ریاضیات DLM

آموزش سه‌بعدی مفاهیم

حد، پیوستگی، مجانب‌ها

طراح، مؤلف و گردآورنده:

امین بنیادگذار

ویراستار علمی:

حسین خدامی

عنوان **صفحه**

آموزش کلاسیک حد و پیوستگی

مفهوم مِیل کردن ۹

مفهوم حد ۱۰

تعریف حد ۱۱

بررسی هندسی تعریف حد ۱۲

برخی از حالت های معمول در محاسبه حد توابع کسری ۱۳

حد راست و حد چپ ۱۵

حد تابع در یک نقطه ۱۶

روش های محاسبه ی حد ها ۱۸

حد توابع چند ضابطه ای ۲۰

حد تابع علامت ۲۲

حد توابع جزء صحیح ۲۳

حد بی نهایت ۲۸

حد در بی نهایت ۳۳

حد عبارت کسری ۳۵

توابع کسری شامل قدر مطلق ۳۶

قضیه فشردگی (ساندویچ) ۳۷

حد توابع رادیکالی ۴۰

حد توابع کسری مثلثاتی..... ۴۴

توابع هم ارز..... ۴۸

۳شرط در استفاده از هم ارزی های مثلثاتی..... ۴۹

صورت های مبهم..... ۵۶

الف) رفع ابهام $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$..... ۵۶

مشتق عبارت های جبری..... ۵۷

مشتق توابع مثلثاتی..... ۵۷

مشتق توابع معکوس مثلثاتی..... ۵۸

مشتق توابع نمایی و لگاریتمی..... ۵۹

مشتق توابع هذلولی..... ۵۹

مشتق تابع $f(x) = u^v$..... ۵۹

مشتق تابع قدر مطلق..... ۶۰

ب) رفع ابهام $0 \times \infty$..... ۶۳

حالت (عدد محدود) $\times 0$..... ۶۵

ج) رفع ابهام حالت $\infty - \infty$..... ۶۵

د) رفع ابهام صورتهای مبهم 1^{∞} یا ∞^{0} یا 0^{0}..... ۶۹

۱) حالت مبهم (0^{0})..... ۶۹

۲)حالت مبهم (∞^{0})..... ۷۰

۳) حالت مبهم (1^{∞})..... ۷۰

راه حل دیگر برای رفع ابهام 1^{∞} یا ∞^{0} یا 0^{0} ۷۲
بررسی عدم وجود حد ۷۳
پیوستگی تابع در یک نقطه..... ۷۴
پیوستگی چپ یا راست ۷۵
ناپیوستگی رفع شدنی ۷۷
ناپیوستگی رفع نشدنی (جهشی) ۷۹
مسائل پیوستگی چپ و راست..... ۸۰
مطالبی درباره ی پیوستگی..... ۸۱
پیوستگی در یک بازه ۹۰
پیوستگی تابع معکوس ۹۳
مجانب..... ۹۴
خط مجانب..... ۹۴
مجانب قائم..... ۹۵
مجانب افقی ۱۰۰
نکات مهم مجانب افقی..... ۱۰۱
مجانب مایل..... ۱۰۵
روش تقسیم ۱۰۶
روش هم ارزی نیوتون..... ۱۰۷
روش حد (روش h و m) ۱۰۹

آموزش تکنیکی حد و پیوستگی

تعریف حد و تکنیک حل آن در مسائل ۱۱۴

تعریف حد تابع ۱۱۷

پیوستگی راست ۱۱۸

پیوستگی چپ ۱۱۸

تعریف پیوستگی ۱۱۹

تست های تعریف حد تابع ۱۲۰

تکنیک حل مسائل حد در بی نهایت $(x \to \pm\infty)$ ۱۲۱

انواع مسائل حد ۱۲۳

I) حدهای جای گذاری ۱۲۳

II) حد شبه مبهم ۱۲۳

حدهای اعداد صحیح داخل براکت ۱۲۵

حد چند جمله ای ها در صفر ۱۲۵

حد چند جمله‌ای در بی نهایت ۱۲۵

اگر مخرج کسر، صفر حدی (ε) باشد ۱۲۶

حد توابع نمایی در بی نهایت ۱۲۷

حد $sinx$ در بی نهایت ۱۲۸

حد $cosx$ در بی نهایت ۱۲۸

سرعت رشد در توابع مختلف ۱۲۹

حالات مبهم..... ۱۳۱

الف) حالت مبهم $(\frac{0}{0})$..... ۱۳۱

۳ روش رفع ابهام $\frac{0}{0}$ در توابع کسری ۱۳۱

روش اول (روش ایجاد عامل صفر کننده)..... ۱۳۱

روش دوم (روش هوپیتال)..... ۱۳۲

روش سوم (هم ارزی مثلثاتی)..... ۱۳۳

تعریف دو تابع هم ارز..... ۱۳۳

دو شرط برای استفاده از هم ارزی های مثلثاتی..... ۱۳۵

ب) حالت مبهم $(\frac{\infty}{\infty})$..... ۱۳۶

ج) حالت مبهم $(0 \times \infty)$..... ۱۳۷

د) حالت مبهم $(\infty - \infty)$..... ۱۳۸

حالات مبهم نمایی ۱۳۸

سوالات آزمون کارشناسی ارشد رشته های مدیریت ، حسابداری و اقتصاد

سوالات آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته مدیریت ۱۴۰

سوالات آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی رشته مدیریت..... ۱۴۴

سوالات آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته حسابداری..... ۱۶۰

سوالات آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی رشته حسابداری..... ۱۶۲

سوالات آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته اقتصاد..... ۱۶۸

سوالات آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی رشته اقتصاد..... ۱۷۱

حل سوالات آزمون کارشناسی ارشد رشته های مدیریت و حسابداری و اقتصاد

پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته مدیریت..... ۱۷۶

پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد رشته مدیریت ۱۹۹

پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته حسابداری ۲۳۸

پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد رشته حسابداری..... ۲۴۶

پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته اقتصاد ۲۶۳

پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد رشته اقتصاد..... ۲۷۶

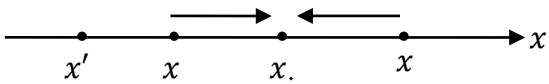
مفهوم مِیل کردن:

زمانی که گفته می شود متغیر x به عدد ثابت $x_{\circ}$ میل می کند، منظور این است که x به عدد $x_{\circ}$ **بسیار نزدیک می شود** و می نویسند: $x \to x_{\circ}$ ولی باید حواسمون باشه که دراین‌حالت، اگرچه x خیلی به $x_{\circ}$ نزدیک میشه، ولی باهاش برابر نمیشه، یعنی $x \neq x_{\circ}$

پس: $x - x_{\circ} \neq \circ$

باید دقت داشت زمانی که گفته می شود [x به سمت $x_{\circ}$ میل می کند] به این معنی است که x هم از طرف راست به $x_{\circ}$ نزدیک میشه ($x \to x_{\circ}^{+}$) و هم از طرف چپ ($x \to x_{\circ}^{-}$)، یعنی:

$$x \to x_{\circ} \underbrace{\equiv}_{\text{یعنی}} (x \to x_{\circ}^{+} \quad , \quad x \to x_{\circ}^{-})$$



$x \to x_{\circ}^{+}$: یعنی x از طرف مقادیر **بزرگتر** از $x_{\circ}$ به $x_{\circ}$ نزدیک می شود (فِلِش راست به چپ در شکل بالا)، یعنی همیشه: $x - x_{\circ} > \circ$ چون همیشه مقدار x بزرگتر از مقدار $x_{\circ}$ است.

$x \to x_{\circ}^{-}$: یعنی آن که x از طرف مقادیر **کوچکتر** از $x_{\circ}$ به $x_{\circ}$ نزدیک می شود (فِلِش چپ به راست در شکل بالا)، یعنی همیشه $x - x_{\circ} < \circ$ چون همیشه x کمتر از $x_{\circ}$ است.

تذکر مهم ۱ : زمانی که متغیر x از هر عددِ بسیار بزرگِ مثبتی، بزرگتر باشد، گفته می شود که x به سمت مثبت بی‌نهایت میل کرده است که آن را به صورت $x \to +\infty$ نشان می دهند.

تذکر مهم ۲ : زمانی که متغیر x از هر عدد منفی بسیار کوچکی، کوچک تر باشد، گفته می شود x به سمت منفی بی‌نهایت میل کرده که آن را به صورت $x \to -\infty$ نشان می دهند.

مفهوم حد:

در ضابطه‌ی $y = f(x)$ لازم است بدانیم که وقتی متغیر x به عدد مشخصی، مثلاً x. میل می کند، $f(x)$ چه تغییری می کند؟ به عبارت دیگر آیا مقدارهای $f(x)$ یا y به عدد معینی میل می کند یا نه؟ به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۱) تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = x + ۱$ مفروض است. می‌خواهیم بدانیم وقتی متغیر x به سمت عدد ۲ میل می کند، $f(x)$ چه تغییری می کند؟

می دانیم متغیر x هم با مقادیر بزرگ تر از ۲ و هم با مقادیر کوچک تر از ۲ به سمت عدد ۲ نزدیک می شود (مطابق جدول زیر):

x	$... \to ۱/۹۹ \to ۱/۹۹۹ \to \cdots \to ۲ \leftarrow \cdots \leftarrow ۲/۰۰۱ \leftarrow ۲/۰۱ \leftarrow \cdots$
$f(x)$	$... \to ۲/۹۹ \to ۲/۹۹۹ \to \cdots \to ۳ \leftarrow \cdots \leftarrow ۳/۰۰۱ \leftarrow ۳/۰۱ \leftarrow \cdots$

مشاهده می‌شود وقتی x از سمت راست به $x = ۲$ میل می‌کند: $x \to ۲^+$ ، آنگاه مقدار $f(x)$ به سمت ۳ میل می‌کند $(۳ \leftarrow \cdots \leftarrow ۳/۰۰۱ \leftarrow ۳/۰۱)$ و وقتی x از سمت چپ به $x = ۲$ میل می‌کند: $x \to ۲^-$ ، آنگاه مقدار $f(x)$ باز هم به سمت ۳ میل می‌کند:

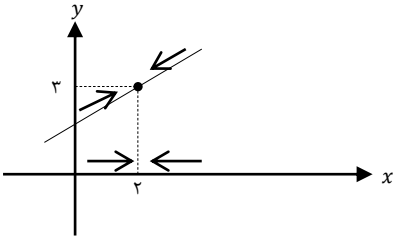
$(۳ \leftarrow \cdots \leftarrow ۳/۰۰۱ \leftarrow ۳/۰۱)$

پس می توان گفت که در تابع $f(x) = x + ۱$ وقتی x به سمت عدد۲ میل کند، چه از سمت راست و چه از سمت چپ $(x \to ۲)$ ، آنگاه $f(x)$ به سمت عدد۳ میل می‌کند$(f(x) \to ۳)$

این‌مطلب‌را این گونه می نویسند: $\lim_{x\to ۲} f(x) = \lim_{x\to ۲} (x + ۱) = ۳$

حال توضیح این حد از روی شکل بدین گونه است.

ابتدا $f(x) = x + ۱$ را رسم می کنیم و سپس آن را در نقطه $x = ۲$ بررسی می کنیم.



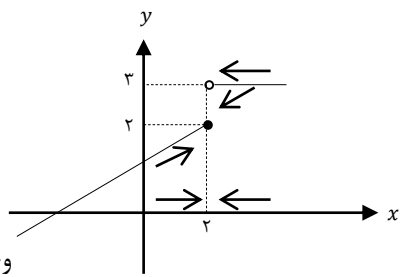
حد تابع در یک نقطه:

هرگاه حد چپ و حد راست تابع $f(x)$ در نقطه $x_.$ موجود و با هم برابر باشند، می‌گوییم تابع $f(x)$ در نقطه $x_.$ دارای حد است و آن را به صورت زیر نشان می دهیم:

$$\underbrace{\lim_{x\to x_.^-} f(x)}_{\text{حد چپ}} = \underbrace{\lim_{x\to x_.^+} f(x)}_{\text{حد راست}} = \lim_{x\to x_.} f(x) = L$$

تذکر مهم: اگر حد چپ و حد راست یک تابع در یک نقطه متفاوت باشند، آن تابع در آن نقطه حد ندارد.

مثال ۴)

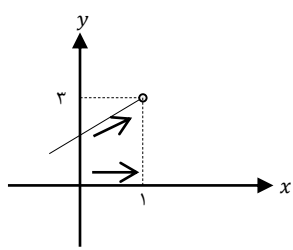


$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = ۳$

$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = ۲$

$۳ \neq ۲ \to \lim_{x\to ۱} f(x) =$ وجود ندارد

تذکر مهم: اگر تابع در سمت راست نقطه ای تعریف نشده باشد، آن گاه تابع در آن نقطه حد راست ندارد، به طور مشابه، اگر تابع در سمت چپ نقطه ای تعریف نشده باشد، آن گاه تابع در آن نقطه حد چپ ندارد.



$\lim_{x\to ۱^+} f(x) =$ وجود ندارد

$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = ۳$

$\lim_{x\to ۱} f(x) =$ وجود ندارد

مثال ۵) حاصل حدهای زیر را بدست آورید؟

۱) $\lim_{x\to ۱} \frac{x^۲-۱}{۲x}$

۲) $\lim_{x\to ۲^-} \frac{[x]-۱}{x-۲}$

۳) $\lim_{x\to ۰^-} \frac{x}{[x]}$

۴) $\lim_{x\to ۰^+} \frac{x}{[x]}$

حل)

$$۱)\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۲}-۱}{۲x}=\frac{۱-۱}{۲(۱)}=\frac{۰}{۲}=۰$$

$$۲)\lim_{x\to ۲^{-}}\frac{[x]-۱}{x-۲}=\frac{[۲^{-}]-۱}{۲^{-}-۲}=\frac{۱-۱}{۰^{-}}=\frac{\overbrace{۰}^{\text{صفر واقعی}}}{\underbrace{۰^{-}}_{\text{صفر حدی}}}=۰$$

توضیح: عدد ۲^{-} یعنی از سمت **<u>چپ</u>** به ۲ نزدیک بشیم، یعنی اعداد کمتر از ۲ که خیلی به ۲ نزدیک‌اند، مثل ۱/۹۹، درنتیجه حاصل جزء صحیحِ ۲^{-} مثل اینه که بخواهیم حاصل جزء صحیح ۱/۹۹رو حساب کنیم که میشه ۱: $[۲^{-}]=[۱/۹۹]=۱$

$$۳)\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{x}{[x]}=\frac{۰^{-}}{[۰^{-}]}=\frac{\overbrace{۰}^{\text{صفر حدی}}}{\underbrace{-۱}_{\text{عدد}}}=۰$$

توضیح: عدد ۰^{-} یعنی از سمت **<u>چپ</u>** به صفر نزدیک بشیم، یعنی اعداد کمتر از صفر که خیلی به صفر نزدیک‌اند، مثل ۰/۹۹- ، درنتیجه حاصل جزء صحیحِ ۰^{-} مثل اینه که بخواهیم حاصل جزء صحیح ۰/۹۹- رو حساب کنیم که میشه ۱- : $[۰^{-}]=[-۰/۹۹]=-۱$

$$۴)\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{x}{[x]}=\frac{۰^{+}}{[۰^{+}]}=\frac{۰^{+}}{۰}=\text{تعریف نشده}$$

توضیح: عدد ۰^{+} یعنی از سمت **<u>راست</u>** به صفر نزدیک بشیم، یعنی اعداد بیشتر از صفر که خیلی به صفر نزدیک‌اند، مثل ۰/۹۹ ، درنتیجه حاصل جزء صحیحِ ۰^{+} مثل اینه که بخواهیم حاصل جزء صحیح ۰/۹۹ رو حساب کنیم که میشه ۱- : $[۰^{+}]=[+۰/۹۹]=۰$

تست ۱۶) حاصل حد عبارت $\frac{\sqrt{tgx-x}}{tgx\sqrt{x}}$ وقتی $x \to ۰^+$ چقدر است؟ (مدیریت مالی آزاد ۸۷)

حل) استفاده از هم ارزی:

$$\begin{cases} tgx-x \underset{x\to ۰}{\sim} \frac{x^۳}{۳} \\ tgx\sqrt{x} \underset{x\to ۰}{\sim} x\sqrt{x} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to ۰^+} \frac{\sqrt{tgx-x}}{tgx\sqrt{x}} \sim \lim_{x\to ۰^+} \frac{\sqrt{\frac{x^۳}{۳}}}{x\sqrt{x}} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{\sqrt{\frac{x^۲x}{۳}}}{x\sqrt{x}} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{\frac{\sqrt{x^۲x}}{\sqrt{۳}}}{x\sqrt{x}} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{\frac{\cancel{x\sqrt{x}}}{\sqrt{۳}}}{\cancel{x\sqrt{x}}}$$

$$= \frac{۱}{\sqrt{۳}} \xRightarrow{\text{گویا می‌کنیم}} \frac{۱}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

تست ۱۷) حاصل $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{۱^۲+۲^۲+۳^۲+\cdots+n^۲}{n^۳}\right)^۲$ کدام است؟ (اقتصاد سراسری ۸۸)

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) ۴ ۴) ۹

حل) استفاده از هم ارزی:

$$\boxed{۱^p + ۲^p + ۳^p + \cdots + n^p \sim \frac{n^{p+۱}}{p+۱}}$$

$$۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \cdots + n^۲ \sim \frac{n^{۲+۱}}{۲+۱} \sim \frac{n^۳}{۳}$$

$$\lim \left(\frac{\frac{\cancel{n^۳}}{۳}}{\cancel{n^۳}}\right)^۲ = \left(\frac{۱}{۳}\right)^۲ = \frac{۱}{۹}$$

گزینه ۳ صحیح است.

تست ۱۸) حاصل $\lim_{x\to ۰} \frac{tan^۶x}{sin^۵x.secx}\left[\frac{۱}{x}\right]$ کدام است؟ [۱]

۱) ۱ ۲) ۱− ۳) صفر ۴) ∞

حل) مبهم: $I = \lim_{x\to ۰} \frac{tan^۶x}{sin^۵xsecx}\left[\frac{۱}{x}\right] = \frac{۰}{۰} \times \infty$

$$\xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \underbrace{x \to ۰}_{\text{هم ارزی}} \begin{cases} tan^۶x \sim x^۶ \\ sin^۵x \sim x^۵ \\ \left[\frac{۱}{x}\right] \sim \frac{۱}{x} \end{cases} \to I = \lim_{x\to ۰} \frac{x^۶}{x^۵(۱)}\left(\frac{۱}{x}\right) = \lim_{x\to ۰} \frac{x^۶}{x^۶} = ۱$$

گزینه ۱ صحیح است.

---

[۱] پوران پژوهش تست ۵۴ صفحه ۱۰۹

نکته مهم)

۱) توابع نمایی نسبت به چند جمله‌ایها رشد بیشتری دارند که در جدول قوانین رشد زیر، مشهود است :

$$a^x \gg b^x \gg x^a \gg x^\beta \gg logx \ , \ a > b > ۱ \ , \ \alpha > \beta > ۰$$

۲) اگر n یک عدد طبیعی ثابت باشد، آن‌گاه :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = ۰ \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

❄اصطلاحاً می گوییم تابع e^x از هر تابع توانی سریعتر به بی نهایت میل می کند.

۳) اگر n یک عدد طبیعی ثابت باشد، آن گاه :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x^n} = ۰ \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{\sqrt[n]{x}} = ۰$$

❄اصطلاحاً می گوییم تابع lnx **کمتر** از توابع x^n و $\sqrt[n]{x}$ به بی نهایت میل می کند.

مثال ۳۰) حاصل $\lim_{x\to+\infty} \frac{۲^x}{x^۳}$ را بیابید.

حل) سرعت رشد $x^۳$ از ۲^x کمتر است، لذا: $\lim_{x\to+\infty} \frac{۲^x}{x^۳} = +\infty$

تست ۱۹) حد کسر $\frac{۲x-sinx-tgx}{x^۳}$ وقتی $x \to ۰$ کدام است؟ (آزاد ریاضی و فیزیک ۸۴)

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) $-\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

$$\begin{cases} \text{راه غلط اول} \to \lim_{x\to۰} \frac{۲x-sinx-tgx}{x^۳} = \lim_{x\to۰} \frac{۲x-x-tanx}{x^۳} = \lim_{x\to۰} \frac{x-tanx}{x^۳} = \frac{-\frac{x^۳}{۳}}{x^۳} = -۱ \ ✗ \\ \text{راه غلط دوم} \to \lim_{x\to۰} \frac{۲x-sinx-tgx}{x^۳} = \lim_{x\to۰} \frac{۲x-sinx-x}{x^۳} = \lim_{x\to۰} \frac{x-sinx}{x^۳} = \frac{\frac{x^۳}{۶}}{x^۳} = \frac{۱}{۶} \ ✗ \end{cases}$$

☹ ضایع شدی پس به **تذکر** گفته شده دقت کن.

تذکر) راه ۱ و ۲ غلط هستند، زیرا اولاً: اگر قرار است از **هم ارزی** استفاده کنیم، باید هم ارز همهٔ عبارتها رو همان ابتدا بنویسیم و ثانیاً پس از اِعمال هم ارزی، نباید دوباره به هم ارزی دیگری برسیم. (شرط۲ هم ارزی مثلثاتی، یادتون که نرفته؟)

راه درست $\rightarrow \lim_{x\to ۰} \frac{\overbrace{۴x}^{x+x} - sinx - tanx}{x^۳} = \lim_{x\to ۰} \frac{x + x - sinx - tanx}{x^۳}$

$$= \lim_{x\to ۰} \frac{(x - sinx) + (x - tanx)}{x^۳} = \frac{\frac{x^۳}{۶} + \frac{-x^۳}{۳}}{x^۳} = \frac{\frac{-x^۳}{۶}}{x^۳} = \frac{-۱}{۶}$$

گزینه ۳ صحیح است.

تست ۲۰) حاصل $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+۲)!+(n+۱)!}{(n+۲)!-(n+۱)!}$ برابر کدام است؟ [۱]

صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ∞

راه اول)

$$I = \lim_{n\to\infty} \frac{(n + ۲)! + (n + ۱)!}{(n + ۲)! - (n + ۱)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n + ۲)(n + ۱)! + (n + ۱)!}{(n + ۲)(n + ۱)! - (n + ۱)!} \xRightarrow{\text{فاکتورگیری}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n + ۱)!\,(n + ۲ + ۱)}{(n + ۱)!\,(n + ۲ - ۱)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n + ۳}{n + ۱} = \lim_{n\to\infty} \frac{n + ۱}{n + ۱} + \frac{۲}{n + ۱} = ۱ + ۰ = ۱$$

راه دوم: حرفه ای) در عبارات فاکتوریل دار، وقتی $n \to \infty$، **هم ارز فاکتوریل بیشتر** است، یعنی:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(n + ۲)! + (n + ۱)!}{(n + ۲)! - (n + ۱)!} \sim \lim_{n\to\infty} \frac{(n + ۲)!}{(n + ۲)!} = ۱$$

گزینه ۲ صحیح است.

---

[۱] پوران پژوهش تست ۱۰ صفحه ۱۰۴

آموزش تکنیکی

(حد، پیوستگی، مجانب‌ها)

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(x) = ۲^- \to \lim\limits_{x\to(-۱)^-}[f(x)]=[۲^-]=۱ \\ x \to -\infty \to \frac{۱}{x} \to ۰^- \to \lim\limits_{x\to-\infty} f(\frac{۱}{x}) = \lim\limits_{t\to ۰^-} f(t)=۴ \\ \lim\limits_{x\to(-۱)^-}[f(x)] + \lim\limits_{x\to-\infty} f(\frac{۱}{x}) = ۱+۴=۵ \end{cases}$$

گزینه ۲ صحیح است.

تست های تعریف حد تابع:

تست ۶) در تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{۴x^۲-۱}{۲x-۱} & x > ۱ \\ ۵x - ۲ & x \le ۱ \end{cases}$، اگر $۰ < |x-۱| < \delta$ آن گاه فاصله $f(x)$ از عدد ۳کمتر از $\frac{۱}{۱۰۰}$ باشد، بزرگترین مقدار δ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۷۷)

۱) ۰/۰۱ ۲) ۰/۰۰۲ ۳) ۰/۰۰۳ ۴) ۰/۰۰۵

حل تکنیکی) رابطه بین ε و δ در گزاره‌ی درست حد تابع $y = Ax + B$ به صورت زیره :

$$\boxed{\delta \le \frac{\varepsilon}{|A|}}$$

مثلا در $\underbrace{۵}_{A}x - ۲$ داریم: $\delta_۱ \le \frac{\varepsilon}{۵}$

و رابطه بین ε و δ در گزاره ی درست حدتابع $y = \frac{ax^۲+bx+c}{dx+e}$ که مقدار شیب، برابر $\frac{a}{d}$ است به این صورته:

$$\boxed{\delta \le \frac{\varepsilon}{\frac{a}{d}}}$$

مثلا در این تست در مورد $\frac{\overbrace{۴x^۲-۱}^{a}}{\underbrace{۲x-۱}_{d}}$ داریم: $\delta_۱ \le \frac{\varepsilon}{\frac{۴}{۲}}$

$$\begin{cases} \delta_۱ \le \frac{\varepsilon}{\frac{۴}{۲}} = \frac{\frac{۱}{۱۰۰}}{۲} = \frac{۱}{۲۰۰} \\ \delta_۱ \le \frac{\varepsilon}{۵} = \frac{\frac{۱}{۱۰۰}}{۵} = \frac{۱}{۵۰۰} \end{cases} \to \delta = Min\left\{\frac{\varepsilon}{۲}, \frac{\varepsilon}{۵}\right\} = \frac{\varepsilon}{۵} = \frac{۰/۰۱}{۵} = \frac{۱}{۵۰۰} = ۰/۰۰۲$$

گزینه ۲ صحیح است.

تست ۷) اگر $۳ - \frac{۱}{۳} < x < ۳ + \frac{۱}{۳}$ باشد، آن گاه مقدار ε در نامساوی $\left|\frac{x^۲-۳x}{۲x-۶} - \frac{۳}{۲}\right|$ کدام است؟ (حداقلِ ε کدام است)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۹}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

حل تکنیکی)

$$\delta \le \frac{\varepsilon}{\underbrace{\frac{a}{d}}_{\text{شیب}=\frac{a}{d}=\frac{۱}{۲}}} \rightarrow \frac{۱}{۳} \le \frac{۱}{\frac{۱}{۲}} \times \varepsilon \rightarrow \frac{۱}{۳} \le ۲\varepsilon \rightarrow \frac{۱}{۶} \le \varepsilon$$

گزینه ۲ صحیح است.

تکنیک حل مسائل حد در بی نهایت $(x \to \pm\infty)$:

در حل مسائل حد، وقتی $x \to \pm\infty$ (x به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل می کند) می‌توان عدد بزرگی را در صورت مسئله قرار داد و تست را به راحتی حل کرد. برای مثال وقتی

$$\left(\begin{array}{l} x \to +\infty \xrightarrow{\text{اعداد}} +۱۰ \text{و} +۱۰۰ \text{و} +۱۰۰۰ \\ x \to +\infty \xrightarrow{\text{عبارات رادیکالی}} ۸\text{و}۹\text{و}۹۰۰ \end{array}\right) \text{ و اگر } x \to -\infty \begin{cases} \xrightarrow{\text{اعداد}} -۱۰ \text{و} -۱۰۰ \text{و} -۱۰۰۰ \\ \xrightarrow{\text{عبارات رادیکالی}} -۸ \text{و} -۹ \text{و} -۹۰۰ \end{cases}$$

استفاده می شود که بدست آمدن جواب بزرگِ مثبت، معادل $+\infty$ و بدست آمدن جواب خیلی کوچک، معادل $-\infty$ می باشد.

تست۸) حد عبارت $\left(\frac{x^۳}{۳x^۲-۴} - \frac{x^۲}{۳x+۲}\right)$ وقتی $x \to \infty$ کدام است؟ (مدیریت وحسابداری سراسری۹۱)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۹}$

حل تکنیکی) گفته شده که $x \to \infty$ (x به سمت بی نهایت میل می‌کند) که باید گفت چون مشخص نکرده $x \to +\infty$ یا $x \to -\infty$ ، برای راحتی کار $x \to +\infty$ را انتخاب می کنیم و عدد $x \to +\infty \xRightarrow{x=۱۰۰}$ را در ضابطه سوال قرار داد و سپس جواب را گزینه ها مقایسه می کنیم:

$$x \to \infty \xRightarrow{x=۱۰۰} \frac{(۱۰۰)^۳}{۳\underbrace{(۱۰۰)^۲}_{۱۰,۰۰۰} - ۴} - \frac{(۱۰۰)^۲}{۳(۱۰۰) + ۲} = \frac{۱/۰۰۰/۰۰۰}{\underbrace{۲۹۹۹۶}_{۳۰,۰۰۰}} - \frac{۱۰/۰۰۰}{۳۰۲}$$

برای راحت بودن (در اعداد بزرگِ بیش از ۴ رقم، می توان این کار را کرد):

$\boxed{۰/۲۲} = ۳۳/۱۱ - ۳۳/۳۳$ گزینه ای صحیح است که به این عدد نزدیک باشد.

مقایسه گزینه‌ها:

۱) $\frac{۱}{۳} \cong ۰/۳۳$ ۲) $\frac{۴}{۹} \simeq ۰/۴۵$ ۳) $\frac{۲}{۳} \simeq ۰/۶۶$ ۴) $\frac{۲}{۹} \simeq \boxed{۰/۲۲}$

گزینه ۴ صحیح است.

تست ۹) حاصل $\lim_{x\to-\infty} x\left[\frac{۱}{x}\right]$ کدام است ؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

حل تکنیکی) گفته شده $x \to -\infty$ (پس عددی بسیار کوچک را در ضابطه صورت سوال قرار می دهیم: $x = -۱۰۰۰$)

$$\xrightarrow{x=-۱۰۰۰} -۱۰۰۰\left[\frac{۱}{-۱۰۰۰}\right] = -۱۰۰۰ \times -۱ = +۱۰۰۰ \to +\infty$$ معادل با

گزینه ۳ صحیح است.

تست ۱۰) حاصل $\lim_{x\to+\infty} log\left[\frac{۲x^۲+۱}{x^۲+۱}\right]$ کدام است؟[۱]

۱) $log۲$ ۲) ۰ ۳) $-\infty$ ۴) حد ندارد

حل تکنیکی) گفته شده $x \to +\infty$ پس باید عدد بسیار بزرگ مثل $x = +۱۰۰$ را در ضابطه سوال قرار دهید و تست را حل کنید.

$$\xrightarrow{x=۱۰۰} log\left[\frac{۲(۱۰۰)^۲+۱}{۱۰۰^۲+۱}\right] = lo\,g\left[\frac{۲۰,۰۰۰+۱}{۱۰,۰۰۰+۱}\right] = log\left[\frac{۱}{۹}\right] = log۱ = ۰$$

گزینه ۲ صحیح است.

---

[۱] پوران پژوهش تست ۷ صفحه ۱۰۳

مسائل حد ۳ نوع می باشند:

I) جای گذاری II) شبه مبهم III) مبهم

I) حدهای جای گذاری:

مثال ۲) حد هریک را محاسبه کنید:

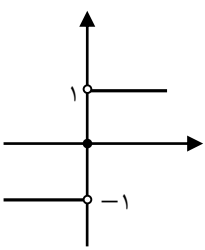
۱) $\lim\limits_{x\to ۲} \frac{۲x^۲-۱}{۵x-x^۳}$ ۲) $\lim\limits_{x\to \sqrt{۲}^+} \left(x^۳ sgn(۲-x^۲)\right)$

حل)

۱) $\lim\limits_{x\to ۲} \frac{۲x^۲-۱}{۵x-x^۳} = \frac{۲(۲)^۲-۱}{۵(۲)-۲^۳} = \frac{۸-۱}{۱۰-۸} = \frac{۷}{۲}$

۲) $\lim\limits_{x\to \sqrt{۲}^+ = (۲+\varepsilon)} \left(x^۳ sgn(۲-x^۲)\right) = \sqrt{۸} sgn(۲-(۲+\varepsilon) = \sqrt{۸} \underbrace{sgn(-\varepsilon)}_{-۱} = -\sqrt{۸}$

تذکر: تعریف تابع علامت $sgn(x) = \begin{cases} ۱ & x > ۰ \\ ۰ & x = ۰ \\ -۱ & x < ۰ \end{cases}$ که نمودارش:



II) **حد شبه مبهم :** تسلط داشتن بر ۹ نکته که در زیر گفته شده لازم است:

نکته اول : حدهای مخرج در بی نهایت: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{A}{x} = \frac{A}{\infty} = ۰$

(**یادآوری:** عدد بر روی ∞ برابر صفر می شود)

تست ۱۱) مقدار $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} \frac{۱-tanx}{tan۲x}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) ۰ ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

حل) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} \frac{۱-tanx}{tan۲x} = \frac{۱-tan\frac{\pi}{۴}}{tan۲(\frac{\pi}{۴})} = \frac{۱-۱}{\infty} = \frac{۰}{\infty} = ۰$

گزینه ۲ صحیح است.

نکته دوم : حدهای اعداد صحیح داخل براکت:

$$\lim_{x\to n\epsilon z}[x]=\begin{cases}x\to n^{+}:[n+\varepsilon]=n\\ x\to n^{-}:[n-\varepsilon]=n-۱\end{cases}$$

تذکر: می توان در مسائل جزء صحیح، از تکنیک $(\pm ۰/۱)$ استفاده کرد.

تست ۱۲) حاصل $\lim \frac{|x|-[x]}{۲|x|+[x]}$ وقتی $x\to ۰^{-}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

حل تکنیکی:

$$(x\to ۰^{-}\simeq \overbrace{۰-۰/۱}^{-۰/۱})$$

$$\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{|x|-[x]}{۲|x|+[x]}\xrightarrow{x=-۰/۱}\frac{|-۰/۱|-[-۰/۱]}{۲|-۰/۱|+[-۰/۱]}=\frac{۰/۱-(-۱)}{۲(۰/۱)+-۱}=\frac{۱/۱}{۰/۲-۱}$$

$$=\frac{۱/۱}{-۰/۸}=\frac{-۱۱}{۸}=-\frac{۱}{۳}$$ → به عدد ۱ − نزدیک است

گزینه ۱ صحیح است.

نکته سوم: حد چند جمله ای ها در **صفر** برابر است با حد کوچک ترین درجه آن:

$\lim_{x\to ۰}(ax^{n}+bx^{n-۱}+\cdots+kx^{m})\sim\lim_{x\to ۰}(kx^{m})$ m:کمترین درجه

مثال ۳) $\lim_{x\to ۰}\frac{۵x^{۴}+۳x^{۲}+۲x}{۸x^{۶}+۷x^{۳}+x}\sim\lim_{x\to ۰}\frac{۲x}{x}=۲$

نکته چهارم: حد چند جمله‌ای در **بی نهایت** برابر است با حد بزرگ ترین درجه آن

$\lim_{x\to\pm}(ax^{n}+bx^{n-۱}+\cdots+k)\sim\lim_{x\to\pm\infty}ax^{n}$ m:بزرگترین درجه

مثال ۴) $\lim_{x\to\infty}\frac{۸x^{۲}-۲x+۱}{۵x^{۳}-۶x}\sim\lim_{x\to\infty}\frac{۸x^{۲}}{۵x^{۳}}=\lim_{x\to\infty}\frac{۸}{۵x}=\frac{۸}{\infty}=۰$

حالات مبهم:

انواع ابهام : ۱) **خطی** $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{حدی}}{\text{حدی}} \\ \infty \times ۰ \\ \frac{\infty}{\infty} \\ \infty - \infty \end{array} \right.$ ۲) **نمایی** $\left\{ \begin{array}{l} ۰^{۰} \\ \infty^{۰} \\ ۱^{\infty} \end{array} \right.$

الف) حالت مبهم $(\frac{0}{0})$

هرگاه در تابع کسریِ $y = \frac{p(x)}{q(x)}$ وقتی $x \to x_۰$ ، حالت مبهمِ $\frac{۰}{۰}$ بوجود آید، آنگاه برای رفع ابهام ۳ روش وجود دارد:

۳ روش رفع ابهامِ $\frac{۰}{۰}$ در توابع کسری:

۱) ایجاد عامل صفر کننده (مخصوص مسائل جبری)

۲) هوپیتال (هم مسائل جبری- هم مثلثاتی)

۳) هم ارزی (مثلثاتی کمان صفر- رادیکال های جبری در ∞)

روش اول (روش ایجاد عامل صفر کننده):

وقتی $(x \to x_۰)$ باید عامل $(x - x_۰)$ را در صورت و مخرج ایجاد کنیم و سپس آنها را با یکدیگر حذف کنیم (ساده کرده و خط می‌زنیم).

مثال ۷) حاصل حدهای زیر را به دست آورید؟

۱) $\lim\limits_{x \to ۲} \frac{x^۲ - ۴}{x^۳ - ۸}$ ۲) $\lim\limits_{x \to ۹} \frac{\sqrt{x} - ۳}{x^۲ - ۸۱}$

$$۱)\ \lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-۴}{x^۳-۸}=\frac{۰}{۰}\ \to\ \frac{\cancel{(x-۲)}(x+۲)}{\cancel{(x-۲)}(x^۲+۲x+۴)}=\frac{۴}{۱۲}=\frac{۱}{۳}$$

$$۲)\ \lim_{x\to ۹}\frac{\sqrt{x}-۳}{x^۲-۸۱}=\frac{۰}{۰}\to\frac{\sqrt{x}-۳}{x^۲-۸۱}\times\frac{\sqrt{x}+۳}{\sqrt{x}+۳}=\frac{(\sqrt{x})^۲-۳^۲}{(x-۹)(x+۹)\sqrt{x}+۳}=\frac{\cancel{(x-۹)}}{\cancel{(x-۹)}(x+۹)(\sqrt{x}+۳)}\to$$

$$\frac{۱}{(x+۹)(\sqrt{x}+۳)}=\frac{۱}{(۹+۹)(\sqrt{۹}+۳)}=\frac{۱}{(۱۸)(۳+۳)}=\frac{۱}{(۱۸)(۶)}=\frac{۱}{۱۰۸}$$

نتیجه مهم (نحوهٔ ایجاد کردن عامل صفر کننده):

۱- اگر توان x بیش از ۱ بود، باید عبارت را ***تجزیه*** کنیم (مثل تجزیه $x^۲-۴$ و $x^۳-۸$ در بالا)

۲- اگر توان x کمتر از ۱ بود، با ضرب و تقسیم در مزدوج (مثل $\sqrt{x}-۳$) یا اتحاد چاق و لاغر، عامل $(x-a)$ را ایجاد می‌کنیم.

تذکر : اتحاد مزدوج و اتحاد چاق و لاغر را باید یاد داشته باشید.

$$\begin{cases}\text{اتحاد مزدوج:}\begin{cases}(a-b)(a+b)=a^۲-b^۲\\(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b\end{cases}\\[2ex]\text{اتحاد چاق و لاغر:}\begin{cases}(a\pm b)(a^۲\mp ab+b^۲)=a^۳\pm b^۳\\(\sqrt[۳]{a}\pm\sqrt[۳]{b})(\sqrt[۳]{a^۲}\mp\sqrt[۳]{ab}+\sqrt[۳]{b^۲})=a\pm b\end{cases}\end{cases}$$

روش دوم (روش هوپیتال):

$$\text{هوپیتال}:\ \lim_{x\to x.}\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{۰}{۰}\ \overset{H}{\Rightarrow}\ \lim\frac{p'(x)}{q'(x)}$$

در حالت $\frac{۰}{۰}$ ، می توان هم از صورت و هم از مخرج مشتق گرفته و سپس حد تابع را بررسی کرد (فرمول های مشتق گفته شده در قسمت کلاسیک مطالعه شود)

سوالات کنکور ریاضیات

مدیریت و حسابداری (سراسری و آزاد)

«حد و پیوستگی و مجانب ها»

حل سوالات کنکور ریاضیات

مدیریت و حسابداری (سراسری و آزاد)

«حد و پیوستگی و مجانب ها»

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

چون $D_f = (0 \text{ و } 1]$ است و از طرفی $e^2 \notin (0 \text{ و } 1]$ پس فاقد نقطه گسستگی است

---

۲۵۱. گزینه ۳ صحیح است .

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} - e^{-x} = e^{\frac{1}{\infty}} - e^{-\infty} = e^{0} - 0 = 1 - 0 = 1$$

---

۲۵۲. گزینه ۱ صحیح است .

حل کلاسیک : می دانیم که $-1 < -1^+ < 0 \quad \rightarrow \quad [-1^+] = -1$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} \frac{|x|}{[x]} = \lim_{x\to-1^+} \frac{|-1^+|}{[x]} = \frac{1}{[-1^+]} = \frac{1}{-1} = -1$$

حل تکنیکی : حد ضابطه $f(x)$ وقتی $x \to -1^+$ (x میل کند به سمت -1 از طرف مقادیر بیشترین آن) :

$$(x \to -1^+ = \overbrace{-1 + 0/1}^{-0/9}) \to \lim_{x\to-1^+} \frac{|x|}{[x]} \xrightarrow{x=-0/9} \frac{|-0/9|}{[-0/9]} = \frac{0/9}{-1} = -0/9$$

حذف سریع گزینه های ۲ و ۳ چون مثبت هستند و عدد $-0/9$ به گزینه ۱(عدد۱-) نزدیک است

---

۲۵۳. گزینه ۴ صحیح است . حل کلاسیک :

$$\lim_{x\to1} \frac{\sqrt[3]{x} - x}{lnx} = \frac{0}{0} \xrightarrow{hopital} \lim_{x\to1} \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - 1}{\frac{1}{x}} = \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}} - 1}{\frac{1}{1}} = \frac{\frac{1}{3} - 1}{1} = \frac{-2}{3}$$

حل تکنیکی : گفته شده که $x \to 1$ که ترجیحا $x \to 1^+$ (x میل می کند به سمت ۱ از طرف مقادیر بیشتر را انتخاب می کنیم):

$$(x \to 1^+ = \overbrace{1 + 0/1}^{1/1})$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt[۳]{x}-x}{lnx}\xrightarrow{x=۱/۱}\frac{\sqrt[۳]{۱/۱}-۱/۱}{ln۱/۱}=\frac{۱/۰۳-۱/۱۰}{۰/۱}=\frac{-۰/۰۷}{۰/۱}=\frac{-۷}{۱۰}$$

$$\sqrt[۳]{۱^۳+۰/۱}\cong ۱+\frac{۰/۱}{۳\times ۱^۲}=۱/۰۳$$

حذف سریع گزینه های ۲ و ۳ زیرا مثبت هستند و عدد $\frac{-۷}{۱۰}$ به گزینه ۴($-\frac{۲}{۳}$) نزدیک است

---

۲۵۴. **گزینه ۲ صحیح است .** حل : یادآوری : $\underset{u\to ۰}{sinu}\sim u$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{sin۴x}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۴x}{x}=۴$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۱-x}-۱}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{(۱-x)^{\frac{۱}{۲}}-۱}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱+\frac{۱}{۲}(-x)-۱}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{-\frac{۱}{۲}x}{x}=-\frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x\to ۰}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to ۰}f(x)+\lim_{x\to ۰}g(x)=۴+\left(\frac{-۱}{۲}\right)=\frac{۷}{۲}$$

---

۲۵۵. **گزینه ۳ صحیح است .**

حل : حالت مبهم ۱^∞ را داریم. از توان $e^{\lim_{x\to ۰}(\text{پایه}-۱)}$ استفاده می کنیم:

$$e^{\lim_{p\to ۰}\frac{(۰/۳k^{-p}+۰/۷l^{-p}-۱)}{-p}}\ \underline{\underline{hopital}}\ e^{\lim_{p\to ۰}\frac{۰/۳k^{-p}lnk-۰/۷l^{-p}lnl}{-۱}}=e^{-۰/۳lnk+۰/۷lnl}$$

$$\to e^{lnk^{۰/۳}}e^{lnl^{۰/۷}}=k^{۰/۳}l^{۰/۷}$$

---

۲۵۶. **گزینه ⊖ صحیح است .**

حل : مشخص نیست x به سمت چه مقداری میل می کند.