# ریاضیات DLM

## آموزش سه‌بعدی مفاهیم

# آنالیز ترکیبی


طراح، مؤلف و گردآورنده:

امین بنیاد گذار

ویراستار علمی:

حسین خدامی

**عنوان** **صفحه**

## آموزش کلاسیک آنالیز ترکیبی


فاکتوریل ..... ۵

تبدیل یا جایگشت ..... ۵

انواع جایگشت (تبدیل) ..... ۵

الف) تعداد جایگشت های خطی $n$ حرف ..... ۶

دو اصل در شمارش ..... ۷

تعمیم اصل ضرب (به بیش از ۲ عمل) ..... ۸

ب) جایگشت‌های دایره‌ای (تبدیل‌های حلقوی) ..... ۹

جایشگت دایره‌ای یک‌درمیان ..... ۹

تبدیلها (جایشگت‌های) با تکرار ..... ۱۰

جایگشت اشیاء همنوع در کنار هم ..... ۱۰

ترتیب (تعداد جایگشت‌های $r$ شی از $n$ شی) ..... ۱۲

تعداد جایگشت‌های $r$ شی از $n$ شی متمایز با مجاز بودن تکرار ..... ۱۴

ترکیب ..... ۱۵

تعداد حالات تقسیم $n$ شی مشابه بین $k$ نفر ..... ۱۸

تعداد حالات تقسیم توزیع $n$ شی متمایز (نامشابه) بین $k$ نفر ..... ۱۸

ترکیبها یا جایشگتهای با تکرار ..... ۲۳

## سوالات آزمون کارشناسی ارشد رشته های مدیریت ، حسابداری و اقتصاد

سوالات آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته مدیریت ..... ۳۰

سوالات آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی رشته مدیریت..... ۳۱

سوالات آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته حسابداری..... ۳۲

سوالات آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی رشته حسابداری..... ۳۳

سوالات آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته اقتصاد..... ۳۳

سوالات آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی رشته اقتصاد..... ۳۴

## حل سوالات آزمون کارشناسی ارشد رشته های مدیریت و حسابداری و اقتصاد

پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته مدیریت..... ۳۸

پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد رشته مدیریت ..... ۴۱

پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته حسابداری ..... ۴۴

پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد رشته حسابداری..... ۴۵

پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته اقتصاد ..... ۴۶

پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد رشته اقتصاد..... ۴۸

## فاکتوریل:

در مجموعه اعداد طبیعی، حاصلضرب $n$ عدد متوالیِ ۱، ۲، ۳، ۰۰۰۰۰۰ و $n$ را «فاکتوریل $n$» می‌نامیم و آن را با نماد $n!$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$n! = n(n-۱)(n-۲) \times ۰۰۰۰۰۰ \times ۲ \times ۱$$

❄**قرارداد**: همواره در محاسبات !۰و !۱ را مساوی با یک قرار می دهیم.

یعنی: $۰! = ۱! = ۱$

**مثال ۱)** عبارات زیر را ساده کنید.

$$۴! = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴$$

$$۳! = ۳ \times ۲ \times ۱ = ۶$$

$$۴! = ۴ \times ۳! = ۴ \times ۶ = ۲۴$$

**نتیجه**: فاکتوریل هر عدد را می توانیم بصورت حاصل‌ضرب آن عدد، در فاکتوریلی که یک واحد از آن کمتر است، نوشت؛ مثل!۴ که آن‌را بصورت حاصل‌ضرب ۴ در !۳ نوشتیم.

$$n! = n(n-۱)!$$

$$\frac{۷!}{۴!} = \frac{۷\times۶\times۵\times\cancel{۴!}}{\cancel{۴!}} = ۲۱۰$$

$$\frac{(n+۱)!}{(n-۱)!} = \frac{(n+۱)n\cancel{(n-۱)!}}{\cancel{(n-۱)!}} = n(n+۱)$$

## تبدیل یا جایگشت:

<u>جابه جا کردن</u> $n$ شی متمایز را به صورتهای مختلف در کنار هم، تبدیل $n$ شی می نامند که با نماد $P_n$ نشان داده می شود.

مثلا تبدیل دو حروف $b$ و $a$ عبارتند از $ab$ , $ba$ و تبدیل سه حرف $a$، $b$و$c$ به صورت زیر بیان می شود. $abc, acb, bac, bca, cab, cba$

### انواع جایگشت (تبدیل):

الف) جایگشت **خطی** ب) جایگشت **دایره‌ای** ج) جایگشت **باتکرار**

## الف) تعداد جایگشت های خطی $n$ حرف:

هرگاه تعداد جایگشت های خطی یک حرف را با علامت $p_۱$ و تعداد جایگشتهای خطی دو حرف را با علامت $p_۲$ و بالاخره تعدادجایگشت‌های خطی $n$ حرف را با علامت $p_n$ نشان دهیم، در این‌صورت می توان گفت :

$$p_۱ = ۱ = ۱! \qquad p_۲ = ۲ \times ۱ = ۲! \qquad p_۳ = ۳ \times ۲ \times ۱ = ۳!$$

پس تعداد جایگشت های خطی $n$ حرف را از رابطه زیر بدست می آوریم.

$$p_n = n(n-۱)(n-۲) \times \cdots\cdots \times ۲ \times ۱ = n!$$

**مثال ۲ )** ۵ نفر می خواهند در اتوبوسی که دارای ۵ صندلی خالی است بنشینند. به چند طریق می توانند این ۵ صندلی را اشغال کنند.

**حل :** $p_۵ = ۵! = ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۱۲۰$

**توضیح:** چون ۵ نفر داریم که باید در مورد نحوه نشستن آنها تصمیم بگیریم، پس ابتدا می‌آییم ۵ تا خانه خالی (۵ تا مربع) رسم می‌کنیم و در بالای هر یک از این مربع‌ها، شماره نفر را می‌نویسیم و در داخل آن نیز، تعداد انتخاب‌های هر فرد (تعداد صندلی‌های خالی که آن فرد می‌تواند انتخاب کند) را می‌نویسیم.

خب، از نفر اول شروع می‌کنیم: برای نفر اول ۵ انتخاب داریم (۵ تا صندلی خالی)، پس در خونه اول از سمت چپ می نویسیم:۵ ؛ بعد از نشستن نفر اول، ۴ تا صندلی باقی می مونه، پس نفر دوم ۴ تا انتخاب داره، در نتیجه تو خونه دوم از سمت چپ باید بنویسیم ۴ ؛ و بدین ترتیب بعد از نشستن نفر چهارم برای ما ۳ تا صندلی خالی باقی می‌مونه، یعنی نفر سوم، ۳ تا انتخاب خواهد داشت، پس در خونه سوم از سمت چپ باید بنویسیم ۳ و به همین ترتیب در خونه های چهارم و پنجم هم باید ۲ و ۱ را بنویسیم.

| نفر اول | | نفر دوم | | نفر سوم | | نفر چهارم | | نفر پنجم |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\boxed{۵}$ | $\times$ | $\boxed{۴}$ | $\times$ | $\boxed{۳}$ | $\times$ | $\boxed{۲}$ | $\times$ | $\boxed{۱}$ |

## دو اصل در شمارش:

**۱. اصل جمع( اصل «یا»):**

اگر عمل $A$ را بتوان به $m$ طریق مختلف و عمل $B$ را بتوان به $n$ طریق متفاوت انجام داد، آنگاه $A$ **یا** $B$ را می توان به $m+n$ طریق انجام داد.

**۲. اصل ضرب ( اصل «و»):**

اگر عمل $A$ را بتوان به $m$ طریق مختلف و عمل $B$ را بتوان به $n$ طریق متفاوت انجام داد، آنگاه $A$ و $B$ را می توان به $m \times n$ طریق انجام داد.

**نکته بسیار مهم**: حرف ربط «یا» در اصل جمع و حرف ربط «و» در اصل ضرب، نقش تعیین کننده‌ای در تشخیص این ۲ اصل در مسائل و تستها خواهند داشت.

## تعمیم اصل ضرب (به بیش از ۲ عمل):

| |
|---|
| اگر عملی به $n_۱$ طریق، عمل دومی به $n_۲$ طریق و عمل $k$ امی به $n_k$ طریق صورت پذیرد، پس تعداد کل عمل‌ها به $n_۱ \times n_۲ \times n_۳ \times \cdots\cdots \times n_k$ طریق صورت می‌گیرند. |

**مثال ۳ )** در رستورانی ۵ نوع غذا **و** ۶ نوع دسر **و** ۴ نوع نوشیدنی مختلف وجود دارد، می‌خواهیم سفارشی شامل یک نوع غذا، یک دسر و یک نوشیدنی ارائه دهیم. چند حالت مختلف برای این سفارش وجود دارد؟

**حل )** در این مسئله با ۳ عمل روبرو هستیم:

۱. انتخاب یک نوع غذا از بین ۵ نوع غذای موجود « **و** »

۲. انتخاب یک نوع دسر از بین ۶ نوع دسر موجود « **و** »

۳. انتخاب یک نوع نوشیدنی از بین ۴ نوع نوشیدنی موجود

با توجه به وجود حرف ربط « **و**» متوجه می‌شیم که باید از اصل **ضرب** استفاده کنیم. برای استفاده از اصل ضرب، باید برای هر یک از این ۳ عمل، یک خانه (مربع) بکشیم. برای خانه اول (انتخاب غذا) ۵ نوع انتخاب داریم، پس تو این خونه، عدد ۵ را می‌نویسیم. برای خانه دوم (انتخاب دسر) ۶ نوع انتخاب داریم، پس تو این خونه عدد ۶ را می‌نویسیم. برای خانه سوم (انتخاب نوشیدنی) ۴ تا انتخاب داریم، پس در این خونه باید عدد ۴ را بنویسیم و در نهایت، طبق اصل ضرب، باید این ۳ عدد موجود در مربع ها را در هم ضرب کنیم:

$$\underset{\boxed{۵}}{\text{غذا}} \times \underset{\boxed{۶}}{\text{دسر}} \times \underset{\boxed{۴}}{\text{نوشیدنی}} = ۳۰ \times ۴ = ۱۲۰$$

## ب) جایگشت‌های دایره‌ای (تبدیل‌های حلقوی):

اگر $n$ شی مختلف را بخواهیم روی یک حلقه بسته (دایره) به صورت های مختلف جابجا کنیم، تعداد حالتهای قرار گرفتن این $n$ شی مختلف از رابطه $(n-۱)!$ بدست می آید. بنابراین :

$$p_n = (n-۱)!$$

**مثال ۴ )** ۵ نفر از اعضای شورای شهر به چند صورت می توانند دور یک میز بنشینند؟

حل )

$$p_۵ = (۵-۱)! = ۴! = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴$$

**جایشگت دایره‌ای یک‌درمیان:** اگر $n$ مرد و $n$ زن بخواهند دور یک میز گرد به طور یک در میان بنشینند تعداد حالت های نشستن برابر $n!\,(n-۱)!$ است.

**ترکیب:**

در هم آمیختن $r$ شی از $n$ شی مختلف را **ترکیب** $r$ شی از $n$ شی گویند یا بطور کلی هرگاه درانتخاب $r$ شی از $n$ شی، **ترتیب آنها مهم نباشد**، ترکیب نامیده می شود که اونو با نماد $c(n\,,r)$ یا $\binom{n}{r}$ یا $c_n^r$ نشان داده و به این صورت تعریف می شود: $c(n\,,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}$

**نکته مهم:** فرق ترکیب و ترتیب در اینه که در ترتیب (همون‌طور که از اسمش معلومه) ترتیب انتخاب یا ترتیب قرار گرفتن اشیاء یا افراد در کنار هم **مهم است**، ولی در ترکیب، ترتیب انتخاب یا قرارگیری **مهم نیست**.

**مثال ۹)** به چند طریق می توان یک گروه ۳ نفری از بین ۹ نفر انتخاب کرد؟

**توضیح حل:** اول باید تشخیص بدیم که از فرمول ترکیب استفاده کنیم یا فرمول ترتیب.

برای پی بردن به این امر، باید به نکته مهمی که در بالا گفتیم دقت کنیم، یعنی باید بررسی کنیم که در این انتخاب ما (انتخاب ۳ نفر از بین ۹ نفر)، آیا برای ما ترتیب انتخاب افراد مهمه یانه. خب، اگه به صورت سؤال خوب توجه کنیم، می‌بینیم که در اون، صحبتی در مورد ترتیب انتخاب نشده، بلکه فقط خواسته که ۳ نفرو از بین این ۹ نفر انتخاب کنیم و دیگه مهم نیست که این ۳ نفر به چه ترتیبی انتخاب بشن. بنابراین، چون **ترتیب انتخاب مهم نیست**، پس باید از فرمول ترکیب استفاده کنیم:

$$c(n\,,r)=c(۹,۳)=\frac{۹!}{۳!(۹-۳)!}=\frac{۹!}{۳!۶!}=\frac{\overset{۳}{\cancel{۹}}\times\overset{۴}{\cancel{۸}}\times۷\times\cancel{۶!}}{\underset{۱}{\cancel{۳}}\times\underset{۱}{\cancel{۲}}\times۱\times\cancel{۶!}}=\frac{۱۲\times۷}{۱}=۸۴$$

# مجموعه سوالات

# سراسری و آزاد

# « آنالیز ترکیبی »

# حل سوالات

# سراسری و آزاد

# « آنالیز ترکیبی »

## پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته مدیریت

۱. **گزینه ۴ صحیح است.** حل کلاسیک :

$$C_n^{۰} + C_n^{۱} + \cdots + C_n^{n} = \binom{n}{۰} + \binom{n}{۱} + \cdots \binom{n}{n} = ۲^n$$

**حل تکنیکی:** $n = ۵ \rightarrow C_۵^{۰} + C_۵^{۱} + C_۵^{۲} + C_۵^{۳} + C_۵^{۴} + C_۵^{۵}$

$$\binom{۵}{۰} + \binom{۵}{۱} + \binom{۵}{۲} + \binom{۵}{۳} + \binom{۵}{۴} + \binom{۵}{۵} = ۱ + ۵ + \frac{۵ \times ۴}{۲ \times ۱} + \frac{۵ \times ۴}{۲ \times ۱} + ۵ + ۱$$

$$۶ + ۱۰ + ۱۰ + ۶ = ۳۲$$

۱) $n + ۲ = ۷ \neq ۳۲$ ✗ ۲) $n^۲ = ۵^۲ \neq ۳۲$ ✗

۳) $n^n = ۵^۵ \neq ۳۲$ ✗ ۴) $۲^n = ۲^۵ = ۳۲ = ۳۲$ ✓

---

۲. **گزینه ۴ صحیح است.** حل کلاسیک:

$$\binom{۱۰}{۳} = \frac{۱۰!}{۳!\,(۱۰ - ۳)!} = \frac{۱۰!}{۳! \times ۷!} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷!}{۳ \times ۲ \times ۱ \times ۷!} = ۱۲۰$$

**حل تکنیکی:**

$$\binom{۱۰}{۳} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸}{۳ \times ۲ \times ۱} = ۱۲۰$$

---

۳. **گزینه ۳ صحیح است.**

حل) با حروف کلمه مدیریت (م- د- ی- ر- ی- ت) کلمات چهار حرفی که می توان نوشت که در آنها (ی) یکبار بکار رفته باشد. ابتدا یکی از «ی» ها را کنار می گذاریم در این صورت تعداد کلمه های چهار حرفی با معنی و بی معنی که از حروف (م- د- ی- ر- ت) می توان نوشت:

$$P = (۵,۴) = \frac{۵!}{(۵ - ۴)!} = ۱۲۰$$

$$۱۲۰ \div ۵ = ۲۴ \quad \rightarrow \quad ۱۲۰ - ۲۴ = ۹۶$$

---

۴. **گزینه ۲ صحیح است.** حل) چون اینها سه گروه هستند و می خواهند دو به دو روبروی هم قرار گیرند پس گروه اول ۲ حالت، گروه دوم ۲ حالت و گروه سوم نیز ۲ حالت دارد پس:

$$۲ \times ۲ \times ۲ = ۲^۳ = ۸$$