ریاضیات DLM

آموزش سه‌بعدی مفاهیم

تابع

طراح، مؤلف و گردآورنده:

امین بنیادگذار

ویراستار علمی:

حسین خدامی

عنوان **صفحه**

آموزش کلاسیک تابع

زوج مرتب یا دوتایی مرتب ۱۱
حاصل ضرب دِکارتی ۱۱
رابطه ۱۳
تعریف مجموعه‌ای تابع ۱۳
دامنه (دامنه تعریف، حوزه‌ی تعریف، قلمرو) ۱۶
بُرد (حوزه مقادیر) ۱۶
تعریف تابع با استفاده از نمودار وِن ۱۶
تعریف تابع از روی نمودار ۱۷
نمایش تابع به وسیله‌ی فرمول (ضابطه‌ی تابع) ۱۸
اثبات تابع نبودن یک رابطه از روی ضابطه‌ی آن ۱۹
توابع چند ضابطه‌ای ۲۰
۲ شرط تابع بودن رابطه‌های چندضابطه‌ای ۲۱
تغییرات و انتقال منحنی ۲۳
۱) رسم تابع $y = -f(x)$ ۲۳
۲) رسم تابع $y = f(-x)$ ۲۳
۳) رسم نمودار $y = f(x) + k$ ۲۴
۴) رسم نمودار $y = f(x + k)$ ۲۵
۵) رسم نمودار $y = kf(x)$ ۲۶
۶) رسم نمودار $y = f(kx)$ ۲۶
۷) رسم نمودار $y = f(x + k) + h$ ۲۷
تابع ثابت ۲۸
ویژگی‌های تابع ثابت ۲۹

تابع همانی ۲۹
ویژگی‌های تابع همانی ۲۹
تابع علامت ۳۰
ویژگی‌های تابع علامت ۳۰
تابع پله‌ای ۳۱
تابع قدرمطلق ۳۱
ویژگی‌های تابع قدرمطلق ۳۳
روش کلی برای حل معادله و نامعادله‌های شامل قدرمطلق ۳۶
بررسی نمودار تابع $y = |x - a| + |x - b|$ (نمودار گلدانی شکل) ۳۹
بررسی نمودار تابع $y = |x - a| - |x - b|$ ، (نمودار آبشاری شکل) ۴۰
رسم نمودار $y = |f(x)|$ ۴۲
نمودار $|x| + |y| = k$ ۴۶
رسم نمودار تابع $y = f(|x|)$ ۴۷
تابع جزءصحیح ۴۸
ویژگی‌های تابع جزءصحیح ۴۹
رسم توابعی که در آن‌ها $[kx]$ وجود دارد ۵۳
رسم نمودارِ $y = [f(x)]$ ۵۴
تابع نمایی ۵۷
ویژگی‌های تابع نمایی ۵۸
عدد نِپِر (e) ۵۸
تابع نمایی طبیعی ۵۹
تابع لگاریتمی ۶۰
ویژگی‌های تابع لگاریتمی ۶۱
نکات مهم لگاریتم ۶۲
قوانین توابع لگاریتمی ۶۲

تابع لگاریتمی طبیعی ۶۳
ویژگی‌های تابع لگاریتمی طبیعی ۶۴
نکات مهم لگاریتم طبیعی ۶۴
ویژگی های توابع لگاریتم طبیعی ۶۴
نحوه تعیین دامنه‌ی تابع ۶۶
طرز تعیین دامنه تعریف توابع ۶۶
۱) توابع چندجمله‌ای ۶۶
۲) توابع کسری گویا ۶۶
۳) توابع اَصَم یا گنگ ۶۷
۴) توابع لگاریتمی ۷۱
۵) توابع مثلثاتی ۷۵
۶) دامنه جمع، تفاضل،ضرب و تقسیم دو تابع ۷۷
۷) دامنه توابع نمایی ۷۸
بُرد تابع و روش‌های به دست آوردن آن ۸۱
۱) برد تابع درجه دوم ۸۱
۲) برد توابعی به فرم $y = \left(g(x)\right)^{۲} + \beta\left(g(x)\right)$ ۸۴
۳) برد توابعی که به صورت حاصل جمع چند قدرمطلق باشد ۸۶
۴) بُرد چند تابع مهم و کاربردی ۸۷
۵) برد بعضی از توابع مثلثاتی ۸۸
۶) برد $y = a\sin^{۲} x + b\sin x + c$ یا $y = a\cos^{۲} x + \cos x + c$ ۸۸
۷) برد توابع چندجمله‌ای از درجه فرد ۹۰
۸) محاسبه برد تابع به کمک تشکیل جدول تغییرات تابع ۹۰
۹) دامنه و برد تابع هموگرافیک ۹۳
۱۰) برد تابع $y_{۱} = a^{f(x)}$ و $y_{۲} = log_{a}^{f(x)}$ ۹۴

۱۱) ۳ نکته مهم در برد توابع جزءصحیح ۹۵
۱۲) برد تابع $f(x) = a^{bx+c} + k$ ۹۶
۱۳) برد تابع $f(x) = ln(ax + b)$ ۹۶
تساوی دو تابع ۹۷
عملیات جبری بر روی توابع ۹۹
ترکیب توابع ۱۰۲
انواع مسائل ترکیب ۱۰۲
الف) مسائل ترکیب نوع اول ۱۰۲
ب) مسائل ترکیب نوع دوم ۱۰۴
تابع زوج و تابع فرد ۱۰۸
تشخیص تابع زوج از روی نمودار ۱۰۸
تشخیص تابع فرد از روی نمودار ۱۰۹
ویژگی‌های توابع زوج و فرد ۱۱۰
توابع صعودی و نزولی ۱۱۵
تشخیص صعودی یا نزولی بودن تابع از روی نمودار ۱۱۶
تشخیص صعودی یا نزولی بودن تابع و اکید بودن آن با مشتق گیری از تابع ۱۱۶
تابع یک‌به‌یک ۱۱۸
تابع یک‌به‌یک از دیدگاه نمودار وِن ۱۱۸
تشخیص یک‌به‌یک بودن تابع از روی نمودار ۱۱۹
ویژگی‌های تابع یک‌به‌یک ۱۲۴
تابع معکوس ۱۲۵
تعیین ضابطه تابع معکوس ۱۲۷
۴ویژگی مهم در تابع معکوس ۱۳۰
ویژگی‌های تابع معکوس ۱۳۱
تابع پوشا (پوششی) ۱۳۴

تشخیص تابع پوشا روی نمودار وِن ۱۳۴
بررسی پوشا بودن یک تابع ۱۳۵
تشخیص تابع پوشا از روی نمودار ۱۳۶
بررسی پوشاییِ توابعِ چندضابطه‌ای ۱۳۷
تابع متناوب ۱۳۸
نکات تابع متناوب ۱۳۸
توابعی که متناوب نیستند ۱۴۲
مجموعه ی کران دار و بی کران ۱۴۳
توابع مثلثاتی و معکوس آنها ۱۴۷
الف) $y = sinx$ و $y = Arcsinx$ یا $y = sin^{-1}x$ ۱۴۷
ویژگی های توابع مثلثاتیِ $sinx$ و $Arcsinx$ ۱۴۸
ب) $y = cosx$ و $y = Arccosx$ یا $y = cos^{-1}x$ ۱۴۸
ویژگی های توابع مثلثاتیِ $cosx$ و $Arccosx$ ۱۴۹
ج) $y = tanx$ و $y = Arctanx$ یا $y = tan^{-1}x$ ۱۵۰
ویژگی های توابع مثلثاتیِ $tanx$ و $Arctanx$ ۱۵۰
د) $y = cotx$ و $y = Arccotx$ یا $y = cot^{-1}x$ ۱۵۱
ویژگی های توابع مثلثاتیِ $cotx$ و $Arccotx$ ۱۵۲
توابع هیپربولیک (هُذلولی) ۱۵۳
منحنی ها و برخی از خواص توابع هیپربولیک ۱۵۴
توابع معکوس هیپربولیک بر حسب لگاریتم‌های طبیعی ۱۵۶
نمودار توابع معکوس هیپربولیک ۱۵۶
تابع رشد و زوال ۱۵۹

آموزش تکنیکی تابع

زوج مرتب یا دوتایی مرتب ۱۶۲

حاصل ضرب دکارتی $A\times B$ (کارتزین $A\times B$): ۱۶۲

رابطه ۱۶۳

۴ تعریف مهم در مورد تابع ۱۶۴

۱)تابع از دیدگاه زوج مرتبی ۱۶۴

۲) تابع پیکانی (نمودار ون) ۱۶۴

۳) تابع از دیدگاه جدولی ۱۶۴

۴) تابع از دیدگاه هندسی (نموداری) ۱۶۵

تعریف تابع قدر مطلق ۱۶۷

ویژگی های مهم قدرمطلق ۱۶۸

تابع جزء صحیح ۱۷۱

خواص اولیه جزء صحیح ۱۷۲

۳ خاصیت مهم تابع جزء صحیح ۱۷۴

نحوه تعیین دامنه تابع (دامنه تعریف، حوزه تعریف، قلمرو) ۱۷۷

چندین نکته مهم و اساسی در حل مسائل دامنه ۱۷۷

نحوه تعیین برد (۲ روش تکنیکی مهم) ۱۸۵

۳ نکته مهم در برد توابع جزء صحیح ۱۸۸

اعمال روی توابع ۱۸۸

ترکیب توابع ۱۹۰
مسائل ترکیب نوع اول ۱۹۱
مسائل ترکیب نوع دوم ۱۹۳
مسائل ترکیب نوع سوم ۱۹۳
تابع زوج و تابع فرد ۱۹۴
تکنیک حل مسائل تابع زوج و فرد ۱۹۴
تابع یک به یک ۱۹۷
تابع معکوس ۱۹۸

سوالات آزمون کارشناسی ارشد رشته های مدیریت ، حسابداری و اقتصاد

سوالات آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته مدیریت ۲۰۲
سوالات آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی رشته مدیریت ۲۱۱
سوالات آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته حسابداری ۲۲۵
سوالات آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی رشته حسابداری ۲۳۰
سوالات آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته اقتصاد ۲۳۴
سوالات آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی رشته اقتصاد ۲۴۲

حل سوالات آزمون کارشناسی ارشد رشته های مدیریت و حسابداری و اقتصاد

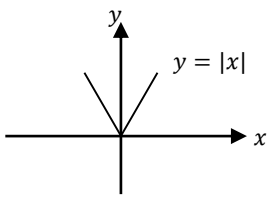
پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته مدیریت ۲۴۸
پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد رشته مدیریت ۲۹۹
پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته حسابداری ۳۵۰
پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد رشته حسابداری ۳۷۱
پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته اقتصاد ۳۸۸
پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد رشته اقتصاد ۴۲۲

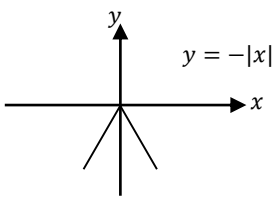
تغییرات و انتقال منحنی:

۱) **رسم تابع $y = -f(x)$:**

برای رسم نمودار $y = -f(x)$ ، ابتدا نمودار تابع $y = f(x)$ را رسم می‌کنیم. سپس عرض‌ها (y ها) را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم (در واقع قرینه‌ی تابع را نسبت به محور xها رسم می‌کنیم، یعنی مثلا اگه در تابع $y = f(x)$ به ازای $x = ۱$، مقدار y مساوی ۲+ باشد، برای رسم نمودار $y = f(x)$، باید y رو قرینه کنیم، یعنی میشه: ۲-).

مثال ۱۱) $y = -|x|$ را رسم کنید؟



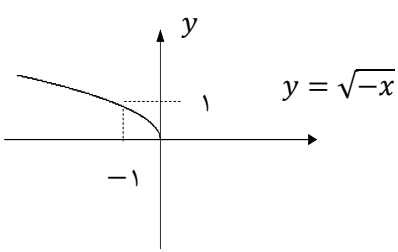


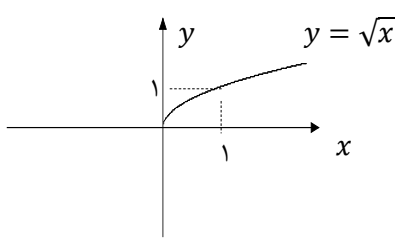
---

۲) **رسم تابع $y = f(-x)$:**

برای رسم نمودار این تابع کافی ست ابتدا، نمودار تابع $y = f(x)$ را رسم کنیم، سپس طول‌ها (x ها) را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم (قرینه‌ی تابع را نسبت به محور yها رسم می‌کنیم، یعنی مثلا اگه به ازای $x = -۱$، مقدار y مساوی ۱+ باشد، برای رسم نمودار $y = f(-x)$، باید x رو قرینه کنیم، یعنی میشه: $x = +۱$).

مثال ۱۲) $y = \sqrt{-x}$ را رسم کنید.





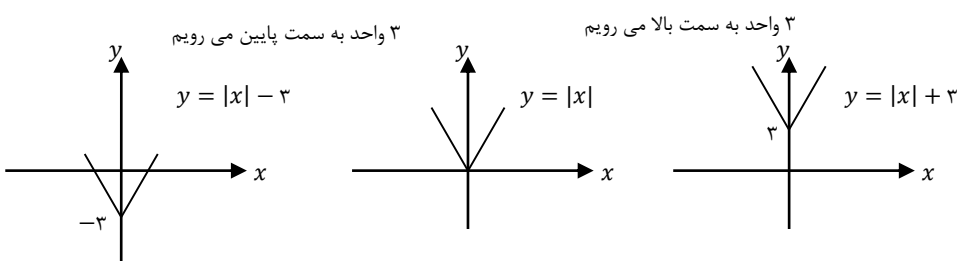
⚠ **توجه**: همان‌طور که از این نمودار می‌بینید تابع $y = \sqrt{-x}$ با توجه به xهای **منفی** معنادار خواهد بود (یعنی این نمودار فقط در ربع دوم نمودار که xها منفی هستن، قرار گرفته‌است)، زیرا در تابع $y = \sqrt{-x}$، فرجه رادیکال زوجه (۲)، و ما می‌دانیم که یک رادیکال با فرجه زوج، زمانی جواب خواهد داشت که عبارت زیر رادیکال، **مثبت** باشد.
بنابراین تابع $y = \sqrt{-x}$ هم تنها زمانی جواب خواهد داشت که در آن، مقدار x منفی باشد تا حاصل عبارت زیر رادیکال(یعنی $-x$)، مثبت بشه (منفی در منفی میشه مثبت)، مثلا اگه $x = -۴$ باشه، حاصل عبارت زیر رادیکال مثبت میشه، و درنتیجه رادیکال جواب خواهد داشت:

$$y = \sqrt{-x} = \sqrt{-(-۴)} = \sqrt{+۴} = ۲$$

۳) رسم نمودار $y = f(x) + k$:

ابتدا نمودار $f(x)$ را ر سم می‌کنیم، سپس به اندازه‌ی k واحد به **بالا یا پایین** حرکت می‌کنیم.
به طوری که:
اگر k **مثبت** باشد ($k > ۰$) باشد، به اندازه $y = k$ به طرف **بالای** محور yها انتقال می‌یابد.
و اگر k **منفی** باشد ($k < ۰$) باشد به اندازه $y = k$ به طرف **پایین** محور yها انتقال می‌یابد.

مثال ۱۳) $y = |x| + ۳$ و $y = |x| - ۳$ را رسم کنید.



$D_f = R$
$R_f = [-۳, +\infty)$

$D_f = R$
$R_f = [۰, +\infty)$

$D_f = R$
$R_f = [۳, +\infty)$

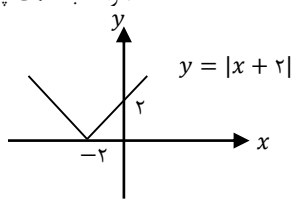
۴) رسم نمودار $y = f(x + k)$:

کافیست ابتدا نمودار $y = f(x)$ را رسم کنیم، سپس به اندازه‌ی k واحد در راستای محور xها به سمت **راست یا چپ** حرکت کنیم. به طوری که:

اگر $k > ۰$ باشد، روی محور xها به سمت **چپ** حرکت می‌کنیم و اگر $k < ۰$ باشد به سمت **راست** حرکت می‌کنیم.

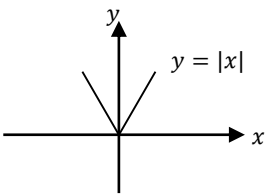
مثال ۱۴) $y = |x - ۲|$ و $y = |x + ۲|$ را رسم کنید؟

۲ واحد به سمت چپ می رویم



$D_f = R$

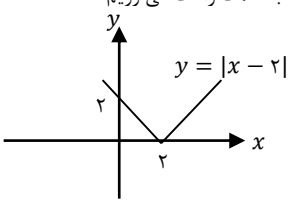
$R_f = [۰, +\infty)$



$D_f = R$

$R_f = [۰, +\infty)$

۲ واحد به سمت راست می رویم



$D_f = R$

$R_f = [۰, +\infty)$

$$\underset{\text{باید صحیح باشد}}{x} = \underset{\text{باید صحیح}}{۵} + \underset{\text{عدد صحیح}}{[۲x]} + \underset{\text{صحیح}}{[۳x]} \rightarrow x \in Z \rightarrow \begin{cases} [۲x] = ۲x \\ [۳x] = ۳x \end{cases}$$

$$x = ۵ + ۲x + ۳x \rightarrow x = ۵x + ۵ \rightarrow \overbrace{x - ۵x}^{-۴x} = ۵ \rightarrow x = \frac{-۵}{۴} \notin Z$$

پس معادله ریشه ندارد. **گزینه ۴ صحیح است.**

نحوه تعیین دامنه تابع (دامنه تعریف، حوزه تعریف، قلمرو)

دامنه تابع مجموعه تمام مقادیری است که می تواند به جای x قرار گیرد. در حل مسائل تستی به جای حل مستقیم سؤالات می توان از گزینه ها کمک گرفت و با استفاده از دو تکنیک (حذف گزینه و تضاد گزینه ها) گزینه ای را که شامل مجموعه تمام مقادیر x است را انتخاب نمود.

چندین نکته مهم و اساسی در حل مسائل دامنه:

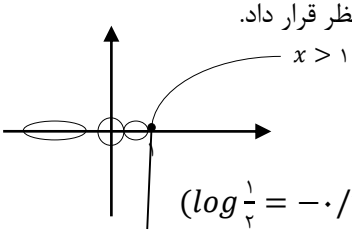
۱) در توابع کسری که دارای صورت و مخرج می باشند، باید دقت داشت که مخرج هیچ گاه نباید صفر شود.

۲) در توابع رادیکالی با فرجه زوج باید زیر رادیکال همواره نامنفی (صفر یا عددی مثبت) باشد.

۳) در توابع رادیکالی با فرجه فرد، رادیکال آن را حذف کرده و سپس تعیین دامنه می کنیم.

۴) دامنه توابع **لگاریتمی** $f(x) = log_{h(x)}^{g(x)}$ باید $\begin{cases} h(x) > ۰ \\ g(x) > ۰ \\ h(x) \neq ۱ \end{cases}$ باشد.

۵) با توجه به شکل $(a > ۱)logx$ باید سه نکته مهم را مدنظر قرار داد.



۱) $log\ ۰$ بی معنی است.

۲) $log\ x$ (x منفی نداریم)

۳) $۰ < logx < ۱$ حاصل آن عدد منفی می شود مثال: $(log\frac{۱}{۲} = -۰/۳)$

۶) جلوی ln باید همواره مثبت باشد یعنی اگر $ln(A(x))$ داشته باشیم باید $(A(x)) > ۰$ باشد.

۷) $Arcsinx$ و $Arccosx$ باید در محدوده خاصی باشد، یعنی:

$$\begin{cases} -۱ \leq Arcsinx \leq ۱ \\ -۱ \leq Arccosx \leq ۱ \end{cases}$$

۸) اگر دامنه تابع $y = f(x)$ برابر $[a, b]$ باشد دامنه تابع $y = f(kx + L)$ به صورت زیر است:

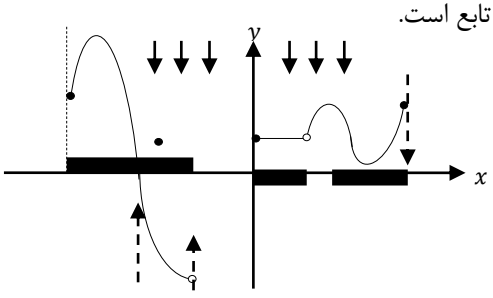
$$a \leq kx + L \leq b \rightarrow a - L \leq kx \leq b - L \rightarrow \begin{cases} \dfrac{a-L}{k} \leq x \leq \dfrac{b-L}{k} & (k > ۰) \\ \dfrac{a-L}{k} \leq x \leq \dfrac{a-L}{k} & (k < ۰) \end{cases}$$

تذکر) اگر رادیکال فرجه **زوج** در مخرج کسر باشد تنها کافی است زیر رادیکال بزرگتر از صفر باشد.

توجه : گزینه ها معرف x (تصویر بر روی محور x ها) یا همان دامنه می باشند که در واقع با استفاده از قواعد حذف گزینه و تضاد گزینه، عددی را از گزینه ها انتخاب و در صورت سؤال قرار می دهیم و با استفاده از ۸ نکته گفته شده تست را حل می کنیم.

نکته طلایی) اعداد$(۰, -۱, +۱)$ درحل مسائل دامنه جزء اعداد طلایی محسوب می شوند.

تذکر مهم) برای بدست آوردن دامنه تابع، هرگاه از بالا و پایین بر نمودار f بتابانیم سایه‌ی ایجاد شده روی محور x ها برابر با دامنه ی تابع است.



قسمت خاکستری روی محور x ها دامنه f را نشان می دهد.

تست۱۵) دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \frac{۲x+۱}{|x|-۱}$ کدام است؟ (مدیریت سراسری ۷۶)

۱) R^+ ۲) $R - \{-۱\}$ ۳) $R - \{۱\}$ ۴) $R - \{-۱,۱\}$

حل تکنیکی) این سؤال یک عبارت کسری می باشد که باید دقت داشت اگر گزینه ای را انتخاب کردید و در x سؤال قرار دادید، نباید مخرج کسر صفر شود که اگر گزینه ای باعث صفر شدن مخرج کسر شد، آن گزینه حذف می شود. ابتدا بررسی گزینه ها:

۱) $R^+ = (۰, +\infty)$ ۲) $R - \{-۱\}$ ۳) $R - \{۱\}$ ۴) $R - \{-۱,۱\}$

تمام اعداد حقیقی مثبت تمام اعداد حقیقی به جز ۱- تمام اعداد حقیقی به جز ۱ تمام اعداد حقیق به جز ۱ و ۱-

$x = ۱$ در گزینه های ۱ و ۲ جزء دامنه محسوب می شود برخلاف گزینه های ۳ و ۴ که باید بررسی شود :

$$f(x) = \frac{۲x+۱}{|x|-۱} \xRightarrow{\text{بررسی } x=۱} \frac{۲x+۱}{|۱|-۱}$$

مخرج کسر صفر شد پس $x = ۱$ جزء دامنه نمی باشد و باید از مجموعه دامنه حذف شود ولی گزینه های ۱ و ۲ این عدد را درست می دانند که باید حذف شوند.

$x = -۱$ در گزینه ۳ جزء دامنه محسوب می شود بر خلاف گزینه ۴ که این عدد را از دامنه حذف کرده است که باید بررسی شود :

$$f(x) = \frac{۲x+۱}{|x|-۱} \xRightarrow{\text{بررسی } x=-۱} \frac{۲x+۱}{|-۱|-۱}$$

مخرج کسر صفر شد پس $x = -۱$ جزء دامنه تابع نمی باشد و گزینه ۳ که آن را تأیید کرده حذف می شود. **گزینه ۴ صحیح است.**

تست۱۶) دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+۱}}$ کدام است؟ (اقتصاد سراسری ۸۶)

۱) $-۱ \leq x \leq ۰$ ۲) $-۱ < x \leq ۰$

۳) $x \geq ۰$ یا $x \leq -۱$ ۴) $x < -۱$ یا $x \geq ۰$

حل تکنیکی) این سؤال رادیکال با فرجه زوج می باشد و دارای مخرج کسر هم می باشد که دو نکته مهم وجود دارد که اگر x ای از گزینه ها را انتخاب و در صورت سؤال قرار دادید.

۱) زیرا رادیکال باید نامنفی باشد.

۲) مخرج کسر نباید صفر شود.

عدد $x = -۱$ در گزینه های ۱ و ۳ قابل قبول است بر خلاف گزینه های ۲ و ۴ که باید بررسی شود.

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+۱}} \xRightarrow{x=-۱} \sqrt{\frac{-۱}{-۱+۱}}$$

مخرج کسر صفر شد که غیرقابل قبول است پس $x = -۱$ جزء دامنه نمی باشد. بنابراین گزینه های ۱ و ۳ حذف می شوند .

حال بین گزینه های ۲ و ۴ باید عددی را انتخاب کرد که در یکی باشد و در دیگری خیر $x = ۱۰$ در گزینه ۴ تأیید شده است برخلاف گزینه ۲ که عدد ۱۰ را جزء دامنه نمی داند که باید بررسی شود :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+۱}} \xRightarrow{x=۱۰} \sqrt{\frac{۱۰}{۱۰+۱}}$$

عدد ۱۰ در رادیکال و مخرج کسر مشکلی ایجاد نمی کند بنابراین عدد ۱۰ جزء دامنه می باشد. حذف گزینه ۲ چرا که عدد ۱۰ را در دامنه خود قرار نداده است . **گزینه ۴ صحیح است.**

تست۱۷) دامنه تابع $y = \frac{cosx}{\sqrt{۱-x^۲}}$ کدام بازه است؟ (صنایع غذایی- ۸۳)

۱) $[-۱,۱]$ ۲) $(-۱,۱)$ ۳) $(\frac{۱}{۲},\frac{\pi}{۶})$ ۴) $(\frac{\pi}{۶},\frac{۱}{۲})$

حل تکنیکی) این سؤال رادیکال یا فرجه زوج در مخرج کسر می باشد که باید زیر آن بزرگتر از صفر باشد این تست را با قاعده حذف گزینه و تضاد گزینه حل می کنیم.

$x = ۰$ در گزینه های ۱ و ۲ قابل قبول است برخلاف گزینه های ۳ و ۴ که باید بررسی شود :

$$y = \frac{cosx}{\sqrt{۱ - x^۲}} \overset{x=۰}{\Longrightarrow} \frac{cosx}{\sqrt{۱ - ۰^۲}} = \frac{cosx}{\sqrt{۱}}$$

$x = ۰$ مشکلی ایجاد نکرده است وجزء دامنه می باشد. حذف گزینه های۳و۴

$x = ۱$ در گزینه ۱ جزء دامنه می باشد بر خلاف گزینه ۲ که عدد ۱ را جزء دامنه نمی داند که باید بررسی شود :

$$y = \frac{cosx}{\sqrt{۱ - x^۲}} \overset{x=۱}{\Longrightarrow} \frac{cosx}{\sqrt{۱ - ۱^۲} \to \sqrt{۰}}$$

مخرج باید بزرگتر از صفر باشد ولی صفر شد که باید گفت $x = ۱$ جزء دامنه نمی باشد بنابراین گزینه ۱ که عدد $x = ۱$ را به غلط جزء دامنه می داند حذف می شود .

گزینه ۲ صحیح است.

تست۱۸) جواب معادله $\sqrt{x + \sqrt{x - ۱}} = \sqrt{x + ۲\sqrt{x}}$ کدام است؟ [۱]

۱) $-\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) ۲ ۴) جواب ندارد

حل تکنیکی) به جای حل مستقیم سؤال گزینه ها را در صورت سؤال امتحان می کنیم که قطعاً گزینه ای درست است که در این معادله برقرار باشد. بررسی همه گزینه ها:

(گزینه ۱ $x = \frac{-۱}{۳} \to \sqrt{\frac{-۱}{۳} + \sqrt{\frac{-۱}{۳} - ۱}}$ ✗ $\to$ رادیکال فرجه زوج باید زیر آن نامنفی باشد

(گزینه ۲ $x = \frac{۱}{۳} \to \sqrt{\frac{۱}{۳} + \sqrt{\frac{۱}{۳} - ۱}}$ ✗ $\to$ رادیکال فرجه زوج باید زیر آن نامنفی باشد

(گزینه ۳ $x = ۲ \to \sqrt{۲ + \sqrt{۲ - ۱}} \overset{?}{=} \sqrt{۲ + \sqrt[۲]{۲}} \to \sqrt{۳} \neq \sqrt{۲ + \sqrt[۲]{۲}}$ ✗

گزینه ۴ صحیح است.

---

[۱] تألیفی پوران پژوهش تست ۵۶ صفحه ۲۶

تست ۱۹) دامنه تابع $f(x)=\frac{\sqrt{۴-x^۲}}{ln(x-۱)}$ کدام است؟ (مدیریت سراسری ۸۱)

۱) $[۱,۲)$ ۲) $[۱,۲]$ ۳) $(۱,۲]$ ۴) $(۱,۲)$

حل تکنیکی) این تست عبارت کسری است که صورت آن رادیکال با فرجه زوج می باشد یعنی x ای باید انتخاب شود که زیر رادیکال نامنفی (صفر یا مثبت) شود و مخرج هم ln دارد که باید جلوی آن عدد مثبت باشد

$x=۱$ در گزینه های ۱ و ۲ جزء دامنه حساب شده بر خلاف گزینه های ۳ و ۴ که باید مورد بررسی قرار گیرد :

$$f(x)=\frac{\sqrt{۴-x^۲}}{ln(x-۱)} \overset{x=۱}{\Longrightarrow} f(۱)=\frac{\sqrt{۴-۱}}{ln(۱-۱)}$$

جلوی ln باید بزرگتر از صفر باشدپس $x=۱$ جزء دامنه نمی باشد.(حذف گزینه های ۱ و ۲)

از بین گزینه های ۳ و ۴طبق تضاد گزینه عددی را انتخاب می کنیم که دریکی باشد و در دیگری خیر برای مثال $x=۲$ در گزینه ۳ جزء دامنه محسوب شده برخلاف گزینه ۴ که باید بررسی شود:

$$f(x)=\frac{\sqrt{۴-x^۲}}{Ln(x-۱)} \overset{x=۲}{\Longrightarrow} \frac{\sqrt{۴-۲^۲}}{\underbrace{Ln(۲-۱)}_{Ln۱=۰}}$$

مخرج کسر نباید صفر شود که $x=۲$ آن را صفر کرد پس عدد ۲ جزء دامنه محسوب نمی شود بنابراین گزینه ۳ حذف می شود . **گزینه ۴ صحیح است.**

تست۲۰) دامنه تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{log(۲x-x^۲)}$ کدام است؟

(مهندسی کشاورزی سراسری ۸۰)

۱) $\{۱\}$ ۲) $\{x: x\geq ۱\}$ ۳) $\{x: x\leq ۱\}$ ۴) $\{x: ۰<x<۲\}$

حل تکنیکی) جلوی log نباید صفر یا عدد منفی شود چرا که بی معنی می باشد و با توجه به رادیکال با فرجه زوج پس از قرار دادن x در صورت سؤال نباید $۰ < logx < ۱$ شود زیرا حاصل log منفی می شود که خلاف قاعده رادیکال با فرجه زوج می باشد بررسی گزینه ها:

$x = ۱۰$ در گزینه ۲ صحیح است بر خلاف ۳ گزینه دیگر که باید بررسی شود:

$$f(x) = \sqrt{lo\,g(۲x - x^۲)} \xRightarrow{x=۱۰} \sqrt{log(\underbrace{۲ \times ۱۰ - ۱۰^۲}_{-۸۰})}$$

جلوی log منفی شد که غیرقابل قبول پس $x = ۱۰$ جزء دامنه نمی باشد (حذف گزینه ۲)

$x = -۱۰$ در گزینه ۳ قابل قبول است برخلاف گزینه های دیگر که باید بررسی شود:

$$f(x) = \sqrt{log(۲x - x^۲)} \xRightarrow{x=-۱۰} \sqrt{log(۲(-۱۰) - (-۱۰)^۲)} = \sqrt{log - ۱۲۰}$$

جلوی log نمی تواند منفی باشد پس $x = -۱۰$ جزء دامنه نمی باشد (حذف گزینه ۳)

$x = \frac{۱}{۲}$ در گزینه ۴ قابل قبول است برخلاف گزینه ۱ که فقط عدد ۱ را جزء دامنه می داند که باید بررسی شود :

$$f(x) = \sqrt{log(۲x - x^۲)} \xRightarrow{x=\frac{۱}{۲}} \sqrt{log(۲\left(\frac{۱}{۲}\right) - (\frac{۱}{۲})^۲)} = \sqrt{log۱ - \frac{۱}{۴}}$$

$$= \sqrt{log\frac{۳}{۴}} \quad \rightarrow \quad ۰ < logx < ۱ \quad \rightarrow \quad \sqrt{\text{عدد منفی}}$$

حاصل $log\frac{۳}{۴}$منفی است که با توجه به رادیکال فرجه زوج غیرقابل قبول است (حذف گزینه ۴)

گزینه ۱ صحیح است.

تست۲۱) دامنه تابع باضابطه $f(x)=\sqrt{log\frac{۱۱x-۲x^۲}{۱۲}}$ کدام است؟(مدیریت و حسابداری ۸۹)

۱) $[\frac{۳}{۲},۶)$ ۲) $(\frac{۱}{۲},۳)$ ۳) $[\frac{۳}{۴},۴]$ ۴) $(۰,\frac{۱۱}{۲})$

حل تکنیکی) دو نکته مهم باید مد نظر قرار گیرد:

۱)جلوی log عدد ۰ یا منفی نمی تواند باشد.

۲) رادیکال فرجه زوج زیر آن باید عدد نامنفی باشد.

$x=۴$ در گزینه ۱ و ۳ و ۴ قابل قبول است برخلاف گزینه ۲ که باید بررسی شود:

$$f(x)=\sqrt{log\frac{۱۱x-۲x^۲}{۱۲}}\overset{x=۴}{\Longrightarrow}\sqrt{log\frac{۱۱(۴)-۲(۴)^۲}{۱۲}}=\sqrt{log\frac{۴۴-۳۲}{۱۲}}$$

$$=\sqrt{log\frac{۱۲}{۱۲}}=\sqrt{\underbrace{log۱}_{۰}}$$

$x=۴$ جزء دامنه می باشد (حذف گزینه ۲)

$x=۵$ در گزینه های ۱ و ۴ قابل قبول است بر خلاف گزینه ۳ که باید بررسی شود:

$$f(x)=\sqrt{log\frac{۱۱x-۲x^۲}{۱۲}}\overset{x=۵}{\Longrightarrow}\sqrt{log\frac{۱۱(۵)-۲(۵)^۲}{۱۲}}=\sqrt{log\frac{۵}{۱۲}}$$

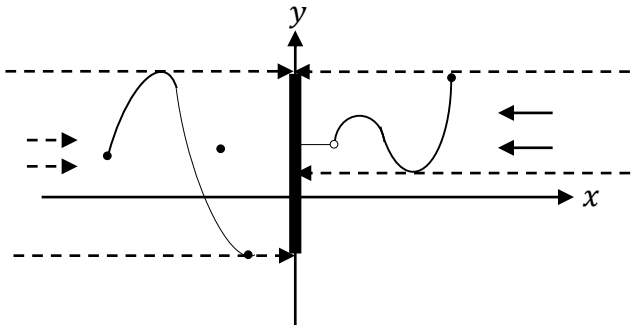
حاصل log منفی می باشد که با رادیکال فرجه زوج ناسازگاری دارد و جزء دامنه نمی باشد.

(حذف گزینه های ۱ و ۴)

گزینه ۳ صحیح است.

نحوه تعیین برد (۲ روش تکنیکی مهم):

برد تابع مجموعه تمام مقادیری است که می تواند به جای y قرار گیرد (برد همان تصویر روی محور y ها است) یعنی برای به دست آوردن برد یک تابع هرگاه از چپ و راست بر نمودار f نور بتابانیم سایه ی نمودار روی محور y ها برابر با برد تابع خواهد بود، به شکل زیر توجه کنید:



قسمت خاکستری روی محور y ها برد f را نشان می دهد.

تکنیک اول) کافیست اعدادی را به صورت قرینه [البته نباید در تابع ایجاد مشکل کند، یعنی در دامنه تابع وجود داشته باشد] به x در ضابطه صورت سؤال داده که این اعداد از ۰ تا ۳ حداکثر کافی است و ۱۰+ و ۱۰− را هم برای اطمینان می توان داد و سپس y های بدست آمده که برد تابع می باشند را با روش حذف گزینه و تحلیل سیر صعودی و نزولی اعداد مورد بررسی قرار داده وتست را به راحتی حل کنیم.

تکنیک دوم) با توجه به این که گزینه ها y ما (برد) می باشند پس عددی را از یکی از گزینه ها انتخاب کرده (اعداد طلایی ۱ + و۱ − و۰) و به y صورت سؤال می دهیم و سپس با طرفین وسطین، به توان رساندن و یا عملیات جبری مختلف باید ببینیم که x ای برای y که انتخاب کرده ایم پیدا می شود یا خیر، که اگر [$\Delta <$ ۰] شد یا به تناقض ریاضی رسیدیم.

مثلاً (۱− = ۱) و یا (۲− = ۲) و... نشان دهنده آن است که y که در ضابطه سؤال قرار داده‌ایم اصلاً منحنی سؤال را قطع نمی کند و x ای برای آن نداریم و باعث حذف گزینه می شود.

تست ۲۲) برد تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{e^{x-۱}}{e^{x}+۱}$ کدام است؟

(اقتصاد سراسری ۸۸ و ۷۶) (مدیریت سراسری ۷۶ و ۷۹)

۱) $(-۱,۱)$ ۲) R ۳) $[-۱,۱]$ ۴) $R-\{۰\}$

حل تکنیکی) تکنیک دوم برد را اجرا می کنیم یعنی عددی را از گزینه ها (معرف y یا همان برد) است انتخاب و به ضابطه $f(x)$ در صورت سؤال داده تا ببینیم x ای برای این y انتخابی از گزینه ها پیدا می شود یا خیر که در این جا از عدد طلایی $y = ۱$ استفاده می کنیم که در گزینه های ۲ و ۳ و ۴ آن را درست می دانند بر خلاف گزینه ۱ که باید بررسی شود :

$$f(x) = \frac{e^{x}-۱}{e^{x}+۱}$$

$$۱ = \frac{e^{x}-۱}{e^{x}+۱} \xRightarrow{\text{طرفین وسطین}} e^{x}+۱ = e^{x}-۱ \rightarrow ۱ = -۱ \times$$

به تناقض ریاضی رسیدیم پس برای $y = ۱$ نمی توان x ای را پیدا کرد و عدد ۱ جزء برد نمی باشد. حذف گزینه های ۲ و ۳ و ۴ زیرا این گزینه ها عدد ۱ را به غلط جزء برد می دانند.

گزینه ۱ صحیح است.

تست ۲۳) برد تابع حقیقی f به معادله $y = ۲ + e^{-x+۱}$ برابر است با؟ (حسابداری سراسری ۸۰)

۱) R ۲) $(-\infty, ۲]$ ۳) $R^{+} \cup \{۰\}$ ۴) $(۲, +\infty)$

حل تکنیکی) تکنیک اول برد را اجرا می کنیم یعنی دادن اعدادی به قرینه (از ۰ تا ۲) و $\overbrace{(-۱۰ \text{ و } +۱۰)}^{\text{در صورت لزوم}}$ به x در ضابطه صورت سؤال و بررسی سیر صعودی و نزولی و حذف گزینه

x	۰	۱	-۱	۲	-۲	۱۰
y	$۲+e$	$۲+e^{۰}$	$۲+e^{۲}$	$۲+e^{-۱}$	$۲+e^{۳}$	$۲+e^{-۹}$
	$۲+۲/۷ = ۴/۷$	$۲+۱ = ۳$	$۲+۷/۳ \cong ۹/۳$	$۲+۰/۳۵ \cong ۲/۳۵$	$۲+۲۰ \cong ۲۲$	$۲+\underbrace{\frac{۱}{e^{۹}}}_{\varepsilon}$

حذف گزینه ۲زیرا با توجه به اعداد بدست آمده به عنوان y مشخص است که Min مطلق (برد) ۴/۷ می باشد، ولی گزینه۲ عدد ۴/۷ را جزء برد محسوب نکرده و نیز برد هیچ گاه منفی نخواهد شد و اعداد سیر صعودی دارند بنابراین گزینه ۱ حذف می شود، چرا که اعداد منفی را شامل شده و گزینه ۳ هم حذف می شود زیرا عدد صفر را به غلط برد تابع معرفی کرده است .

گزینه ۴صحیح است.

تست ۲۴) برد تابع $f(x)=\frac{(x+۱)^۲}{x^۲+۱}$ کدام است؟ [۱]

۱) $[۰,۱]$ ۲) $[۰,۲]$ ۳) $[\frac{۱}{۲},۲]$ ۴) $[\frac{۱}{۲},۱]$

حل تکنیکی) تکنیک اول برد را اجرا می کنیم یعنی دادن اعداد به قرینه از (۰ تا ۳) $\overbrace{(۱۰+\text{و}-۱۰)}^{\text{در صورت لزوم}}$ به x در ضابطه سؤال و بدست آوردن y و در آخر مقایسه سیر صعودی و نزولی این اعداد با گزینه ها :

x	۰	۱	-۱
y	۱	$\underset{\text{حذف گزینه های ۴ و۱}}{\underbrace{۲}}$	$\underset{\text{حذف گزینه ۳}}{\underbrace{۰}}$

$$\begin{cases} x=۰ \rightarrow \frac{(۰+۱)^۲}{۰^۲+۱}=۱ \\ x=۱ \rightarrow \frac{(۱+۱)^۲}{۱^۲+۱}=\frac{۴}{۲}=۲ \\ x=-۱ \rightarrow \frac{(-۱+۱)^۲}{-۱^۲+۱}=\frac{۰}{۲}=۰ \end{cases}$$

گزینه ۲صحیح است.

---

[۱] پوران پژوهش تست ۵۹ صفحه ۴۶

تست۳۶) تابع با ضابطه ی $f(x)=\begin{cases} x^{۳} & x\geq ۰ \\ -x^{۲} & x<۰ \end{cases}$ در مجموعه اعداد حقیقی چگونه است؟

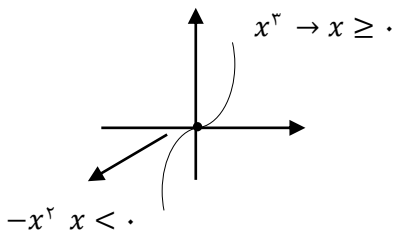
(کارشناسی ریاضی ۸۷)

۱)یک به یک- پوشا ۲) یک به یک- غیرپوشا

۳) غیر یک به یک پوشا ۴) غیر یک به یک- غیرپوشا

حل)

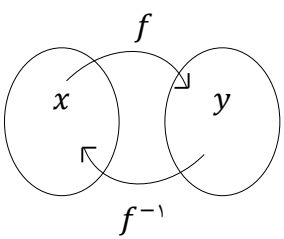
یک به یک و پوشا است.



گزینه ۱ صحیح است .

تابع معکوس:

تابعی که یک به یک باشد، معکوسش هم تابع است که به اصطلاح گفته می شود تابع، **معکوس پذیر** است و با نماد $f^{-۱}$ نشان می دهیم.



$$\Rightarrow f^{-۱}=\{(y,x)|(x,y)\in f\}$$

توجه: دو نوع سؤال مهم در تابع معکوس وجود داردکه با دو تست ۳۷ و ۳۸ آن را بررسی کرده ایم :

تست۳۷) اگر $f(x)=ln(x+\sqrt{x^{۲}+۱})$ باشد $f^{-۱}(ln۲)$ کدام است؟

(مدیریت و حسابداری سراسری ۹۰و۹۴)

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

$$f^{-۱}\underbrace{(Ln۲)}_{x}$$

$ln۲$ در تابع معکوس هم x را دارد ولی در تابع اصلی $ln۲$ حکم y را بازی می کند. با توجه به این که ضابطه سؤال داده شده بر حسب ضابطه اصلی $f(x)$ می باشد می توان به جای $f(x)$ عدد $ln۲$ را قرار داد و سپس با قاعده جایگذاری گزینه ها [حذف گزینه] تست را حل کرد.

$$f(x) = ln\left(x+\sqrt{x^۲+۱}\right) \rightarrow ln۲ = ln\left(x+\sqrt{x^۲+۱}\right) \rightarrow ۲ = x+\sqrt{x^۲+۱}$$

بررسی همه گزینه ها:

حاصل رادیکال عدد غیرصحیح است

$$۲ \overset{?}{=} \frac{۳}{۲}+\sqrt{(\frac{۳}{۲})^۲+۱} \rightarrow ۲ \overset{?}{=} \frac{۳}{۲}+\sqrt{\frac{۹}{۴}+۱} \rightarrow \overbrace{\sqrt{\frac{۱۳}{۴}}}^{\uparrow} \neq ۲ \qquad x=\frac{۳}{۲}$$ ✗گزینه۱)

حاصل رادیکال عدد غیرصحیح است

$$۲ \overset{?}{=} \frac{۳}{۲}+\sqrt{(\frac{۲}{۳})^۲+۱} \rightarrow ۲ \overset{?}{=} \frac{۲}{۳}+\sqrt{\frac{۴}{۹}+۱} \rightarrow \overbrace{\sqrt{\frac{۱۳}{۹}}}^{\uparrow} \neq ۲ \qquad x=\frac{۲}{۳}$$ ✗گزینه۲)

$$۲ \overset{?}{=} \frac{۳}{۴}+\sqrt{(\frac{۳}{۴})^۲+۱} \rightarrow ۲ \overset{?}{=} \frac{۳}{۴}+\overbrace{\sqrt{\frac{۹}{۱۶}+۱}}^{\sqrt{\frac{۲۵}{۱۶}}} \rightarrow ۲ = \frac{۳}{۴}+\frac{۵}{۴} \qquad x=\frac{۳}{۴}$$ ✓گزینه۳)

$$۲ \overset{?}{=} \frac{۴}{۳}+\sqrt{(\frac{۴}{۳})^۲+۱} \rightarrow ۲ \overset{?}{=} \frac{۴}{۳}+\overbrace{\sqrt{\frac{۱۶}{۹}+۱}}^{\sqrt{\frac{۲۵}{۹}}} \rightarrow ۲ \neq \frac{۴}{۳}+\frac{۵}{۳} \qquad x=\frac{۴}{۳}$$ ✗گزینه۴)

گزینه ۳ صحیح است.

تست ۳۸) اگر $f(x) = x^{۲} - ۲x + ۴ \;;\; x > ۱$ آن گاه معادله $f^{-۱}$ کدام است؟

(مدیریت سراسری ۸۱)

۱) $y = ۱ + \sqrt{x - ۳}$ ۲) $y = ۱ + \sqrt{x + ۳}$

۳) $y = ۱ \pm \sqrt{x - ۳}$ ۴) $y = -۱ \pm \sqrt{x - ۳}$

حل تکنیکی) در این گونه سؤالات باید یک نقطه دلخواه که در دامنه تابع وجود دارد به x تابع اصلی داده و مقدار y را به دست آورید حال گزینه ها که تابع معکوس هستند جای x و y عوض می شود یعنی اگر به گزینه ها عدد y را دهید باید عدد x را تحویل دهند در غیر این صورت ان گزینه حذف خواهد شد .

$$x = ۲ \quad \rightarrow \quad f(۴) = ۲^{۲} - ۲(۲) + ۴ = ۴ \quad \rightarrow \quad f = (\overset{x}{۲}, \overset{y}{۴})$$

حال در تابع معکوس یعنی $f^{-۱}(\vec{۴}, ۲)$ مقدار $(x) = ۴$ را در گزینه ها قرار دهیم باید $y = ۲$ بدست آید:

(گزینه ۱) $y = ۱ + \sqrt{x - ۳} \overset{x=۴}{\Longrightarrow} y = ۱ + \sqrt{۴ - ۳} = ۲ = ۲$ ✓

(گزینه ۲) $y = ۱ + \sqrt{x - ۳} \overset{x=۴}{\Longrightarrow} y = ۱ + \sqrt{۴ + ۳} = ۱ + \sqrt{۷} \neq ۲$ ✗

(گزینه ۳) $y = ۱ \pm \sqrt{x - ۳} \overset{x=۴}{\Longrightarrow} y = ۱ \pm \sqrt{۴ - ۳} = ۱ \pm ۱ \rightarrow \begin{cases} y = ۰ \\ y = ۲ \end{cases}$ ✗یک عدد نه دو عدد

(گزینه ۴) $y = -۱ \pm \sqrt{x - ۳} \overset{x=۴}{\Longrightarrow} y = -۱ \pm \sqrt{۴ - ۳} = -۱ \pm \sqrt{۱} \rightarrow \begin{cases} y = ۰ \\ y = -۲ \end{cases} \neq ۲$ ✗

گزینه ۱ صحیح است .

مجموعه سوالات کنکور

سراسری و آزاد

فصل

تـــابـــع

حل تست های تابع

پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته مدیریت

۱. گزینه ۱ صحیح است .

حل کلاسیک : ابتدا معکوس تابع را بدست می آوریم و بعد معادله تابع معکوس را با معادله نیمساز ربع اول تلاقی می دهیم:

$$y=\frac{x}{x+1} \rightarrow \ x=\frac{y}{y+1} \ \rightarrow \ y=xy+x \ \rightarrow \ y-xy=x \ \rightarrow \ y(1-x)=x$$

$$\begin{cases} y=\frac{x}{x+1} \\ y=x \end{cases} \rightarrow x=\frac{x}{1-x} \ \rightarrow \ x(1-x)=x \ \rightarrow \ 1-x=1 \ \rightarrow \ x=0$$

حل تکنیکی :

تذکر: نقطه تقاطع منحنی تابع معکوس با خط $y=x$ (نیمساز ربع اول)، همان نقطه تقاطع منحنی تابع با $y=x$ است یعنی به جای این که تابع $y=\frac{x}{x+1}$ را با منحنی $f^{-1}(x)$ قطع دهیم، کافی است خط $y=x$ را با منحنی $f(x)$ قطع دهیم :

$$\begin{cases} y=\dfrac{x}{x+1} \\ y=x \end{cases} \xRightarrow{\text{با یکدیگر قطع میدهیم}} x=\frac{x}{x+1} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} x^2+x=x \rightarrow x^2=0 \rightarrow x=0$$

---

۲. گزینه ۳ صحیح است .

حل کلاسیک : دامنه تابع، کل مجموعه اعداد حقیقی و در نتیجه متقارن است.

$$f(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2} \rightarrow f(-x)=\sqrt[3]{(-x+1)^2}+\sqrt[3]{(-x-1)^2}$$

$$=\sqrt[3]{x^2-2x+1}+\sqrt[3]{x^2+2x+1}=\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)^2}=f(x) \rightarrow \text{زوج}$$

حل تکنیکی : برای این که تابع زوج و یا فرد باشد باید دو شرط برقرار باشد.

حال بین گزینه های ۱ و ۲ باید عددی انتخاب شود که در یکی باشد و در دیگری خیر پس $x = \frac{۱}{۲}$ را انتخاب می کنیم که در گزینه ۱ جز دامنه محسوب شد برخلاف گزینه ۲ که باید بررسی شود :

$$\sqrt{x} + \frac{x}{[x]} \overset{x=\frac{۱}{۲}}{\Longrightarrow} \sqrt{\frac{۱}{۲}} + \frac{\frac{۱}{۲}}{[\frac{۱}{۲}]} = ۰ \rightarrow$$

مخرج کسر صفر شد که قابل قبول نیست پس گزینه ۱ حذف می شود.

---

۲۹۱. **گزینه ۳ صحیح است .** حل کلاسیک :

$$h(x) = gof(x) = g\big(f(x)\big) = ln(x + \sqrt{x^۲ + ۱})$$

$$y = ln(x + \sqrt{x^۲ + ۱}) \xrightarrow{\text{معکوس}} x = ln\big(y + \sqrt{y^۲ + ۱}\big) \rightarrow e^x = y + \sqrt{y^۲ + ۱}$$

$$e^x - y = \sqrt{۱ + y^۲} \xrightarrow{\text{طرفین را به توان ۲ میرسانیم}} (e^x - y)^۲ = ۱ + y^۲$$

$$e^{۲x} - ۲ye^x + y^۲ = ۱ + y^۲$$

$$۲ye^x = e^{۲x} - ۱ \rightarrow y = \frac{e^{۲x}}{۲e^x} - \frac{۱}{۲e^x} \rightarrow y = \frac{۱}{۲}e^x - \frac{۱}{۲}e^{-x}$$

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{۲} = shx \ \text{(سینوس هیپربولیک)}$$

حل تکنیکی : در این نوع مسائل ترکیبی باید ابتدا ترکیب تابع خواسته شده [در اینجا gof] می باشد را ابتدا تشکیل داده سپس با روش عددگذاری در ترکیب تابع و گزینه ها جواب را به دست می آوریم :

یادآوری :

$$\begin{cases} e^{lnu} = u \\ e^{ln(-u)} = \frac{۱}{u} \end{cases}$$

$$gof(x) = g\big(f(x)\big) = ln(x + \sqrt{x^۲ + ۱}) \xRightarrow{\text{عدد گذاری}} (x = ۱ \rightarrow y = ln(۱ + \sqrt{۲})$$

حال گزینه ای صحیح است که اگر به جای x عدد $ln(۱+\sqrt{۲})$ را بدهیم حاصل y آن ۱ شود یعنی $f^{-۱}(ln(۱+\sqrt{۲},۱)$

گزینه ۱) $\frac{e^{x}-۱}{۲} \xrightarrow{ln(۱+\sqrt{۲})} \frac{e^{ln(۱+\sqrt{۲})}-۱}{۲} = \frac{۱+\sqrt{۲}-۱}{۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \neq ۱$

گزینه ۳) $shx = \frac{e^{x}-e^{-x}}{۲} = \frac{e^{ln(۱+\sqrt{۲})}-e^{-ln(۱+\sqrt{۲})}}{۲} = \frac{(۱+\sqrt{۲})-\frac{۱}{۱+\sqrt{۲}}}{۲} = \frac{(۱+۱/۴)-\frac{۱}{۱+۱/۴}}{۲}$

$$\frac{۲/۴-\frac{۱}{۲/۴}}{۲} = \frac{۲/۴-\frac{۱۰}{۲۴}}{۲} = \frac{۲/۴-۰/۴}{۲} = \frac{۲}{۲} = ۱ = ۱$$

---

۲۹۲. **گزینه ۱ صحیح است.** حل کلاسیک :

$$y = \frac{۱-x}{۱+x} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین میگریم}} y(۱+x) = ۱-x \rightarrow y+yx = ۱-x$$

$$yx+x = ۱-y \rightarrow x(y+۱) = ۱-y \rightarrow x = \frac{۱-y}{۱+y} \rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{۱-x}{۱+x} = y$$

حل نکته ای : توابعی که به صورت $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ تعریف می شوندمعکوس آن یک تابع هموگرافیک می باشد و اگر $(a+d=۰)$ شود f با $f^{-۱}$ بر هم منطبق می باشند یعنی ضابطه $f(x)$ با $f^{-۱}(x)$ با هم برابر ند $\xLeftarrow{a+d=۰} f(x) = f^{-۱}(x)$

$$f(x) = \frac{\overbrace{۱}^{b}\overbrace{-۱}^{a}x}{\underbrace{۱}_{d}+\underbrace{۱}_{c}x} \rightarrow a+d = (-۱)+(۱) = ۰ \rightarrow f(x) = f^{-۱}(x)$$

---

۲۹۳. **گزینه ۳ صحیح است.**

حل : در یک جفت مرتب باید مولفه های اول با هم برابر باشند و مولفه های دوم نیز باهم برابر باشند بنابراین می توان گفت :

$$\left(\overbrace{y-۲}^{\text{مؤلفه اول}}, \underbrace{۲x+۱}_{\text{مؤلفه دوم}}\right) = \left(\overbrace{x-۱}^{\text{مؤلفه اول}}, \underbrace{y+۲}_{\text{مؤلفه دوم}}\right)$$

$$\begin{cases} y-۲ = x-۱ \\ ۲x+۱ = y+۲ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y-x = -۱+۲ \\ ۲x-y = ۲-۱ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y-x = ۱ \\ -y+۲x = ۱ \end{cases}$$

$$x = ۲$$

$$y - x = ۱$$

$$\overset{x=۲}{\Longrightarrow} \quad y - ۲ = ۱ \quad \rightarrow \quad y = ۳$$

$$۴y - ۳x \overset{\substack{x=۲\\y=۳}}{\Longrightarrow} ۴(۳) - ۳(۲) = ۱۲ - ۶ = ۶$$