی کنید سمت چپ معادله یعنی $f(x^۲ - ۱)$ را به صورت f' در آوریم که می توان از دو طرف تساوی مشتق گرفت یعنی:

$$f\overbrace{(x^۲ - ۱)}^{u} = ۶x^۲ + ۱ \xrightarrow{\text{مشتق گیری از طرفین تساوی}} ۲x \times f'(x^۲ - ۱) = ۱۲x + ۰$$

$$f'(x^۲ - ۱) = \frac{۱۲x}{۲x} \quad \rightarrow \quad f'(x^۲ - ۱) = ۶$$

حال در سوال $f'(۰)$ خواسته شده که از تکنیک پرانتزها با مولفه هم نام استفاده می کنیم یعنی:

$$f'(۰) = f'(x^۲ - ۱) \quad \rightarrow \quad x^۲ - ۱ = ۰ \quad \rightarrow \quad x^۲ = ۱ \quad \rightarrow \quad \boxed{x = \pm ۱}$$

حال این اعداد را در عبارت باقیمانده قرار می دهیم که دقت کنید ۶ دارای x می باشد ولی با توان صفر یعنی:

$$۶x^{۰} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = ۱ \rightarrow ۶(۱)^{۰} = ۶ \\ x = -۱ \rightarrow ۶(-۱)^{۰} = ۶ \end{cases}$$

---

۲۴۶. گزینه ۴ صحیح است .

$$f(۱ - x^۲) = ۳ + ۲x^۴ \quad \rightarrow \quad f(۱ - x^۲) - ۳ - ۲x^۴ = ۰$$

$$(۱ - x^۲)' f'(۱ - x^۲) - ۸x^۳ = ۰ \quad \rightarrow \quad -۲x f'(۱ - x^۲) - ۸x^۳ = ۰$$

$$۱ - x^۲ = ۰ \rightarrow ۱ = x^۲ \rightarrow x = \pm ۱ \rightarrow \begin{cases} x = ۱ \rightarrow -۲f'(۰) - ۸ = ۰ \rightarrow f'(۰) = -۴ \\ x = -۱ \rightarrow ۲f'(۰) + ۸ = ۰ \rightarrow f'(۰) = -۴ \end{cases}$$

حل تکنیکی : یادآوری : $y = f(u) \quad \rightarrow \quad y' = u' x f'(u)$

چون در سوال $f'(۰)$ خواسته شده پس در قسمت اول $\overbrace{f(۱ - x^۲)} = ۳ + ۲x^۴$ سعی کنید $f(۱ - x^۲)$ را به صورت f' در آورید که می توان برای انجام این عمل از دوطرف تساوی مشتق گرفت یعنی :

$$f(۱-x^۲)=۳+۲x^۴ \xrightarrow{\text{مشتق گیری از طرفین تساوی}} -۲xf'(۱-x^۲)=۰+۸x^۳$$

$$f'(۱-x^۲)=\frac{۸x^۳}{-۲x} \quad \rightarrow \quad f'(۱-x^۲)=-۴x^۲$$

حال $f'(۰)$ را با استفاده از تکنیک پرانتزها بدست می آوریم یعنی برابر قراردادن پرانتزهای هم نام: $f'(\quad)=f'(\quad)$

$$f'(۰)=f'(۱-x^۲) \rightarrow ۱-x^۲=۰ \rightarrow x^۲=۱ \rightarrow x \pm ۱$$

قراردادن در معادله باقیمانده یعنی $-۴x^۲$: $\begin{cases} x=۱ \rightarrow -۴(۱)^۲=-۴ \\ x=-۱=-۴(-۱)^۲=-۴ \end{cases}$

---

۲۴۷. گزینه ۱ صحیح است.

یادآوری:

$$\begin{cases} y=lnx \quad \longrightarrow \quad y'=\frac{۱}{x} \\ y=u\times v \quad \longrightarrow \quad u'v+v'u \\ y=\frac{u}{v} \quad \rightarrow \quad y'=\frac{u'v-v'u}{v^۲} \end{cases}$$

$$y=۱+\frac{۱}{۶}x^۳lnx \quad \rightarrow \quad y^{(۱)}=۰+\frac{۱}{۶}۳x^۲lnx+\frac{۱}{۶}x^۲=\frac{۱}{۲}x^۲lnx+\frac{۱}{۶}x^۲$$

$$y^{(۲)}=xlnx+\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۳}x$$

$$y^{(۳)}=۱\times lnx+\frac{۱}{x}\times x+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}=lnx+۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}$$

$$y^{(۴)}=\frac{۱}{x}+۰+۰+۰=\frac{۱}{x} \quad \rightarrow \quad y^{(۵)}=\frac{۰-۱}{x^۲}=\frac{-۱}{x^۲}$$

---

۲۴۸. گزینه ۳ صحیح است.

$$y^{(۱۰)}=\sum_{i=۰}^{۱۰}\binom{۱۰}{i}(x)^i(e^{۲x})^{(۱۰-i)}$$

$$= \binom{۱۰}{۰}(x)^{(۰)}(e^{۲x})^{(۱۰)} + \binom{۱۰}{۱}(x)^{۱}(e^{۲x})^{(۹)} + \binom{۱۰}{۲}(x)^{(۲)}(e^{۲x})^{(۸)} + \cdots$$

$$= x(۲^{۱۰}e^{۲x}) + ۱۰(۱)(۲^{۹}e^{۲x}) + ۰ + \cdots$$

$$y^{(۱۰)}\Big|_{x=۱} = ۲^{۱۰}e^{۲} + ۱۰(۲^{۹}e^{۲}) = ۲^{۹}e^{۲}(۲+۱۰) = ۱۲ \times ۲^{۹}e^{۲} = ۶ \times (۲)^{۱۰}e^{۲}$$

---

۲۴۹. گزینه ۱ صحیح است. راه اول :

$$y = xlnx \to y^{(۱)} = ۱ \times lnx + \frac{۱}{x} \times x = lnx + ۱ \;\to\; y^{(۲)} = \frac{۱}{x} + ۰ = \frac{۱}{x}$$

$$y^{(۳)} = \frac{۰-۱}{x^{۲}} = \frac{-۱}{x^{۲}} \;\to \cdots \;\to\; y^{(۱۰)} = \frac{۸!}{x^{۹}} \overset{x=۱}{\Longrightarrow} = \frac{۸!}{۱^{۹}} = ۸!$$

راه دوم :

$$y = xlnx \to y^{(۱)} = ۱ \times lnx + \frac{۱}{x} \times x = lnx + ۱ \to y^{(۲)} = \frac{۱}{x} + ۰ = \frac{۱}{x} = x^{-۱}$$

$$y^{(۳)} = -x^{-۲} \to y^{(۴)} = ۲x^{-۳} \to \cdots \to y^{(n)} = (-۱)^{n}(n-۲)!\,x^{-(n-۱)}$$

$$y^{(۱۰)} = (-۱)^{۱۰}(۱۰-۲)!\,x^{-(۱۰-۱)} = ۱ \times ۸!\,x^{-۹} \to y^{(۱۰)} = \frac{۸!}{x^{۹}} \overset{x=۱}{\Longrightarrow} = \frac{۸!}{۱^{۹}} = ۸!$$

---

۲۵۰. گزینه ۲ صحیح است.

$$Q_{۰} = Ak^{\alpha}l^{\beta} \;\to\; k^{\alpha} = \frac{Q_{۰}}{Al^{\beta}} \;\to\; k^{\alpha} = Q_{۰}.A^{-۱}l^{-B} \;\to\; k = \sqrt[\alpha]{Q_{۰}A^{-۱}l^{-B}}$$

$$k = (Q_{۰}A^{-۱})^{\frac{۱}{\alpha}}l^{-\frac{\beta}{\alpha}} \;\to\; \frac{dk}{dl} = -\frac{\beta}{\alpha}(Q_{۰}A^{-۱})^{\frac{۱}{\alpha}}\,l^{-\frac{\beta}{\alpha}-۱}$$

$$\frac{d^{۲}k}{dl^{۲}} = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha}+۱\right)(Q_{۰}A^{-۱})^{\frac{۱}{\alpha}}\,l^{\frac{-\beta}{\alpha}-۲}$$

واضح است که مشتق اول منفی و مشتق دوم مثبت است

۲۵۱. گزینه ۱ صحیح است.

$$x = t + \frac{۲}{t} \overset{x=۳}{\Longrightarrow} ۳ = t + \frac{۲}{t} \rightarrow t = ۱$$

$$y_x{}' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{۲t+۴}{۱-\frac{۲}{t^۲}} \overset{t=۱}{\Longrightarrow} \frac{۲(۱)+۴}{۱-\frac{۲}{۱^۲}} = \frac{۶}{۱-۲} = -۶$$

---

۲۵۲. گزینه ۲ صحیح است . راه اول :

$$y = sin۲x \rightarrow y^{(۱)} = ۲cos۲x \rightarrow y^{(۲)} = -۲^۲ sin۲x$$

$$y^{(۳)} = -۲^۳ cos۲x \rightarrow \cdots \rightarrow y^{(۱۰)} = -۲^{۱۰} sin۲x \overset{x=\frac{\pi}{۴}}{\Longrightarrow} -۲^{۱۰} \underbrace{sin\frac{\pi}{۲}}_{۱} = -۲^{۱۰}$$

راه دوم :

$$y = sinax \rightarrow y^{(n)} = a^n sin(ax + \frac{n\pi}{۲})$$

$$y = sin۲x \rightarrow y^{(۱۰)} = ۲^{۱۰} sin\left(۲x + \frac{۱۰\pi}{۲}\right)\Bigg|_{x=\frac{\pi}{۴}} = ۲^{۱۰} sin\left(۲\left(\frac{\pi}{۴}\right) + ۵\pi\right)$$

$$y^{(۱۰)} = ۲^{۱۰} sin\left(\frac{\pi}{۲} + ۵\pi\right) = -۲^{۱۰}$$