

ریاضیات DLM

آموزش سه بعدی مفاهیم

بسط دو جمله‌ای

طراح، مؤلف و گردآورنده:

امین بنیاد گذار

ویراستار علمی:

حسین خدای

آموزش کلاسیک بسط دو جمله‌ای

- تعریف بسط دو جمله‌ای ۵
- مثث پاسکال ۶
- ضریب جمله x^r ۹
- ویژگیهای بسط دو جمله ای ۹
- تعداد جملات گویا در بسط دو جمله ای ۱۵

سوالات آزمون کارشناسی ارشد رشته های مدیریت ، حسابداری و اقتصاد

- سوالات آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته مدیریت ۱۸
- سوالات آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی رشته مدیریت ۱۹
- سوالات آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته حسابداری ۲۰
- سوالات آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی رشته حسابداری ۲۱
- سوالات آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته اقتصاد ۲۱
- سوالات آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی رشته اقتصاد ۲۲

حل سوالات آزمون کارشناسی ارشد رشته های مدیریت و حسابداری و اقتصاد

- پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته مدیریت ۲۴
- پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد رشته مدیریت ۲۹
- پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته حسابداری ۳۲
- پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد رشته حسابداری ۳۵
- پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته اقتصاد ۳۷
- پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد رشته اقتصاد ۴۱

🔔 **نکته** برای بدست آوردن مجموع جبری ضرایب در یک چند جمله ای کافیت که به جای مولفه ها مقدار یک را قرار دهیم. (به تست زیر توجه کنید)

تست ۱) مجموع ضرایب در بسط $(a + b + c)^5$ کدام است؟ (حسابداری - سراسری ۸۳)

۱) ۱۲۵ ۲) ۱۵۰ ۳) ۲۲۵ ۴) ۲۴۳

حل) کافیت که به جای مولفه ها (یعنی بجای a, b, c) ، عدد یک قرار دهیم.

$$(a + b + c)^5 \xrightarrow{a=b=c=1} (1 + 1 + 1)^5 = 3^5 = 243$$

گزینه ۴ صمیع است .

🔔 **نکته** تعداد جملات بسط $(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n$ برابر است با $\binom{n+k-1}{k-1}$ که

در این رابطه، n توان بسط است و k هم تعداد جملات داخل بسط.

تست ۲) بسط عبارت $(a + b + c + d)^8$ چند جمله دارد؟

۱) ۸۴ ۲) ۱۶۰ ۳) ۱۶۵ ۴) ۲۲۰

حل کلاسیک) تعداد جملات بسط $(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n$ برابر است با: $\binom{n+k-1}{k-1}$

$$\text{تعداد جملات} = \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{8+4-1}{4-1} = \binom{11}{3} = \frac{11!}{3!8!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8!}{8! \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$\frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2} = \frac{330}{2} = 165$$

حل تکنیکی) می توان به روش تکنیکی این تست را حل کرد، یعنی به این صورت که بجای نوشتن کل عبارت و محاسبه اون، راه سریعتر اینه که بیاییم تنها به تعداد اعدادی که در مخرج کسر ضرب شده اند، در صورت کسر، اعداد متوالی را در هم ضرب کنیم. مثلا در این سؤال، برای محاسبه ترکیب $\binom{11}{3}$ چون $3! = 6$ است، پس ابتدا در مخرج کسر حاصل $3!$ رو می نویسیم و

چون در مخرج کسر، ۳ عبارت در هم ضرب شده‌اند ($3 \times 2 \times 1$)، پس در صورت کسر هم بجای محاسبه کامل $11!$ (بصورت $11 \times 10 \times 9 \times 8 \times \dots \times 1$) می‌تونیم فقط ۳ تا ضرب اول رو بنویسیم (یعنی $11 \times 10 \times 9$) چون تو مخرج کسر، فقط ۳ تا ضرب نوشته‌ایم:

$$\text{تعداد جملات} = \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{11+4-1}{4-1} = \binom{14}{3} = \frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2 \times 1} = 165$$

گزینه ۳ صحیح است.

ضرب جمله x^r

در بسط $(px^a + \frac{q}{x^b})^n$ برای بدست آوردن ضریب جمله x^r ابتدا مقدار k را از رابطه $k = \frac{na-r}{a+b}$ بدست آورده و سپس از رابطه $\binom{n}{k} p^{n-k} q^k$ ضریب جمله x^r را بدست می‌آوریم.

مثال ۴) در بسط دو جمله ای $(x^2 - \frac{2}{x})^7$ ضریب جمله ی x^5 را بدست آورید؟

$$k = \frac{na-r}{a+b} = \frac{7 \times 2 - 5}{2+1} = \frac{9}{3} = 3$$

$$x^5 \text{ ضریب} = \binom{7}{3} (1)^{7-3} (-2)^3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} \times (-8) = 35 \times -8 = -280$$

ویژگیهای بسط دو جمله ای:

۱) بسط دو جمله ای دارای $n+1$ جمله و برحسب a و b ، چند جمله ای درجه n متقارن و همگن است. مثلاً بسط $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ دارای $3+1=4$ جمله است.

۲) این بسط زمانی که برحسب توان نزولی a نوشته شود، با جمله a^n شروع و با جمله b^n ختم می شود.

(۳) در هر جمله در مقایسه با جمله قبل، یک واحد از توان a کم و یک واحد به توان b اضافه می شود. مثلاً در بسط $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ توان در ابتدا ۳ بوده (a^3) که بتدریج کم شده و به صفر رسیده: $a^3b^2 = b^3$

(۴) ضریب هر جمله برابر است با حاصلضرب ضریب جمله قبل در توان a در آن جمله (جمله قبل)، تقسیم بر تعداد جمله های قبل.

مثلاً: در بسط ضریب جمله سوم (یعنی عدد ۳ در جمله) رو می تونیم به این صورت بدست بیاریم: توان a در جمله قبل (جمله دوم)

$$\text{ضریب جمله قبل (ضریب جمله دوم)} \times \text{توان } a \text{ در جمله قبل (جمله دوم)} = \frac{3 \times 3}{2} = 3$$

تعداد جملات قبل از جمله سوم

ضریب جمله سوم :

(۵) جمله هائی که از دو طرف بسط، به یک فاصله قرار داشته باشند، ضریب های مساوی دارند. مثلاً در بسط $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ جملات اول و آخر ضرایب مساوی دارن (۱)، زیرا از دو طرف بسط به یک اندازه فاصله دارن (جمله a^4 اولین جمله از سمت چپ و جمله b^4 هم اولین جمله از سمت راسته)، بهمین ترتیب، جملات $4a^3b$ و $4ab^3$ هم ضرایب مساوی دارن (۴) چون یکی از سمت راست، جمله دومه و دیگری از سمت چپ جمله دومه.

(۶) مجموع ضرایب بسط دو جمله $(a+b)^n$ برابر است با: 2^n

مثلاً مجموع ضرایب در بسط $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ برابر با حاصلجمع ضرایب (۸ = ۱ + ۳ + ۳ + ۱) که این عدد ۸ رو میشه از رابطه $2^3 = 2^3 = 8$ هم بدست آورد.

یادآوری: قبلاً یادگرفتیم که برای بدست آوردن مجموع ضرایب بسط، کافیه که بجای جملات داخل پرانتز عدد یک قرار بدیم و سپس اونا رو به توان بیرون پرانتز برسونیم،

یعنی در بسط $(a + b)^n$ اگه بیایم بجای a و b عدد ۱ رو قرار بدیم به رابطه 2^n می‌رسیم: $(a + b)^n = (1+1)^n = 2^n$

(۷) در بسط $(ax + by)^n$ مجموع ضرایب برابر است با $(a + b)^n$ ، به عبارت دیگر برای پیدا کردن مجموع ضرایب یک بسط کافی است به جای حروف اصلی عدد ۱ قرار دهیم.

مثال ۵) اگر مجموع ضرایب $(x + y)^{2n}$ به اندازه ۲۴۰ واحد بیش از مجموع ضرایب $(x + y)^n$ باشد، مجموع ضرایب $(x + y)^n$ را بدست آورید.
(حل)

$$\begin{cases} (x + y)^{2n} \xrightarrow{x=y=1} (1 + 1)^{2n} = 2^{2n} \\ (x + y)^n \xrightarrow{x=y=1} (1 + 1)^n = 2^n \end{cases}$$

$$2^{2n} = 240 + 2^n \rightarrow 2^{2n} - 2^n - 240 = 0 \rightarrow (2^n)^2 - 2^n - 240 = 0$$

$$(2^n - 16)(2^n + 15) = 0 \rightarrow \begin{cases} 2^n - 16 = 0 \rightarrow 2^n = 16 \checkmark \\ 2^n + 15 = 0 \rightarrow 2^n = -15 \times \end{cases}$$

بنابراین مجموع ضرایب $(x + y)^n$ برابر $2^n = 16$ می باشد.

(۸) مجموع توان x و y در هر جمله برابر n می باشد.

مثلا در بسط $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ در تمام جملات، جمع توان a و b برابر $n=3$ است.

(۹) جملات بسط $(x - y)^n$ یک در میان مثبت و منفی هستند، بصورتیکه جملات زوج منفی و جملات فرد مثبت می باشند.

به عنوان مثال بسط $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ جملات اول و سوم (جملات فرد) ضریب مثبت دارن ولی جمله دوم (جمله زوج) ضریبش منفیه.

۱۰) هرگاه ضریب جمله p اُم با ضریب جمله k اُم مساوی باشد، در این صورت $p + k = n + ۲$ مثلا در بسط $(a + b)^۳ = a^۳ + ۳a^۲b + ۳ab^۲ + b^۳$ ضرایب جملات دوم ($p = ۲$) و سوم ($k = ۳$) باهم برابرند، در نتیجه بین p ، k و n رابطه زیر برقراره:

$$p + k = n + ۲ \rightarrow ۲ + ۳ = ۳ + ۲$$

۱۱) در بسط $(x + \frac{m}{x})^n$ جمله فاقد x (مستقل از x) در صورتی که n زوج باشد، جمله وسط بسط است و اگر n فرد باشد جمله مستقل از x وجود ندارد.

۱۲) در دو جمله ای $(x^a + \frac{1}{x^b})^n$ برای محاسبه جمله مستقل از x ابتدا مقدار k را از رابطه $k = \frac{na}{a+b}$ محاسبه نموده و سپس حاصل $\binom{n}{k}$ را بدست می آوریم که همان جمله مستقل از x است.

۱۳) جمله یا جملات وسط دارای بزرگترین ضریب هستند. اگر n زوج باشد، شماره ی

$$\text{جمله ی وسط } \frac{n+۲}{۲} \text{ و اگر } n \text{ فرد باشد، شماره جملات وسط عبارتند از } \frac{n+۲}{۲} \text{ و } \frac{n+۱}{۲}$$

مثال از حالتی که n زوج باشد: در بسط $(a - b)^۲ = a^۲ - ۲ab + b^۲$ جمله دوم در وسطه

$$\text{بسطه که شماره ی این جمله رو می تونیم از رابطه } \frac{n+۲}{۲} = \frac{۲+۲}{۲} = ۲ \text{ هم بدست بیاریم.}$$

مثال از حالتی که n فرد باشد: در بسط $(a + b)^۳ = a^۳ + ۳a^۲b + ۳ab^۲ + b^۳$ جملات

دوم و سوم در وسط بسط قرار دارن که شماره ی این جمله ها رو می تونیم از رابطه

$$\frac{n+۲}{۲} = \frac{۳+۲}{۲} = ۳ \text{ و } \frac{n+۱}{۲} = \frac{۳+۱}{۲} = ۲ \text{ بدست بیاریم.}$$

۱۴) اگر بخواهیم مجموع ضرایب فاقد یکی از جملات را بدست آوریم، به جای متغیرها عدد ۱ و

به جای متغیری که در جمله نباشد عدد ۰ را قرار می دهیم.

مثال ۶) مجموع ضرایب جملاتی که فاقد z در بسط $(۲x + y - z)^۴$ باشد کدام است؟

$$\text{حل) } (۲ + ۱ - ۰)^۴ = ۳^۴ = ۸۱$$

۱۵) اگر مجموع ضرایب بسط $(a - b)^n$ را A بنامیم و مجموع ضرایب $(a + b)^n$ را B ، آنگاه داریم:

$$\text{مجموع ضرایب مثبت بسط } (a - b)^n = \frac{A + B}{2}$$

$$\text{مجموع ضرایب منفی بسط } (a - b)^n = \frac{A - B}{2}$$

مثال ۷) مجموع ضرایب مثبت بسط $(2x - 5y)^4$ را بیابید؟

حل) برای استفاده از فرمول نکته ۱۵، اول باید بیابیم A و B رو بدست بیاریم.

برای بدست آوردن A باید در بسط $(a \equiv b)^n$ بجای متغیرها عدد ۱ رو قرار بدیم و برای

محاسبه B هم در بسط $(a \oplus b)^n$ باید بجای متغیرها عدد ۱ رو قرار بدیم:

$$A = (2 - 5)^4 = 81, \quad B = (2 + 5)^4 = 2401$$

$$\text{مجموع ضرایب مثبت} = \frac{81 + 2401}{2} = \frac{2482}{2} = 1241$$

۱۶) برای بدست آوردن عدد ثابت بسط، کافیت به جای متغیرها، عدد صفر قرار دهیم.

مثال ۸) عدد ثابت در بسط $(3x + 2y + 2)^5$ کدام است؟

حل) جای متغیرها ۰ قرار می دهیم:

$$(3 \times 0 + 2 \times 0 + 2)^5 = 2^5 = 32$$

۱۷) تعداد جملات متمایز (غیر مشابه) در بسط $(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n$ از رابطه زیر تعیین می شود:

$\text{تعداد جملات غیر مشابه} = \frac{k(k+1)(k+2) \dots (k+n-1)}{n!}$

مثال ۹) اگر n عدد صحیح و مثبتی باشد، ضریب x^n در بسط دو جمله‌ای $(1+x)^{2n}$ را پیدا کنید؟

حل) در بسط دو جمله‌ای $(a+b)^n$ جمله عمومی بصورت زیر می باشد:

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\binom{2n}{k} (1)^{2n-k} x^k = \binom{2n}{k} x^k$$

$$x^n \text{ ضریب} = \binom{2n}{n} = \frac{2n!}{n!(2n-n)!} = \frac{2n!}{n!n!} = \frac{2n!}{(n!)^2}$$

۱۸) در بسط $(x^a + y^b)^n$ برای تعیین جمله ای که (p) شماره جمله‌ی مورد نظر است

الف) شامل x^m باشد: $\frac{m}{a} = n - p + 1$

ب) شامل y^k باشد: $\frac{k}{b} = p - 1$

مثال ۱۰) در بسط $(x^2 + 2y^3)^{21}$ چندمین جمله شامل x^{18} و چندمین جمله شامل y^{12} می باشد؟

حل)

$$\frac{18}{2} = 21 - p + 1 \rightarrow p = 13 \text{ (جمله سیزدهم)}$$

$$\frac{12}{3} = p - 1 \rightarrow p = 5 \text{ (جمله پنجم)}$$

تعداد جملات گویا در بسط دو جمله ای:

اگر بخواهیم در بسط $(\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y})^n$ تعداد جمله‌های گویا را نسبت به x و y پیدا کنیم، باید مضارب a و b را تا عدد n در دو ردیف بنویسیم، آنگاه تعداد زوج اعدادی که مجموع آن دو برابر n باشد جواب سوال است.

(مثال) تعداد جملات گویای بسط $(\sqrt[43]{x} + \sqrt[43]{y})^{43}$ را بدست آورید.

طبق دستورالعمل فوق، ابتدا می‌ایم مضارب a و b (یعنی ۶ و ۷) رو تا عدد $n=43$ در دو ردیف می‌نویسیم. و سپس جواب ما برابر میشه با تعداد زوج اعدادی (از ردیف ۷ و ۶) که مجموع‌شون برابر $n=43$ بشه. که در اینجا ما برای اختصار و سرعت عمل، ما فقط اون زوج اعدادی رو نوشته‌ایم که مجموع‌شون میشه ۴۳ (یعنی زوج (۷ و ۳۶)).

همون‌طور که می‌بینید تعداد این زوجها فقط یکی است، پس می‌گیریم این بسط فقط یک جمله گویا دارد.

$\sqrt[43]{x}$ عامل	۰	توان‌های گویا کننده عامل	۷	۱۴	۲۱	۲۸	۳۵	۴۲
$\sqrt[43]{y}$ عامل	-	توان‌های گویا کننده عامل	۳۶	۷	-	-	-	-

مجموعه سوالات

سراسری و آزاد

« بسط دو جمله ای »

حل سوالات سراسری و آزاد

« بسط دو جمله ای »

۳۵. گزینه ۱ صحیح است. حل کلاسیک :

در بسط دو جمله ای $(a + b)^n$ جمله عمومی عبارتست از:

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$(\sqrt{x} - \frac{1}{x})^{10} (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x})^{10} = \binom{10}{k} (x^{\frac{1}{2}})^{10-k} (-x^{-1})^k = \binom{10}{k} (-1)^k x^{\frac{10-k}{2}} x^{-k}$$

به منظور داشتن ضریب x^2 باید:

$$x^{\frac{10-k}{2}-k} = x^2 \rightarrow \frac{10-k}{2} - k = 2 \rightarrow \frac{10-k}{2} = 2 + k \rightarrow 10 - k = 4 + 2k \rightarrow k = 2$$

$$x^2 \text{ ضریب} = \binom{10}{2} (-1)^2 = \frac{10!}{2!8!} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{2 \times 8!} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$$

حل تکنیکی :

توان جمله خواسته شده $= (k)$ توان دومین جمله $+ (n - k)$ توان اولین جمله

$$\frac{1}{2} \times (10 - k) + (-1)(k) = 2 \rightarrow \frac{1}{2}k - k = 2 \rightarrow \frac{1}{2}k = 2 + k \rightarrow k = \frac{4}{1} = 4$$

$$\binom{n}{k} a^{n-k} b^k \rightarrow \binom{10}{2} 1^8 (-1)^2 = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$$

۳۶. گزینه ۲ صحیح است. حل کلاسیک :

$$(\sqrt{x} + \frac{1}{x})^{10} \rightarrow k + 1 = 3 \rightarrow k = 2$$

$$T_{r+1} = \binom{10}{r} (x^{\frac{1}{2}})^{10-r} (\frac{1}{x})^r = \binom{10}{r} x^{\frac{10-r}{2}} (x^{-1})^r = \binom{10}{r} x^{\frac{10-r}{2}-r} = \frac{10!}{r!8!} x^{\frac{10-r}{2}-r} = \frac{10 \times 9}{2} x^{\frac{10-r}{2}-r} = 45 x^{\frac{10-r}{2}-r}$$

حل تکنیکی :

$$\begin{cases} \text{ضریب جمله } n \text{ ام بسط} = x^{n-1} \\ \text{ضریب جمله سوم بسط} = x^{3-1} = x^2 \end{cases}$$

توان جمله خواسته شده $= (k)$ توان دومین جمله $+ (n - k)$ توان اولین جمله

$$\frac{1}{2} \times (10 - k) + (-1)(k) = 2 \rightarrow \frac{1}{2}k - k = 2 \rightarrow \frac{1}{2}k = 2 + k \rightarrow k = \frac{4}{1} = 4$$

$$\rightarrow 3 = \frac{3}{2}k \rightarrow 6 = 3k \rightarrow k = \frac{6}{3} \rightarrow k = 2$$

$$\binom{n}{k} a^{n-k} b^k \rightarrow \binom{10}{2} 1^8 (1)^2 = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$$

۳۷. گزینه ۲ صحیح است. حل کلاسیک :

$$k = \frac{np - r}{p + q} \rightarrow k = \frac{8(1) - 2}{1 + 1} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x^2 \text{ ضریب} = \binom{n}{k} (2)^{n-k} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \binom{8}{3} 2^{8-3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{8!}{3! 5!} 2^5 \left(\frac{1}{2^3}\right) = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} \times 2^2 = 224$$

حل تکنیکی :

توان جمله خواسته شده $= (k)$ توان دومین جمله $+ (n - k)$ توان اولین جمله

$$1 \times (8 - k) + -1 (k) = 2 \rightarrow 8 - k - k = 2 \rightarrow 8 - 2k = 2 \rightarrow 6 = 2k \rightarrow k = 3$$

$$\binom{n}{k} a^{n-k} b^k \rightarrow \binom{8}{3} 2^{8-3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \binom{8}{3} 2^5 \left(\frac{1}{2^3}\right) = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} \times 2^2 \times \frac{1}{2} = 56 \times 4 = 224$$