ریاضیات DLM

آموزش سه‌بعدی مفاهیم

معادلات دیفرانسیل

طراح، مؤلف و گردآورنده:

امین بنیاد گذار

ویراستار علمی:

حسین خدامی

عنوان **صفحه**

آموزش کلاسیک معادلات دیفرانسیل

تعریف معادله دیفرانسیل..... ۴

مرتبه معادله دیفرانسیل..... ۴

درجه معادله دیفرانسیل..... ۵

تشکیل معادله دیفرانسیل..... ۵

جواب های معادله دیفرانسیل..... ۵

جواب عمومی معادله دیفرانسیل..... ۶

جواب خصوصی معادله دیفرانسیل..... ۶

منحنی پوش..... ۸

حل معادلات دیفرانسیل..... ۹

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول..... ۹

معادله دیفرانسیل..... ۱۱

معادله دیفرانسیل جداشدنی..... ۱۱

معادله دیفرانسیل همگن..... ۱۳

معادله دیفرانسیل کامل..... ۱۴

عامل انتگرال ساز..... ۱۵

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن..... ۱۸

معادله ی دیفرانسیل خطی مرتبه دوم غیرهمگن..... ۲۰

سوالات آزمون کارشناسی ارشد رشته های مدیریت و حسابداری و اقتصاد

سوالات آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته مدیریت ۲۴
سوالات آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی رشته مدیریت ۲۴
سوالات آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته حسابداری ۲۶
سوالات آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی رشته حسابداری ۲۶
سوالات آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته اقتصاد ۲۷
سوالات آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی رشته اقتصاد ۲۹

حل سوالات آزمون کارشناسی ارشد رشته های مدیریت و حسابداری و اقتصاد

پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته مدیریت ۳۲
پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد رشته مدیریت ۳۵
پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته حسابداری ۴۲
پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد رشته حسابداری ۴۳
پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته اقتصاد ۴۳
پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد رشته اقتصاد ۴۹

تعریف معادله دیفرانسیل:

معادله دیفرانسیل، معادله ای است که شامل متغیر مستقل x ، متغیر وابسته یا تابع y و مشتقات آن (مثل y' ، y'') می باشد. حال:

اگر معادله دیفرانسیل، شامل مشتق های یک تابعِ **یک** متغیره باشد: $y = f(x)$ معادله دیفرانسیل، **معمولی** است.

و اگر معادله دیفرانسیل شامل مشتق های **جزئی** یک تابع **دو** متغیره $f(x,y) = ۰$ ، یا چند متغیره $f(x,y,z) = ۰$ مستقل باشد، به آن معادله دیفرانسیل **با مشتق های جزئی** گفته می‌شود.

نمادهای معادله دیفرانسیل:

$$F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = ۰$$

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^۲y}{dx^۲}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = ۰ \quad , \quad F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right) = ۰$$

مثال۱) روابط زیر نمونه‌هایی از معادله دیفرانسیل می باشند:

الف) $y'' - ۴y' + ۲y - x^۲ + ۳ = ۰$ (معادله دیفرانسیل معمولی)

ب) $\frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲} + \frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲} = ۰$ (معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی)

مرتبه معادله دیفرانسیل:

بالاترین مرتبه مشتق را که در معادله وجود دارد، **مرتبه معادله** گویند.

مثلا معادله $y'''^۲ - y'^۵ = ۰$ از مرتبه سومه و $\frac{\partial^۲ y}{\partial x^۲} + xy\frac{\partial z}{\partial x} = ۰$ از مرتبه دوم.

درجه معادله دیفرانسیل:

توان **بزرگترین** مرتبه مشتقِ موجود در معادله دیفرانسیل را **درجه** معادله گویند.

برای مثال معادله $y'''^{۲} - y'^{۵} = ۰$ از درجه دومه و $\frac{\partial^{۲} y}{\partial x^{۲}} + xy\frac{\partial z}{\partial x} = ۰$ از درجه اول.

تشکیل معادله دیفرانسیل:

تابع y با n پارامتر مستقل $c_{۱}$ تا c_n را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$y = f(x, c_{۱}, c_{۲}, \dots c_n)$$

از این تابع، n بار مشتق می گیریم. حال می توان گفت:

$$y' = f'(x, c_{۱}, c_{۲}, \dots c_n)$$
$$\vdots$$
$$y^{(n)} = f^{(n)}(x, c_{۱}, c_{۲}, \dots c_n)$$

حال اگر بین این روابط، ثابت های c_i را حذف کنیم، یک **معادله** دیفرانسیلِ مرتبه n خواهیم داشت:

$$\boxed{F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = ۰}$$

مثال۲) معادله دیفرانسیل خانواده منحنی های $y = cx^{۲}$ را بیابید.[۱]

$$\begin{cases} y = cx^{۲} \\ y' = ۲cx \end{cases} \rightarrow \frac{y}{y'} = \frac{\cancel{c}x^{۲}}{۲\cancel{c}x} \rightarrow \frac{y}{y'} = \frac{x}{۲} \xRightarrow{\text{طرفین وسطین می کنیم}} y'x = ۲y$$

$$\rightarrow y'x - ۲y = ۰$$

جواب های معادله دیفرانسیل:

تابع با ضابطه $y = f(x)$ را **جواب** یک معادله دیفرانسیل می‌گویند، هرگاه در معادله صدق کند.

به بیان دیگر، جواب معادله دیفرانسیل **معمولی**، تابعی است که در آن مشتق ها یا دیفرانسیل ها وجود ندارند و ضمناً در معادله دیفرانسیل صدق می کند. چنین جوابی بسته به آن که ثابت انتگرال گیری مشخص شده باشد یا نه، ممکن است **جواب عمومی** یا **خصوصی** باشد.

---

[۱] رنجبران صفحه ۶۸۸

حل معادلات دیفرانسیل:

منظور از حل معادلات دیفرانسیل $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = ۰$ پیدا کردن **جواب عمومی** است و همین طور با در نظر گرفتن شرایط مرزی، باید به **جواب خصوصی** معادله دیفرانسیل برسیم.

تعیین جواب هر معادله دیفرانسیل به راحتی ممکن نیست، لذا تنها معادلاتی خاص را با روشهای ویژه، می توان حل کرد که در زیر، به نحوه ی حل برخی معادلات دیفرانسیل می پردازیم.

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول[۱]

اگر معادله دیفرانسیل به صورت $y' + y.f(x) = g(x)$ باشد، به آن معادله دیفرانسیل **خطی** مرتبه **اول** می گوئیم که برای بدست آوردن جواب آن، عملیات زیر را انجام می دهیم:

گام۱) از رابطه زیر، فاکتور انتگرال A را پیدا می کنیم:

$$\boxed{A = e^{\int f(x)dx}}$$

گام۲) از رابطه زیر جواب **عمومی** را محاسبه می کنیم:

$$y = \frac{C}{A} + \frac{۱}{A}\int A.g(x)\,dx$$

به طور مشابه برای معادله دیفرانسیل $x' + x.f(y) = g(x)$ داریم:

$$\boxed{\begin{aligned} &A = e^{\int f(y)dy} \\ &x = \frac{C}{A} + \frac{۱}{A}\int A.g(y)\,dy \end{aligned}}$$

تست۳) اگر داشته باشیم $xy' + y = e^x$ مقدار y کدام است؟ (مدیریت دولتی آزاد ۸۹)

۱) $y = xe^x + cx$ ۲) $y = xe^x + c$

۳) $y = \frac{e^x}{x} + \frac{c}{x}$ ۴) $y = e^x - x + c$

---

[۱] رنجبران صفحه ۶۹۲

$$\boxed{f(x,y)+\varphi(y)=c}$$

مثال۷) معادله دیفرانسیل $(۲x+y)dx+(۳y^۲+x)dy=۰$ را حل کنید.[۱]

حل) اول باید بررسی کنیم تا ببینیم معادله دیفرانسیل از نوع معادله دیفرانسیل **کامل** است یا خیر!!!

$$M=۲x+y \quad , \qquad N=۳y^۲+x$$
$$\frac{\partial M}{\partial y}=۱ \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x}=۱$$

پس معادله فوق یک معادله دیفرانسیل **کامل** است.

$$\int (۲x+y)\,dx = x^۲+yx+\varphi(y)$$

از این رابطه نسبت به y مشتق می گیریم و آن را با $N(x,y)$ مساوی قرار می دهیم:

$$x+\varphi'(y)=۳y^۲+x \quad \rightarrow \quad \varphi'(y)=۳y^۲$$

برای بدست آوردن $\varphi(y)$ از رابطه بالا انتگرال می گیریم.

$$\int ۳\,y^۲dy=y^۳+c \quad \rightarrow \quad x^۲+yx+y^۳+c=۰$$ (جواب عمومی معادله)

عامل انتگرال ساز [۲]

معادله دیفرانسیل $Mdx+Ndy=۰$ را در نظر بگیرید. کمتر ممکن است این معادله به صورت کامل باشد، لذا با ضرب معادله در تابع $\mu(x,y)$ آن را به معادله **کامل** تبدیل می کنیم که به این تابع، **عامل انتگرال ساز** می گوئیم بنابراین داریم:

$$\mu(x,y)\,M(x,y)\,dx\ +\mu(x,y)\,N\,(x,y)\,dy=۰$$

اگر $\mu(x,y)$ یک عامل انتگرال ساز باشد، باید داشته باشیم:

---

[۱] محمودیان صفحه ۸۹۲

[۲] محمودیان صفحه ۸۹۲

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$$

$$\left(M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x}\right) = (\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y})\mu$$

لذا می توان گفت هر عامل انتگرال ساز در رابطه فوق صدق می‌کند و این رابطه را با در نظر گرفتن حالات زیر ساده تر می کنیم.

حالت۱) اگر عامل انتگرال ساز **فقط** تابعی از x باشد:

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \phi(x) \qquad : x \text{ تابعی فقط بر حسب } \mu$$

حالت۲) اگر عامل انتگرال ساز **فقط** تابعی از y باشد:

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \phi(y) \qquad : y \text{ تابعی فقط بر حسب } \mu$$

حال معادله دیفرانسیل معمولی $\frac{\mu'}{\mu} = \phi(x)$ یا $\frac{\mu'}{\mu} = \phi(y)$ را حل می‌کنیم و $\mu(x)$ یا $\mu(y)$ را بدست می آوریم.

با بدست آوردن عامل انتگرال ساز و ضرب آن در معادله دیفرانسیل، $Mdx + Ndy = ۰$ معادلهٔ ما به معادله دیفرانسیل **کامل** تبدیل می شود که مراحل آن را ذکر کردم. در غیر اینصورت، μ تابعی بر حسب x و y است.

مثال۸) معادله دیفرانسیل $ydx + (۲x - ye^y)dy = ۰$ را حل کنید. [۱]

حل) اول بررسی می کنیم که معادله داده شده کامل است یا نه.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = ۱ \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = ۲$$

چون M نسبت به N از جملات ساده تری تشکیل شده است، پس رابطه زیر را تشکیل میدیم.

---

[۱] محمودیان صفحه ۸۹۳

سوالات آزمون کارشناسی ارشد

رشته های مدیریت و حسابداری و اقتصاد

معادلات دیفرانسیل

سوالات آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته مدیریت

۱) اگر $y'' = e^{۲x} - x$ باشد، با فرض صفر بودن مقادیر ثابت ، مقدار y در نقطه $x = ۰$ کدام است؟ (مدیریت سراسری ۷۳)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

۲) اگر داشته باشیم $xy' + y = e^x$ ، مقدار y کدام است؟ (مدیریت سراسری ۷۹)

۱) $y = xe^x + cx$ ۲) $y = \frac{۱}{x}e^x + \frac{c}{x}$

۳) $y = xe^x + c$ ۴) $y = e^x - x + c$

۳) مقدار تقریبی $\sqrt[۳]{(۲/۰۱)^۲ + ۲(۲/۰۱)}$ به کمک دیفرانسیل کدام است؟(مدیریت سراسری ۹۰)

۱) ۲/۰۱۲ ۲) ۲/۰۰۸ ۳) ۲/۰۰۵ ۴) ۲/۰۱۴

۴) دیفرانسیل تابع $Z = \sqrt[۳]{x^۲ + ۴y^۳}$ در نقطه (۲,۱) به ازای $dx = ۰/۶$ و $dy = ۰/۰۵$ کدام است؟ (مدیریت سراسری ۹۱)

۱) ۰/۱۷۵ ۲) ۰/۲۵ ۳) ۰/۱۵ ۴) ۰/۱۲۵

سوالات آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی رشته مدیریت

۵) جواب معادله ی دیفرانسیل $y'' - y = ۰$ که در شرایط $y(۰) = ۰$ و $y'(۰) = ۱$ صدق می کند. عبارت است از: (مدیریت بازرگانی آزاد ۷۸)

۱) $y = e^x + e^{-x}$ ۲) $y = \frac{۱}{۲}e^x - \frac{۱}{۲}e^{-x}$

۳) $y = \frac{۱}{۲}e^x + \frac{۱}{۲}e^{-x}$ ۴) $y = \frac{۱}{۲}e^{-x} - \frac{۳}{۲}e^x$

۶) جوابی از معادله دیفرانسیل $y'' - ۳y' - ۱۰y = ۰$ که در شرایط $y(۰) = ۳$ و $y'(۰) =$ ۱۵ صدق کند عبارت است از: (مدیریت بازرگانی آزاد ۷۸)

۱) $y = ۳e^{۵x}$ ۲) $y = ۳e^x + ۵e^{-x}$

۳) $y = ۳e^x + ۵e^{-۳x}$ ۴) $y = ۳e^x - ۵e^{-۳x}$

پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته مدیریت

۱. گزینه ۲ صحیح است.

$$y'' = e^{۲x} - x$$

$$y' = \int (e^{۲x} - x)dx \xrightarrow{\int x^n dx = \frac{x^{n+۱}}{n+۱}} \frac{۱}{۲}e^{۲x} - \frac{x^{۱+۱}}{۱+۱} = \frac{۱}{۲}e^{۲x} - \frac{x^۲}{۲}$$

$$y = \int (\frac{۱}{۲}e^{۲x} - \frac{x^۲}{۲})dx = \frac{۱}{۲}\int (e^{۲x} - x^۲)dx \xrightarrow{\int x^n dx = \frac{x^{n+۱}}{n+۱}} \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}e^{۲x} - \frac{x^{۲+۱}}{۲+۱})$$

$$y = \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}e^{۲x} - \frac{x^۳}{۳}) = \frac{۱}{۴}e^{۲x} - \frac{۱}{۶}x^۳$$

$$y\Big|_{x=۰} = \frac{۱}{۴}e^{۲(۰)} - \frac{۱}{۶}(۰)^۳ = \frac{۱}{۴}e^{۰} - ۰ = \frac{۱}{۴}(۱) = \frac{۱}{۴}$$

---

۲. گزینه ۲ صحیح است.

حل کلاسیک : معادله داده شده دیفرانسیل خطی مرتبه اول می باشد. معادله را به صورت ناقص و یک طرفه حل می کنیم در اینصورت می توان گفت :

$$xy' + y = ۰ \xrightarrow{y' = \frac{dy}{dx}} x\frac{dy}{dx} + y = ۰ \to \frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = ۰ \to \int \frac{dy}{y} + \int \frac{dx}{x} = lnc$$

$$Lny + Lnx = Lnc \;\to\; Lnxy = Lnc \;\to\; xy = c \;\to\; y = \frac{c}{x}$$

ابتدا c را طوری مشخص می کنیم که جواب معادله ناقص که در بالا بدست آوردیم $(y = \frac{c}{x})$ جواب معادله اولیه نیز باشد.

$$y = \frac{c}{x} \xrightarrow{y = \frac{u}{v} \to y' = \frac{u'v - v'u}{v^۲}} y' = \frac{c'x - c}{x^۲}$$

$$xy' + y = e^x \to x\left(\frac{c'x - c}{x^۲}\right) + \frac{c}{x} = e^x \to \frac{c'x - e}{x} + \frac{c}{x} = e^x \to \frac{c'x}{x} = e^x$$

$$c' = e^x \to c = e^x + c_۱ \;\to\; y = \frac{c}{x} \xrightarrow{c = e^x + c_۱} y = \frac{e^x + c_۱}{x} = \frac{۱}{x}e^x + \frac{c_۱}{x}$$

حل تکنیکی : ابتدا سعی می کنیم معادله داده شده در صورت سؤال را بر حسب y نوشته و سپس با استفاده از گزینه ها سؤال را حل کنیم گزینه ای صحیح خواهد بود که در صورت سؤال صدق کند.

$$xy' + y = e^x \quad \rightarrow \quad y = e^x - xy'$$

بررسی گزینه ها:

گزینه ۱)

$y = xe^x + cx \rightarrow y' = e^x + xe^x + c \rightarrow$ قرار دادن در ضابطه سؤال $\rightarrow y = e^x - xy'$

$xe^x = cx \overset{???}{\Rightarrow} e^x - x(e^x + xe^x + c) \rightarrow xe^x + cx \neq e^x - xe^x - x^2e^x - xc$ ✗

طرف راست با طرف چپ تساوی با هم برابر نیستند پس گزینه ۱ حذف می شوند

گزینه ۲)

قرار دادن در ضابطه سؤال $\quad y = \frac{1}{x}e^x + \frac{c}{x} \quad \rightarrow \quad y' = -\frac{1}{x^2}e^x + \frac{1}{x}e^x + \frac{-c}{x^2} \quad \rightarrow$

$$xy' + y = e^x \quad \rightarrow \quad x\left(-\frac{1}{x^2}e^x + \frac{1}{x}e^x - \frac{c}{x^2}\right) + \frac{1}{x}e^x + \frac{c}{x} = e^x$$

$$\left(-\frac{x}{x^2}e^x + \frac{x}{x}e^x - \frac{cx}{x^2}\right) + \frac{1}{x}e^x + \frac{c}{x} \quad \overset{???}{\Rightarrow} \quad e^x$$

$-\frac{1}{x}e^x + e^x - \frac{c}{x} + \frac{1}{x}e^x + \frac{c}{x} \overset{???}{\Rightarrow} e^x \rightarrow e^x = e^x \rightarrow$ طرف چپ و راست تساوی برابر شدند

---

۳. گزینه ۳ صحیح است.

حل کلاسیک : اگر $x = 2$ و $\Delta x = 0/01$ در نظر بگیریم برای بدست آوردن مقدار تقریبی کافیست $\sqrt[3]{x^2 + 2x}$ را در نظر گرفته و داریم:

$$f(x + \Delta x) \simeq f(x) + f'(x)\Delta x$$

$$f(x + \Delta x) = \sqrt[3]{x^2 + 2x} + \frac{2x + 2}{3\sqrt[3]{(x^2 + 2x)^2}}\Delta x$$

$$f(2 + 0/01) = \sqrt[3]{2^2 + 2(2)^2} + \frac{2(2) + 2}{3\sqrt[3]{(2^2 + 2(2)^2}}\Delta x$$

$$f(۲+۰/۰۱)=\sqrt[۳]{۸}+\frac{۶}{۳\sqrt[۳]{۸^۲}}(۰/۰۱)=\sqrt[۳]{۲^۳}+\frac{۶}{۳\sqrt[۳]{۶۴}}(۰/۰۱)=۲+\frac{۶}{۳\sqrt[۳]{۴^۳}}(۰/۰۱)$$

$$۲+\frac{۲}{۴}(۰/۰۱)=۲+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۱۰۰}=۲+\frac{۱}{۲۰۰}=۲/۰۰۵$$

حل تکنیکی : با استفاده از فرمول $\sqrt[n]{a^n+b}\cong a+\frac{b}{na^{n-۱}}$ می توان رادیکال با هر فرجه ای را بدست آورد :

$$(۲/۰۱)^۲=\frac{۲۰۱}{۱۰۰}\times\frac{۲۰۱}{۱۰۰}=\frac{۴۰۴۰۱}{۱۰۰۰۰}=۴/۰۴۰۱$$

تا دو رقم اعشار کافی است، یعنی: ۴/۰۴

$$۲(۲/۰۱)=۴/۰۲$$

$$\sqrt[۳]{۴/۰۴+۴/۰۲}=\sqrt[۳]{۸/۰۶}=\sqrt[۳]{۲^۳+۰/۰۶}=۲+\frac{۰/۰۶}{۳\times۲^۲}=۲+\frac{۰/۰۶}{۱۲}=۲+\frac{۱}{۲۰۰}=۲/۰۰۵$$

---

۴. گزینه ۲ صحیح است.

حل : فرمول دیفرانسیل تابع برابر است با:

$$z=\sqrt[۳]{x^۲+۴y^۳}$$

$$dz=z_x dx+z_y dy$$

$$\begin{cases} z_x=\dfrac{۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^۲+۴y^۲)^۲}}\xRightarrow{x=۲\ ,y=۱}\dfrac{۲(۲)}{۳\sqrt[۳]{((۲^۲)+۴(۱)^۲)^۲}}=\dfrac{۴}{۳\sqrt[۳]{۶۴}}=\dfrac{۲}{۳\sqrt[۳]{۴^۳}}=\dfrac{۴}{۳\times۴}=\dfrac{۱}{۳} \\ z_y=\dfrac{۱۲y^۲}{۳\sqrt[۳]{(x^۲+۴y^۲)^۲}}\xRightarrow{x=۲\ ,y=۱}\dfrac{۱۲(۱)^۲}{۳\sqrt[۳]{(۲^۲+۴(۱)^۲)^۲}}=\dfrac{۱۲}{۳\sqrt[۳]{۶۴}}=\dfrac{۱۲}{۳\sqrt[۳]{۴^۳}}=\dfrac{۱۲}{۳\times۴}=۱ \end{cases}$$

$$dz=z_x\,dx+z_y\,dy$$

$$\xrightarrow[dy=۰/۰۵]{dx=۰/۶}dz=\left(\frac{۱}{۳}\times\frac{۶}{۱۰}\right)+\left(۱\times\frac{۵}{۱۰۰}\right)=\frac{۶}{۳۰}+\frac{۵}{۱۰۰}=\frac{۶۰۰+۱۵۰}{۳۰۰۰}=\frac{۷۵۰}{۳۰۰۰}=\frac{۱}{۴}=۰/۲۵$$

$$\xrightarrow{\text{گرفتن انتگرال از طرفین تساوی}} \int ydy = \int -xdx \xrightarrow{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c} \frac{y^{1+1}}{1+1} = -\frac{x^{1+1}}{1+1} + c$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c \quad \rightarrow \quad \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = c \quad \rightarrow \quad \frac{y^2 + x^2}{2} = c \quad \rightarrow \quad y^2 + x^2 = 2c$$

$$y^2 + x^2 = c$$

---

۴۰. گزینه ۴ صحیح است.

$$\frac{dx}{dt} - 2xt = 0 \rightarrow \frac{dx}{dt} = 2xt \rightarrow \frac{dx}{x} = 2tdt \xrightarrow{\text{گرفتن انتگرال از طرفین تساوی}} \int \frac{dx}{x} = \int 2tdt$$

$$\xrightarrow{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c} lnx = 2\frac{t^{1+1}}{1+1} + c \quad \rightarrow \quad lnx = t^2 + c \xrightarrow[x(0)=1]{x=1} ln1 = (0)^2 + c$$

$$0 = 0 + c \quad \rightarrow \quad \boxed{c = 0}$$

$$t = 1 \quad \rightarrow \quad lnx = 1 \quad \rightarrow \quad \boxed{x = e}$$

---

۴۱. گزینه ۳ صحیح است.

$$(x^2 + 1)dy - ydx = 0 \quad \rightarrow \quad (x^2 + 1)dy = ydx \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x^2 + 1}$$

$$\xrightarrow{\text{گرفتن انتگرال از طرفین تساوی}} \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x^2 + 1} \quad \rightarrow \quad lny = Arctanx + c$$

$$y(0) = 1 \xrightarrow{x=0\ ,y=1} ln1 = Arctan0 + c \quad \rightarrow \quad 0 = 0 + c \quad \rightarrow \boxed{c = 0}$$

$$lny = Arctanx \quad \rightarrow \quad y = e^{Arctanx}$$

---

۴۲. گزینه ۱ صحیح است.

حل : با استفاده از روش کاهش مرتبه و با فرض $y' = p$ داریم:

$$y'' - y' = 2x \quad \rightarrow \quad p' - p = 2x \quad \rightarrow \quad p = e^{-\int -dx}[\int 2x\, e^{\int -dx} dx + c]$$

$$p = e^x(-2e^{-x}(x + 1) + c) \quad \rightarrow \quad -2(x + 1) + ce^x = y'$$

با توجه به اینکه $y'(۰) = ۰$ می باشد، پس:

$$y'(۰) = -۲(۰ + ۱) + ce^{۰} = -۲ + c = ۰ \quad \rightarrow \quad \boxed{c = ۲}$$

$$y' = -۲(x + ۱) + ۲e^{x}$$

$$y = \int (-۲x - ۲ + ۲e^{x})\, dx = -۲\frac{x^{۱+۱}}{۱ + ۱} - ۲x + ۲e^{x} + k$$

$$y = -x^{۲} - ۲x + ۲e^{x} + k$$

با توجه به اینکه $y(۰) = ۵$ می باشد، بنابراین می توان گفت :

$$y(۰) = ۰ - ۰ + ۲e^{۰} + k = ۵ \quad \rightarrow \quad ۲(۱) + k = ۵ \quad \rightarrow \quad ۲ + k = ۵ \quad \rightarrow$$

$$k = ۵ - ۲ = ۳$$

$$y = -x^{۲} - ۲x + ۲e^{x} + ۳$$

$$y(۱) = -(۱)^{۲} - ۲(۱) + ۲e + ۳ = -۱ - ۲ + ۲e + ۳ = ۲e$$