

ریاضیات DLM

آموزش سه بعدی مفاهیم

اعداد مختلفا

طراح، مؤلف و گردآورنده:

امین بنیاد گذار

ویراستار علمی:

حسین خدامی

آموزش کلاسیک اعداد مختلط

- دستگاه مختصات قطبی ۵
- رابطه بین دستگاه مختصات قطبی و دکارتی ۶
- فاصله دو نقطه در مختصات قطبی ۹
- نمایش چند منحنی در مختصات قطبی ۹
- طول قوس در مختصات قطبی ۱۲
- مفاهیم اولیه اعداد مختلط ۱۳
- فرم کلی اعداد مختلط ۱۳
- نمایش اعداد مختلط در صفحه دکارتی ۱۴
- عملیات جبری بر روی اعداد مختلط ۱۵
- تساوی دو عدد مختلط ۱۵
- جمع دو عدد مختلط ۱۶
- تفاضل دو عدد مختلط ۱۶
- ضرب دو عدد مختلط ۱۷
- تقسیم دو عدد مختلط ۱۸
- نکات مهم و کاربردی ۱۹
- حل معادله در فضای اعداد مختلط ۲۱
- خاصیتهای جمع و ضرب اعداد مختلط ۲۲

- نمایش قطبی اعداد مختلط..... ۲۳
- ضرب دو عدد مختلط در صورت قطبی..... ۲۵
- تقسیم دو مختلط در صورت قطبی..... ۲۵
- توان یک عدد مختلط..... ۲۶
- قضیه اوپلر و شکل نمایی عدد مختلط..... ۲۷
- تبدیل فرم دکارتی به قطبی..... ۲۹
- محاسبه ریشه n ام یک عدد مختلط..... ۳۰

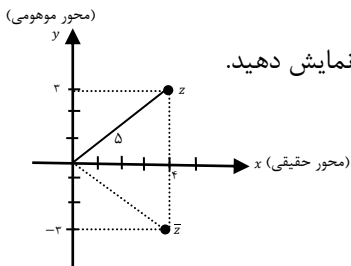
سوالات آزمون کارشناسی ارشد رشته های مدیریت ، حسابداری و اقتصاد

- سوالات آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته مدیریت..... ۳۲
- سوالات آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی رشته مدیریت..... ۳۲
- سوالات آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته حسابداری..... ۳۳
- سوالات آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته اقتصاد..... ۳۳
- سوالات آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی رشته اقتصاد..... ۳۶

حل سوالات آزمون کارشناسی ارشد رشته های مدیریت و حسابداری و اقتصاد

- پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته مدیریت..... ۴۰
- پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد رشته مدیریت..... ۴۱
- پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته حسابداری..... ۴۳
- پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته اقتصاد..... ۴۴
- پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد رشته اقتصاد..... ۵۲

(۵) نقطه ی W روی محور افقی نشان دهنده یک عدد حقیقی محض است (زیرا مولفه موهومی آن صفر است) و نقطه Q روی محور عمودی نشان دهنده یک عدد موهومی محض می باشد (مولفه حقیقی آن صفر می باشد)



مثال ۳) عدد مختلط $Z = 4 + 3i$ را در صفحه دکارتی نمایش دهید.

$$\left\{ \begin{array}{l} z = 4 + 3i : z \text{ عدد مختلط} \\ \bar{z} = 4 - 3i : z \text{ مزدوج} \\ |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ اندازه } z \\ \operatorname{Re}(z) = 4 \text{ (مولفه حقیقی } z) \\ \operatorname{Im}(z) = 3 \text{ (مولفه موهومی } z) \end{array} \right.$$

عملیات جبری بر روی اعداد مختلط:

تساوی دو عدد مختلط:

دو عدد مختلط z_1 و z_2 زمانی با یکدیگر مساوی اند که قسمت حقیقی آنها با هم و قسمت موهومی آنها نیز با هم برابر باشند:

$$z_1 = z_2 \rightarrow \underbrace{x_1}_{\text{مولفه حقیقی}} + \underbrace{i y_1}_{\text{مولفه موهومی}} = \underbrace{x_2}_{\text{مولفه حقیقی}} + \underbrace{i y_2}_{\text{مولفه موهومی}} \rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

مثال ۴) x و y چقدر باشند تا تساوی مقابل برقرار باشد؟^۱ $3x + 2yi + 5 = 4 + 5i$

حل: برای تساوی دو عدد مختلط، باید قسمت حقیقی اعداد را با هم و قسمت موهومی آنها را نیز با هم برابر قرار دهیم:

$$\underbrace{(3x + 5)}_{\text{مؤلفه موهومی}} + \underbrace{(2y)}_{\text{مؤلفه حقیقی}} i = \underbrace{4}_{\text{مؤلفه موهومی}} + \underbrace{5i}_{\text{مؤلفه حقیقی}} \rightarrow \begin{cases} 3x + 5 = 4 \rightarrow 3x = -1 \rightarrow x = \frac{-1}{3} \\ 2y = 5 \rightarrow y = \frac{5}{2} \end{cases}$$

جمع دو عدد مختلط:

برای جمع دو عدد مختلط، کافایت قسمت های حقیقی دو عدد را با هم جمع و قسمت های موهومی را نیز با هم جمع کنیم، یعنی:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

مثال ۵) مجموع دو عدد مختلط $(4 + 3i)$ و $(-5 - 2i)$ را به دست آورید.

(حل)

$$\overbrace{(4 + 3i) + (-5 - 2i)} = -1 + i$$

تفاضل دو عدد مختلط:

برای تفاضل دو عدد مختلط کافایت قسمت های حقیقی را از هم کم و قسمت های موهومی را نیز از یکدیگر کم کنیم:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

مثال ۶) تفاضل دو عدد مختلط $z = (5 - 2i)$ و $z = (-3 + 4i)$ را بدست آورید.

$$z_1 - z_2 = \overbrace{(5 - 2i) - (-3 + 4i)} = 8 - 6i$$

مثال ۷) اگر $z = 2\alpha + 3i$ و $w = 3 + 2i$ باشد، مقدار α را طوری بیابید که $w - z$ یک عدد موهومی محض باشد.^۱

$$w - z = (3 + 2i) - (2\alpha + 3i) = \underbrace{(3 - 2\alpha)}_{\text{قسمت حقیقی}} + \underbrace{(2 - 3)}_{\text{قسمت موهومی}} i$$

$$R_e - (w - z) = 3 - 2\alpha = 0 \rightarrow 3 = 2\alpha \rightarrow \boxed{\alpha = \frac{3}{2}}$$

ضرب دو عدد مختلط:

کافیست تک تک مؤلفه های حقیقی و موهومی دو عدد مختلط را به صورت جمله به جمله در یکدیگر ضرب کنیم، یعنی:

$$z_1 z_2 = (x_1 + i y_1)(x_2 + i y_2) = (x_1 x_2 + i x_1 y_2) + (i x_2 y_1 + \underbrace{i^2}_{-1} y_1 y_2)$$

در نتیجه حاصلضرب z_1 و z_2 برابر است با: $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

مثال ۸) اگر $z_1 = 2 - 3i$ و $z_2 = 4 + 2i$ مطلوبست $z_1 z_2$.^۲

(حل)

$$\text{راه اول) } (2 - 3i)(4 + 2i) = 8 + \underbrace{4i - 12i}_{-8i} - 6i^2 \xrightarrow{i^2 = -1} 8 - 8i - 6(-1)$$

$$= 8 - 8i + 6 = 14 - 8i$$

$$\text{راه دوم) } z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$z_1 z_2 = [(2 \times 4) - (-3 \times 2)] + [(2 \times 2) + (4 \times -3)]i$$

$$z_1 z_2 = [8 - (-6)] + [4 - 12]i = 14 - 8i$$

^۱ انتشارات ماهیار- صفحه ۵۶۴

^۲ محمودیان صفحه ۹۲۲

تست ۵) اگر $z = \frac{3-i}{2+i}$ که در آن $i = \sqrt{-1}$ باشد عدد z^4 کدام است؟

(مدیریت و حسابداری سراسری ۹۱)

(۱) -۴ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) ۴

ابتدا صورت و مخرج z را در مزدوج مخرج آن ضرب می کنیم یعنی:

$$z = \frac{3-i}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i} = \frac{6-3i-2i+i^2}{4-i^2} = \frac{5-5i}{5} = \frac{5}{5} - \frac{5i}{5} = (1-i)$$

حال ابتدا z^2 و سپس z^4 را بدست می آوریم:

$$z^2 = (1-i)^2 = 1-2i+i^2 = -2i \rightarrow z^4 = (z^2)^2 = (-2i)^2 = 4i^2 = 4(-1) = -4$$

گزینه ۱ صحیح است .

سوال مهم: حاصل ضرب z در \bar{z} را بدست آورید ؟

(حل) با فرض $z = x + iy$ ، \bar{z} برابر $\bar{z} = x - iy$ می باشد و می توان نوشت:

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} x^2 - (iy)^2 = x^2 - i^2 y^2 = x^2 - (-y^2) = x^2 + y^2$$

نتیجه مهم: از حل سوال بالا می توان فهمید حاصل ضرب دو عدد مزدوج برابر مربع اندازه

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 \rightarrow z\bar{z} = |z|^2$$

آنها است یعنی:

تقسیم دو عدد مختلط:

راه حل کلی برای تقسیم $\frac{z_1}{z_2}$ آن است که اول صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب

می کنیم. با این عمل، مخرج کسر به یک عدد حقیقی تبدیل می شود ($z_2 \bar{z}_2 = |z_2|^2$) و

می توان عدد مورد نظر را به صورت $a + ib$ نشان داد.

مثال ۹) اگر $z_1 = 3 - 2i$ و $z_2 = -1 + i$ باشد $\frac{z_1}{z_2}$ را بدست آورید؟^۱

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{3 - 2i}{-1 + i} \times \frac{\overbrace{-1 - i}^{\text{مزدوج مخرج}}}{\underbrace{-1 - i}_{\text{مزدوج مخرج}}} = \frac{-3 - 3i + 2i + 2\overset{-1}{i^2}}{(-1)^2 - (i)^2} = \frac{-3 - i - 2}{1 - i^2} \xrightarrow{-1} \frac{-5 - i}{1 - (-1)} \\ &= \frac{-5 - i}{2} = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

نکات مهم و کاربردی^۲

۱) اندازه هر عدد مختلط با اندازه مزدوج آن برابر است یعنی: $|z| = |\bar{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

۲) اگر اندازه z_1 برابر اندازه z_2 باشد، آنگاه یا z_1 برابر z_2 و یا z_1 برابر مزدوج z_2 می باشد.

$$|z_1| = |z_2| \begin{cases} z_1 = z_2 \\ \text{یا} \\ z_1 = \bar{z}_2 \end{cases}$$

۳) مزدوج حاصل جمع دو عدد مختلط، برابر حاصل جمع مزدوج هر کدام از آنها می باشد و این

موضوع به طور مشابه برای چهارعمل اصلی صادق است:

$$۱) \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \rightarrow (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) = (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2)$$

$$۲) \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

$$۳) \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

$$۴) \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

^۱ انتشارات ماهیار- صفحه ۵۶۵

^۲ انتشارات ماهیار صفحه ۵۶۵

(اقتصاد سراسری ۷۰)

تست ۱۰) اگر $z = -1 + \sqrt{3}i$ باشد z^{12} کدام است؟

$$(1) (\sqrt{3})^{12} \quad (2) -(2^{12}) \quad (3) 2^{12} \quad (4) -(\sqrt{3}^{12})$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\theta = \text{Arctg} \frac{y}{x} \rightarrow \theta = \text{Arctg} \left(\frac{-1}{\sqrt{3}} \right) = -\frac{\pi}{3}$$

حال با توجه به فرمول $(x + iy)^n = \rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$

$$(-1 + \sqrt{3}i)^{12} = 2^{12} \left(\cos \frac{-12\pi}{3} + i \sin \frac{-12\pi}{3} \right) =$$

$$2^{12} [\cos(-4\pi) + i \sin(-4\pi)] = 2^{12} [1 + 0] = 2^{12}$$

گزینه ۳ صحیح است.

قضیه اوایلر و شکل نمایی عدد مختلط:

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} \quad \text{رابطه اوایلر}$$

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \xRightarrow{\text{رابطه اوایلر}} \rho e^{i\theta} \Rightarrow z = \underset{\text{اندازه } z}{\rho} e^{i\underset{\text{آرگومان } z}{\theta}}$$

❖ **تذکره** به دلیل متناوب بودن توابع سینوس و کسینوس، یک عدد مختلط را می توان به

$$z = e^{i\theta} = e^{i(\theta + 2k\pi)}$$

صورت زیر نشان داد:

در واقع می توان گفت که تابع $f(\theta) = e^{i\theta}$ نیز دارای دوره تناوب 2π است .

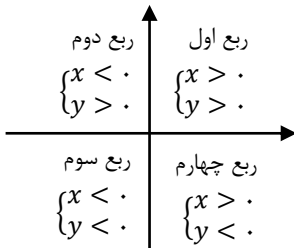
تبدیل فرم دکارتی به قطبی^۱

برای تبدیل فرم دکارتی به قطبی باید دو مولفه (x, y) را به دو مؤلفه (ρ, θ) تبدیل کنیم.

برای این منظور مراحل زیر را به ترتیب انجام می دهیم:

مرحله (۱) محاسبه ρ : برای محاسبه ρ ، (x, y) را در رابطه $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ جای گذاری کرده و جواب را به دست می آوریم.

مرحله (۲) تعیین ناحیه ای که نقطه با مختصات (x, y) در آن قرار دارد: با توجه به شکل زیر



ناحیه ای که نقطه در آن قرار دارد را مشخص می کنیم:

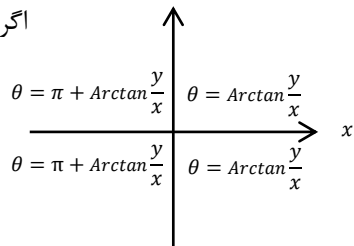
به عنوان مثال در نقطه $Z = -1 + \frac{1}{i}$ به دلیل اینکه $x = -1 < 0$ و $y = \frac{1}{i}$ است

می توان گفت که نقطه در ربع دوم قرار دارد.

مرحله (۳) محاسبه θ : بعد از تعیین اینکه نقطه در کدام ربع قرار دارد و با توجه به اینکه

$-\frac{\pi}{2} \leq \text{Arctan} \frac{y}{x} \leq \frac{\pi}{2}$ است. از یکی از دو رابطه زیر θ را بدست می آوریم:

اگر نقطه ربع اول و چهارم باشد $\theta = \text{Arctan} \frac{y}{x}$
 اگر نقطه در ربع دوم و سوم باشد $\theta = \pi + \text{Arctan} \frac{y}{x}$



^۱انتشارات ماهیار صفحه ۵۷۳ و ۵۷۴

مجموعه سوالات کنکور

سراسری و آزاد

فصل

اعداد مختلط

و مختصات قطبی

✍ سوالات آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته مدیریت

(۱) مساحت منحنی بسته $r = 2 \sin \theta$ کدام است؟ (مدیریت و حسابداری سراسری ۹۱)

- (۱) π (۲) 2π (۳) $\frac{2\pi}{3}$ (۴) $\frac{\pi}{2}$

(۲) اگر $Z = \frac{2-i}{2+i}$ که در آن $i = \sqrt{-1}$ باشد، عدد Z^4 کدام است؟ (مدیریت و حسابداری سراسری ۹۱)

- (۱) ۴ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) -۴

✍ سوالات آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی رشته مدیریت

(۳) قدر مطلق عدد مختلط $\frac{1+4i}{1-i}$ برابر است با: (مدیریت دولتی آزاد ۷۸)

- (۱) $\sqrt{\frac{25}{2}}$ (۲) ۵ (۳) $\sqrt{15}$ (۴) $\sqrt{25}$

(۴) ریشه های معادله $x^3 = 1$ عبارتند از: (مدیریت بازرگانی آزاد ۷۹)

- (۱) $1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (۲) $1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$ (۳) $1, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ (۴) $1, 1+i, 1-i$

(۵) جواب های معادله $x^2 - i = 0$ که در آن $i = \sqrt{-1}$ برابر است با: (مدیریت بازرگانی آزاد ۸۱)

- (۱) $-i, i - \frac{\sqrt{3}}{2}, i + \frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $-i, \frac{1}{2}i - \sqrt{3}, \frac{1}{2}i + \sqrt{3}$ (۳) $-i, \frac{i-\sqrt{3}}{2}, \frac{i+\sqrt{3}}{2}$ (۴) $-i, \frac{1}{3}\sqrt{3}, i + \frac{1}{3}\sqrt{3}, i - \frac{1}{3}\sqrt{3}$

(۶) حاصل عبارت $i^{10}(1+i)$ کدام است؟ (مدیریت دولتی آزاد ۸۲)

- (۱) $32i$ (۲) 32 (۳) $-32i$ (۴) $1-i$

(۷) مقدار عبارت $\frac{5}{3-4i} + \frac{10}{3+4i}$ ($i = \sqrt{-1}$) برابر است با: (مدیریت دولتی آزاد ۸۴)

- (۱) $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$ (۲) $\frac{11}{5} - \frac{2}{5}i$ (۳) $\frac{9}{5} + \frac{4}{5}i$ (۴) $\frac{9}{5} - \frac{4}{5}i$

سوال‌ات آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته مساب‌داری

۸) نقطه A در مختصات کارتزین $(1, -1)$ است. مختصات این نقطه در دستگاه قطبی کدام

است؟

(حسابداری سراسری ۷۶)

$$(1, \frac{\pi}{4}) \quad (2, \frac{\sqrt{2}\pi}{4}) \quad (3, \frac{\sqrt{2}\pi}{4}) \quad (4, \frac{\sqrt{2}\pi}{4})$$

۹) یکی از جذرهای $\frac{i\sqrt{2}}{1-i}$ به صورت $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ است، r, θ کدام است؟

(حسابداری سراسری ۸۴)

$$r = 1, \theta = \frac{\Delta\pi}{\lambda} \quad (2) \quad r = 1, \theta = \frac{\pi}{\lambda} \quad (1)$$

$$r = 2, \theta = \frac{\Delta\pi}{\lambda} \quad (4) \quad r = 2, \theta = \frac{\pi}{\lambda} \quad (3)$$

سوال‌ات آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته اقتصاد

۱۰) معادله مکان هندسی نقاطی که در رابطه $|z-1|=1$ صدق کند کدام است؟ (اقتصاد سراسری ۷۵)

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (1) \quad (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \quad (2)$$

$$x^2 + (y-1)^2 = 1 \quad (3) \quad (x-1)^2 + y^2 = 1 \quad (4)$$

۱۱) حاصل عبارت $\frac{i^{62} - i^{24}}{i^{39}}$ کدام است؟ (اقتصاد سراسری ۷۶)

$$-2i \quad (1) \quad -2 \quad (2) \quad 2 \quad (3) \quad 2i \quad (4)$$

۱۲) کدام نقطه در درون نمودار $|z|=2$ قرار دارد؟ (اقتصاد سراسری ۷۶) (مدیریت دولتی آزاد ۸۳)

$$(3, 0) \quad (1) \quad (1, 1) \quad (2) \quad (1, 2) \quad (3) \quad (0, 3) \quad (4)$$

۱۳) حاصل $(\frac{1-i}{\sqrt{2}})^{100}$ کدام است؟ (اقتصاد سراسری ۷۷)

$$-\sqrt{2} \quad (1) \quad -1 \quad (2) \quad 1 \quad (3) \quad \sqrt{2} \quad (4)$$

۱۴) کدامیک از اعداد مختلط یکی از ریشه های عدد $\sqrt[5]{i}$ است؟ (اقتصاد سراسری ۷۸)

$$\cos \frac{9\pi}{10} + i \sin \frac{9\pi}{10} \quad (۴) \quad \cos \frac{3\pi}{5} + i \sin \frac{3\pi}{5} \quad (۳) \quad -i \quad (۲) \quad 1-i \quad (۱)$$

۱۵) یکی از ریشه های معادله $Z^2 - 2Z + 2 = 0$ کدام است؟ (اقتصاد سراسری ۷۸)

$$-1+i \quad (۴) \quad 2-i \quad (۳) \quad 1-i \quad (۲) \quad i \quad (۱)$$

۱۶) اگر $z = a + ib$ و $u = x + iy$ باشد و داشته باشیم $z = \frac{1}{u+1}$ ، مقدار y بر

حساب a و b کدام است؟ (اقتصاد سراسری ۷۹)

$$\frac{-ab}{a^2+b^2} \quad (۴) \quad \frac{-b}{a^2+b^2} \quad (۳) \quad \frac{a+b}{a^2+b^2} \quad (۲) \quad \frac{a-b}{a^2+b^2} \quad (۱)$$

۱۷) اگر $z = \left(\frac{2i}{1+i}\right)^{10}$ باشد، مقدار z برابر است با: (اقتصاد سراسری ۸۰)

$$2^{10}i \quad (۴) \quad 2^{10} \quad (۳) \quad 32i \quad (۲) \quad 32 \quad (۱)$$

۱۸) هرگاه $\sum_{k=0}^{100} i^k = x + iy$ آنگاه x و y عبارتند از: (اقتصاد سراسری ۸۱)

$$y=1, x=0 \quad (۲) \quad y=0, x=0 \quad (۱)$$

$$y=1, x=1 \quad (۴) \quad y=0, x=1 \quad (۳)$$

۱۹) فرم مثلثاتی (یا قطبی) $z = 1 + i$ کدام است؟ (اقتصاد سراسری ۸۱)

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \quad (۲) \quad z = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \quad (۱)$$

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} - i \cos \frac{\pi}{4} \right) \quad (۴) \quad z = \sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} - i \cos \frac{\pi}{4} \right) \quad (۳)$$

۲۰) حاصل عبارت $\left[\frac{1-\sqrt{2}i}{1+\sqrt{2}i} \right]^{10}$ کدام است؟ (اقتصاد سراسری ۸۲)

$$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad (۴) \quad \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad (۳) \quad -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad (۲) \quad \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad (۱)$$

(۲۱) اگر $z = 1 - i$ باشد، یکی از جوابهای $\sqrt[4]{z}$ برابر است با: (اقتصاد سراسری ۸۲)

$$\sqrt[4]{2} \left[\cos \frac{\gamma\pi}{16} + i \sin \frac{\gamma\pi}{16} \right] \quad (۲) \quad \sqrt[4]{2} \left[\cos \frac{\pi}{\gamma} + i \sin \frac{\pi}{\gamma} \right] \quad (۱)$$

$$\sqrt[4]{2} \left[\cos \frac{\gamma\pi}{-8} + i \sin \frac{\gamma\pi}{8} \right] \quad (۴) \quad \sqrt[4]{2} \left[\cos \frac{19\pi}{16} + i \sin \frac{19\pi}{16} \right] \quad (۳)$$

(۲۲) حاصل عبارت $\frac{2i^{20} + i^{15}}{2+i}$ کدام است؟ (اقتصاد سراسری ۸۴)

$$\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \quad (۱) \quad 1 - \frac{4}{5}i \quad (۲) \quad 1 + \frac{4}{5}i \quad (۳) \quad \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i \quad (۴)$$

(۲۳) کدام یک از اعداد زیر ریشه های پنجم عدد (-1) نمی باشد؟ (اقتصاد سراسری ۸۳)

$$\cos \frac{9\pi}{5} + i \sin \frac{9\pi}{5} \quad (۲) \quad \cos \frac{\gamma\pi}{5} + i \sin \frac{\gamma\pi}{5} \quad (۱)$$

$$\cos \frac{\gamma\pi}{5} + i \sin \frac{\gamma\pi}{5} \quad (۴) \quad \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \quad (۳)$$

(۲۴) اگر داشته باشیم: $x + iy = 1 + i + i^2 + \dots + i^{n-1}$ مقدار $x + y$ کدام است؟ (با

فرض آن که $n = 2k$ و k عددی فرد است) (اقتصاد سراسری ۸۵)

$$0 \quad (۱) \quad 1 \quad (۲) \quad 2 \quad (۳) \quad n \quad (۴)$$

(۲۵) کدام عدد مختلط یکی از جواب های $\sqrt[4]{i}$ نیست؟ (اقتصاد سراسری ۸۷ و ۸۹)

$$\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \quad (۱) \quad \cos \frac{\gamma\pi}{8} + i \sin \frac{\gamma\pi}{8} \quad (۲)$$

$$\cos \frac{9\pi}{8} + i \sin \frac{9\pi}{8} \quad (۳) \quad \cos \frac{13\pi}{8} + i \sin \frac{13\pi}{8} \quad (۴)$$

(۲۶) اگر $z = 1 + i$ باشد، آن گاه حاصل عبارت $\left[\frac{z}{\sqrt{2}} \right]^{20}$ ، کدام است؟ (اقتصاد سراسری ۸۸)

$$-i \quad (۱) \quad i \quad (۲) \quad 1 \quad (۳) \quad -1 \quad (۴)$$

(۲۷) کدام عدد مختلط یکی از ریشه های چهارم عدد $Z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ نیست؟ (اقتصاد سراسری ۹۰)

$$\cos \frac{\gamma\pi}{16} + i \sin \frac{\gamma\pi}{16} \quad (۱) \quad \cos \frac{9\pi}{16} + i \sin \frac{9\pi}{16} \quad (۲)$$

$$\cos \frac{\pi}{16} + i \sin \frac{\pi}{16} \quad (۴) \quad \cos \frac{25\pi}{16} + i \sin \frac{25\pi}{16} \quad (۳)$$

۲۸) کدام یک از مقادیر زیر ریشه چهارم $(1+i)$ نمی باشد؟ (اقتصاد سراسری ۹۱)

- (۱) $\sqrt[4]{2}(\cos \frac{11\pi}{16} + i \sin \frac{11\pi}{16})$ (۲) $\sqrt[4]{2}(\cos \frac{\pi}{16} + i \sin \frac{\pi}{16})$
 (۳) $\sqrt[4]{2}(\cos \frac{17\pi}{16} + i \sin \frac{17\pi}{16})$ (۴) $\sqrt[4]{2}(\cos \frac{25\pi}{16} + i \sin \frac{25\pi}{16})$

سؤالات آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی (رشته اقتصاد)

۲۹) اگر $(1+i)y + (1-i)x = 4 - 2i$ باشد، مقدار $3y - x$ چند است؟ (اقتصاد آزاد ۸۱)

- (۱) ۰ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۳۰) مقدار عبارت $(\cos \frac{\pi}{\lambda} + i \sin \frac{\pi}{\lambda})^{72}$ چند است؟ (اقتصاد آزاد ۸۲)

- (۱) ۱ (۲) $\cos^2 \frac{\pi}{\lambda} + i \sin^2 \frac{\pi}{\lambda}$

- (۳) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (۴) -۱

۳۱) اگر $z = \frac{i^{25} + i^{40}}{i^{22} + i^{17}}$ و $w = x + iy = 5z + i^2$ باشند، مقدار $y - x$ چند است؟

(اقتصاد آزاد ۸۳)

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۵ (۴) -۵

۳۲) اگر $z = 1 - i$ باشد z^{10} چه گزینه ای است؟ (اقتصاد آزاد ۸۴)

- (۱) $-32i$ (۲) $32i$ (۳) -32 (۴) 32

۳۳) اگر $z_1 = \sqrt{3} + i$ و $z_2 = \frac{\bar{z}_1}{z_1}$ باشند w کدام گزینه است؟ (اقتصاد آزاد ۸۵)

- (۱) $\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$ (۲) $2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$

- (۳) $\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12})$

(۳۴) مقدار $\left[\frac{\overline{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}}{\sqrt{2}+i} \right]$ کدام یک از گزینه های زیر است؟ (اقتصاد آزاد ۸۶)

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad (۲) \quad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \quad (۱)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \quad (۴) \quad \sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right] \quad (۳)$$

(۳۵) اگر $Z_1 = \sqrt{3} + i$ و $Z_2 = 1 - i$ باشند مقدار عبارت $Z_1^3 \times Z_2^4$ کدام است؟ (اقتصاد آزاد ۸۷)

$$-32i \quad (۴) \quad -32 \quad (۳) \quad 32i \quad (۲) \quad 32 \quad (۱)$$

(۳۶) اگر $z = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi i}{2}}$ ، $w = z^{20}$ باشد مقدار w کدام است؟ (اقتصاد آزاد ۸۹)

$$-2^{20} \sin \pi \quad (۲) \quad -2^{20} i \cos \pi \quad (۱)$$

$$2^{20} (i \sin \pi) \quad (۴) \quad 2^{-20} \quad (۳)$$

حل سوالات کنکور

سراسری و آزاد

فصل

اعداد مختلط

و مختصات قطبی

پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته مدیریت.

۱. گزینه ۱ صحیح است.

راه اول :

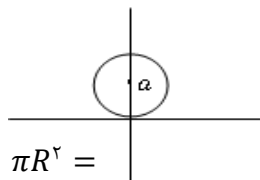
$$r = 2 \sin \theta \xrightarrow{\text{طرفین تساوی} \times r} r \times r = 2r \sin \theta \rightarrow r^2 = 2r \sin \theta \quad \frac{r^2 = x^2 + y^2}{r \sin \theta = y} \quad x^2 + y^2 = 2y$$

$$x^2 + y^2 - 2y = 0 \rightarrow x^2 + y^2 - 2y + \underbrace{1}_{\text{مکمل}} = 1 \rightarrow x^2 + (y - 1)^2 - 1 = 0$$

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1 \rightarrow \text{دایره ای به شعاع } 1$$

$$(S = \pi R^2 = \pi(1)^2 = \pi) \text{ (مساحت دایره)}$$

راه دوم :



منحنی $r = 2a \sin \theta$ دایره ای به شعاع a می باشد یعنی:

حال منحنی داده شده در صورت سؤال $r = 2 \sin \theta$ می باشد

در نتیجه $a = 1$ (شعاع دایره) می باشد حال می توان گفت

$$\pi(1)^2 = \pi \text{ (مساحت دایره)}$$

۲. گزینه ۴ صحیح است.

حل : ابتدا صورت و مخرج Z را در مزدوج مخرج آن ضرب می کنیم، یعنی:

$$Z = \frac{3-i}{2+i} \times \frac{\overbrace{2-i}^{\text{مزدوج مخرج}}}{\underbrace{2-i}_{\text{مزدوج مخرج}}} = \frac{6-3i-2i+i^2}{4-\underbrace{i^2}_{(-1)}} = \frac{6-1-5i}{4-(-1)} = \frac{5-5i}{5}$$

$$Z = \frac{5}{5} - \frac{5i}{5} = 1 - i$$

$$\theta_r = \operatorname{Arctg}\left(\frac{-1}{1}\right) = \frac{-\pi}{4} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

$$Z_r^4 = (\sqrt{r})^4 \left[\cos^4\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4}\right) + i \sin^4\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4}\right) \right] = -4$$

$$Z_1^r Z_r^4 = (\lambda i)(-4) = -32i$$

پس مقدار $Z_1^r Z_r^4$ برابر است با:

۳۶. گزینه ۳ صحیح است. راه اول:

$$z = r^{-1} \left(\cos \frac{\pi}{r} + i \sin \frac{\pi}{r} \right) = r^{-1} i \rightarrow w = z^{r \cdot} = r^{-r \cdot} i^{r \cdot}$$

$$w = r^{-r \cdot} (i^r)^{1 \cdot} \xRightarrow{i^r = -1} r^{-r \cdot} (-1)^{1 \cdot} = r^{-r \cdot}$$

راه دوم:

$$w = z^{r \cdot} = (r^{-1} \left(\cos \frac{\pi}{r} + i \sin \frac{\pi}{r} \right))^{r \cdot} = r^{-r \cdot} \left(\cos \frac{r \cdot \pi}{r} + i \sin \frac{r \cdot \pi}{r} \right)$$

$$= r^{-r \cdot} (\cos 1 \cdot \pi + i \sin 1 \cdot \pi) = r^{-r \cdot} (1 + i) = r^{-r \cdot}$$