ریاضیات DLM

آموزش سه‌بعدی مفاهیم

معادلات تفاضلی

طراح، مؤلف و گردآورنده:

امین بنیادگذار

ویراستار علمی:

حسین خدامی

عنوان **صفحه**

آموزش کلاسیک معادلات تفاضلی

معادلات تفاضلی ۳

مرتبه و درجه معادله تفاضلی..... ۴

معادلات تفاضلی خطی ۵

تشکیل معادلات تفاضلی ۵

جواب های معادله تفاضلی (جواب‌های عمومی و خصوصی)..... ۶

جواب های مستقل خطی ۷

حل معادلات تفاضلی خطی ۸

معادله تفاضلی خطی مرتبه اول ۸

معادله تفاضلی خطی مرتبه دوم ۹

سوالات آزمون کارشناسی ارشد رشته اقتصاد

سوالات آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته اقتصاد..... ۱۲

سوالات آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی رشته اقتصاد..... ۱۲

پاسخ آزمون کارشناسی ارشد رشته اقتصاد

پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته اقتصاد ۱۴

پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد رشته اقتصاد..... ۱۵

معادلات تفاضلی:

اگر $y_x = f(x)$ یک دنباله باشد، رابطه بین تفاضلات مقادیری از یک متغیر غیرمستقل به ازای مجموعه ای جدا از مقادیر متغیر مستقل می باشد.

تغییر y وقتی که مقدار x از x تا $x+۱$ تغییر کند، **تفاضل مرتبه اول** نامیده می شود و آن را به صورت Δy_x نمایش می دهیم یعنی: $\Delta y_x = y_{x+۱} - y_x$

بنابراین **تفاضل مرتبه دوم** به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\Delta^۲ y_x = \Delta(\Delta y_x) = (y_{x+۲} - y_{x+۱}) - (y_{x+۱} - y_x) = y_{x+۲} - ۲y_{x+۱} + y_x$$

حال اگر بخواهیم به طور کلی تفاضل **مرتبه n ام** را بررسی کنیم، رابطه گریگوری- نیوتون را خواهیم نوشت که به صورت زیر است:

$$\Delta^n y_x = \Delta(\Delta^{n-۱} y_x) = y_{x+n} - \binom{n}{۱} y_{x+(n-۱)} + \binom{n}{۲} y_{x+(n-۲)} + \cdots (-۱)^n y_x$$
$$= \sum_{i=۰}^{n} \frac{n!}{(n-i)!\, i!} (-۱)^n y_{x+(n-i)}$$

مثال۱) اگر $y = x^۲ - ۳x + ۲$ باشد، تفاضل مرتبه دوم آن را بیابید. [۱]

$$\Delta^۲ y_x = y_{x+۲} - ۲y_{x+۱} + y_x$$

برای بدست آوردن $y_{x+۲}$، در رابطه داده شده (y) به جای $x+۲, x$ را قرار می‌دهیم:

$$y_{x+۲} = (x+۲)^۲ - ۳(x+۲) + ۲ = (x^۲ + ۴x + ۴) - (۳x + ۶) + ۲$$
$$= x^۲ + x$$

برای بدست آوردن $y_{x+۱}$ نیز ، در رابطه داده شده به جای x کافیست $x+۱$ قرار دهید:

$$(x+۱)^۲ - ۳(x+۱) + ۲ = (x^۲ + ۲x + ۱) - (۳x + ۳) + ۲ = x^۲ - x$$
$$\Delta^۲ y_x = y_{x+۲} - ۲y_{x+۱} + y_x = (x^۲ + x) - ۲(x^۲ - x) + x^۲ - ۳x + ۲$$
$$= (x^۲ + x) - (۲x^۲ - ۲x) + x^۲ - ۳x + ۲ = ۲$$

---

[۱] پناهی صفحه ۹۱۵

مرتبه و درجه معادله تفاضلی:

در یک معادله تفاضلی، اختلاف **بزرگترین** اندیس از **کوچک‌ترین** اندیس y را **مرتبه** معادله تفاضلی می گویند، اگر k **بزرگترین** اندیس موجود در معادله باشد، آنگاه **توانِ** y_{x+k} را **درجه** معادله می گویند.

مثال۲) درجه و مرتبه معادله تفاضلی هر یک از معادلات زیر را بنویسید. [۱]

۱) $۲y^{۳}_{x+۴} - ۵y^{۲}_{x+۱} - x^{۳}y^{۵}_{x} = ۰$

۲) $y_{x+۵} + ۳y^{۲}_{x+۴} - ۷xy^{۳}_{x+۲} = ۰$

۳) $y^{۲}_{x+۴} - y^{۳}_{x+۱} + xy_{x} = ۰$

حل) در عبارت اول، **بزرگترین** اندیسِ y برابر ۴ است (در $y^{۳}_{x+۴}$)، بنابراین **توان** $y^{۳}_{x+۴}$ ، یعنی ۳، بیانگر **درجه** این معادله است. همچنین کوچکترین اندیس y برابر صفره (در $y^{۵}_{x}$)، پس **مرتبه** این معادله برابره با: اختلاف بزرگترین اندیس از کمترین اندیس، یعنی: $۴ - ۰ = ۴$

۱) درجه $= y_{x+۴}$ توانِ $= ۳$, مرتبه $= ۴ - ۰ = ۴$

۲) درجه $= y_{x+۵}$ توانِ $= ۱$, مرتبه $= ۵ - ۲ = ۳$

۳) درجه $= y^{۲}_{x+۴}$ توان $= ۲$, مرتبه $= ۴ - ۰ = ۴$

تست) مرتبه و درجه معادله تفاضلی $y^{۳}_{x+۵} - xy^{۴}_{x+۲} + ۳y_{x} = ۰$ از چپ به راست کدام است؟[۲]

۱) ۵, ۴ ۲) ۵, ۳ ۳) ۴, ۵ ۴) ۳, ۵

حل) گزینه ۲ صحیح است.

$$y^{\boxed{۳}}_{x+\boxed{۵}} - xy^{۴}_{x+۲} + ۳y_{\boxed{x}} = ۰ \begin{cases} \text{درجه} = ۳ \\ \text{مرتبه} = ۵ - ۰ = ۵ \end{cases}$$

---

[۱] پناهی صفحه ۹۱۵- محمودیان صفحه ۹۱۲

[۲] پوران پژوهش تست ۴۲- صفحه ۷۲۷

$$\begin{vmatrix} f_۱(۰) & f_۲(۰) \\ f_۱(۱) & f_۲(۱) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (-۲)^۰ & (-۳)^۰ \\ (-۲)^۱ & (-۳)^۱ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ -۲ & -۳ \end{vmatrix}$$

$$= \big((۱ \times -۳) - (۱ \times -۲)\big) = -۳ + ۲ = -۱$$

حاصل دترمینان **مخالف صفر** شد، پس **استقلال** خطی دارند و برای جواب عمومی معادله $y_x = c_۱ f_۱(x) + c_۲ f_۲(x)$ داریم: $y_x = c_۱(-۲)^x + c_۲(-۳)^x$

حل معادلات تفاضلی خطی:

معادله تفاضلی خطی مرتبه اول: [۱]

صورت کلی این معادله به صورت روبه رو می باشد: $Ay_{x+۱} + By_x = c$

که درآن A و B اعداد ثابت و $B \neq ۰$ و A هستند، جواب عمومی این معادله بصورت زیر است:

$$\begin{cases} y_x = (-\frac{B}{A})^x \left(y_۰ - \frac{AC}{A+B}\right) + \frac{AC}{A+B} & , A \neq B \\ y_x = y_۰ + cx & A = B \end{cases}$$

$y_۰$ در این رابطه بعنوان ثابت دلخواه جواب **عمومی** است که با معلوم فرض کردن آن، به جواب **خصوصی** معادله تفاضلی می رسیم.

مثال۶) جواب عمومی معادله تفاضلی $۳y_{x+۱} - ۴y_x = -۵$ را پیدا کنید. جواب خصوصی این معادله را به ازای $y_۰ = \frac{۴۱}{۳}$ بدست آورید؟ [۲]

حل) با توجه به رابطه بالا می توان گفت:

$$\begin{array}{ccccc} Ay_{x+۱} & + & By_x & = & c \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ ۳y_{x+۱} & - & ۴y_x & = & -۵ \end{array} \rightarrow \begin{cases} A = ۳ \\ B = -۴ \\ C = -۵ \end{cases}$$

$$y_x = (\frac{۴}{۳})^x \left(y_۰ - \frac{-۱۵}{-۱}\right) + \frac{-۱۵}{-۱} = (\frac{۴}{۳})^x (y_۰ - ۱۵) + ۱۵$$

---

[۱] محمودیان صفحه ۹۱۴

[۲] محمودیان صفحه ۹۱۵

سوالات آزمون کارشناسی ارشد

رشته اقتصاد

معادلات تفاضلی

پاسخ آزمون کارشناسی ارشد

رشته اقتصاد

معادلات تفاضلی

پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته اقتصاد

۱. گزینه ۱ صحیح است.

حل کلاسیک :

$$y_{x+۱} - y_x = \frac{(x+۱)(x+۱-۱)}{۲} - \frac{x(x-۱)}{۲} = \frac{(x+۱)(x)}{۲} - \frac{x^۲ - x}{۲}$$

$$y_{x+۱} - y_x = \frac{x^۲ + x}{۲} - \frac{x^۲ - x}{۲} = \frac{x^۲ + x - x^۲ + x}{۲} = \frac{۲x}{۲} = x$$

حل تکنیکی : در صورت سؤال و در گزینه ها x به صورت پارامتری بیان شده که می توان به x عدد دلخواهی را داد و صورت سؤال و گزینه ها را به عدد تبدیل کرد گزینه ای صحیح است که جواب سؤال با آن گزینه به ازای همان xمطابقت کند.

$$x = ۲ \quad \rightarrow \quad y_۲ = \left[\frac{۲(۲-۱)}{۲}\right] = ۱ \quad \rightarrow \quad y_۲ = ۱$$

حال بررسی گزینه ها:

$$y_{x+۱} - y_x = x \quad \xRightarrow{x=۲} \quad y_{۲+۱} - y_۲ = ۲ \rightarrow \quad y_۳ - y_۲ = ۲ \quad \rightarrow$$ (گزینه ۱)

$$۳ - ۱ = ۲ \checkmark$$

$$y_۳ = \frac{۳(۳-۱)}{۲} = ۳$$

$$y_{x+۱} - y_{x-۱} = x \quad \xRightarrow{x=۲} \quad y_۳ - y_۱ = ۲ \quad \rightarrow \quad ۳ - ۰ \neq ۲ \quad ✗$$ (گزینه ۲)

$$y_۱ = \frac{۱(۱-۱)}{۲} = ۰$$

$$y_{x+۱} - y_x = ۲x \quad \xRightarrow{x=۲} \quad y_۳ - y_۲ = ۲(۲) \quad \frac{y_۳ = ۳}{y_۲ = ۱} \quad ۳ - ۱ \neq ۴ \quad ✗$$ **(گزینه۳**

---

۲. گزینه ۴ صحیح است.

یادآوری : جواب معادله تفاضلی خطی مرتبه اول $ay_{x+۱} - ay_x + b = ۰$ در ازاء $y_۰$ برابر است با:

$$y_x = y_۰ - \frac{b}{a}x$$

با توجه به اینکه $y_۰ = ۱$ می باشد می توان گفت:

$$y_{x+۱} - y_x + ۱ = ۰ \quad \rightarrow \quad y_x = ۱ - \frac{۱}{۱}x \quad \rightarrow \quad y_x = ۱ - x$$

۳. گزینه ۱ صحیح است.

$$y_{x+۲} - y_x = ۰$$
$$m^۲ - ۱ = ۰ \quad \rightarrow \quad m^۲ = ۱ \quad \rightarrow \quad |m| = ۱ \quad \rightarrow \quad \boxed{m = \pm ۱}$$

با در نظر گرفتن $G(x) = ۰$ و $c_۲$ و $c_۱$ مفروض:

$$y_x = c_۱ m_۱^x + c_۲ m_۲^x + G(x)$$
$$y_x = (۱)^x + (-۱)^x + ۰ = ۱ + (-۱)^x$$

پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد رشته اقتصاد

۴. گزینه ۳ صحیح است.

حل کلاسیک : معادل مشخصه را تشکیل می دهیم:

$$m^۲ - ۵m + ۶ = ۰ \xRightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (m-۳)(m-۲) = ۰ \rightarrow \begin{cases} m - ۳ = ۰ \rightarrow m = ۳ \\ m - ۲ = ۰ \rightarrow m = ۲ \end{cases}$$

$$y_k = c_۱ ۳^k + c_۲ ۲^k \quad \rightarrow \quad \begin{cases} y_۰ = c_۱ ۳^۰ + c_۲ ۲^۰ = ۱ \quad \rightarrow \quad c_۱ + c_۲ = ۱ \\ y_۱ = c_۱ ۳^۱ + c_۲ ۲^۱ = ۱ \rightarrow \quad ۳c_۱ + ۲c_۲ = ۱ \end{cases}$$

$$\rightarrow (-۳) \times \begin{cases} c_۱ + c_۲ = ۱ \\ ۳c_۱ + ۲c_۲ = ۱ \end{cases} \xRightarrow{\text{معادله بالا} \times -۳} \begin{cases} -۳c_۱ - ۳c_۲ = -۳ \\ ۳c_۱ + ۲c_۲ = ۱ \end{cases}$$

$$-c_۲ = -۲ \quad \rightarrow \quad \boxed{c_۲ = ۲}$$

$$۳c_۱ + ۲c_۲ = ۱ \xRightarrow{c_۲ = ۲} ۳c_۱ + ۲(۲) = ۱ \rightarrow ۳c_۱ + ۴ = ۱ \rightarrow ۳c_۱ = -۳ \rightarrow c_۱ = \frac{-۳}{۳} = -۱$$

بنابراین جواب معادله تفاضلی با فرض $y_۰ = y_۱ = ۱$ برابر است با: $y_k = -۳^k + ۲^{k+۱}$

حل تکنیکی : با استفاده از فرض مسئله یعنی $(y_۰ = y_۱ = ۱)$ کافیست به k عددی مناسب دهید و سؤال را حل کنید تا y_k بدست آید. حال به گزینه ها نیز .همان k داده شده در صورت سوال را بدهید باید جواب صورت سؤال با جواب یکی از گزینه ها مطابقت کند.

$k = -۱$ را انتخاب می کنیم وبه صورت سؤال می دهیم:

$$y_{k+۲} - ۵y_{k+۱} + ۶y_k = ۰ \xRightarrow{k=-۱} y_{-۱+۲} - ۵y_{-۱+۱} + ۶y_k = ۰$$

$$y_۱ - ۵y_۰ + ۶y_k = ۰ \xRightarrow{y_۰=y_۱=۱} ۱ - ۵(۱) + ۶y_k = ۰ \rightarrow -۴ + ۶y_k = ۰$$

$$۶y_k = ۴ \rightarrow y_k = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$$

$$\times \text{گزینه ۱)}\ y_k = ۲^{-۱+۱} + ۳^{-۱} = ۲^۰ + \frac{۱}{۳} = ۱ + \frac{۱}{۳} = \frac{۴}{۳} \neq \frac{۲}{۳}$$

$$\times \text{گزینه ۲)}\ y_k = ۳^{-۱+۱} + ۲^{-۱+۱} = ۳^۰ + ۲^۰ = ۱ + ۱ = ۲ \neq \frac{۲}{۳}$$

$$\checkmark \text{گزینه۳)}\ y_k = ۲^{-۱+۱} - ۳^{-۱} = ۲^۰ - \frac{۱}{۳} = ۱ - \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳} = \frac{۲}{۳}$$

$$\times \text{گزینه ۴)}\ y_k = ۳^{-۱+۱} - ۲^{-۱+۱} = ۳^۰ - ۲^۰ = ۱ - ۱ = ۰ \neq \frac{۲}{۳}$$

---

۵. گزینه ۳ صحیح است.

راه اول :

$$۷ + y_t - y_{t+۱} = ۰$$

$$y_{t+۱} = ۷ + y_t \rightarrow y_t = y_۰ + Bt \xRightarrow{B=۷} y_t = ۱ + ۷t$$

$$y_۲ = ۱ + ۷(۲) = ۱ + ۱۴ = ۱۵$$

راه دوم :

$$۷ + y_t - y_{t+۱} = ۰ \rightarrow y_{t+۱} = ۷ + y_t$$

$$\begin{cases} t = ۰ \rightarrow y_{۰+۱} = ۷ + y_۰ \xRightarrow{y(۰)=۱} y_۱ = ۷ + ۱ = ۸ \\ t = ۱ \rightarrow y_{۱+۱} = ۷ + y_۱ \xRightarrow{y(۱)=۸} y_۲ = ۷ + ۸ = ۱۵ \end{cases}$$

---

۶. گزینه ۳ صحیح است.

حل : برای حل معادله تفاضلی مرتبه دوم، ابتدا مبین تابع را تشکیل می دهیم:

$$k^۲ - ۴ = ۰ \rightarrow k^۲ = ۴ \rightarrow k = \pm ۲ \rightarrow \text{دو ریشه وجود دارد}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_t = c_۱(۲)^t + c_۲(-۲)^t + y^* \\ y^* - ۴y^* = ۹ \rightarrow -۳y^* = ۹ \rightarrow y^* = -۳ \end{array}\right\} \xRightarrow{c_۱=c_۲=۲} \begin{array}{l} y_t = ۲(۲)^t + ۲(-۲)^t - ۳ \\ y_t = ۲^{t+۱} + ۲(-۲)^t - ۳ \end{array}$$

$$y_۱ = ۲^{۱+۱} + ۲(-۲)^۱ - ۳ = ۲^۲ - ۴ - ۳ = ۴ - ۴ - ۳ = -۳$$

۷. گزینه ۱ صحیح است.

$$y_t + y_{t-۱} = ۱۰ \quad \rightarrow \quad y_{t+۱} + y_t = ۱۰$$

$$y_t = (\frac{-۱}{۱})^t \left(y_. - \frac{۱۰}{۵}\right) + \frac{۱۰}{۵} = (-۱)^t (y_. - ۲) + ۲ \xRightarrow{t=۰\ ,\ y_.=۲۰}$$

$$(-۱)^. (۲۰ - ۲) + ۲$$

$$y_{۱.} = (۱)(۱۸) + ۲ = ۲۰$$