ریاضیات DLM

آموزش سه‌بعدی مفاهیم

بردار و فضای برداری

طراح، مؤلف و گردآورنده:

امین بنیاد گذار

ویراستار علمی:

حسین خدامی

عنوان **صفحه**

آموزش کلاسیک بردار، خط و صفحه

دستگاه مختصات دکارتی دو بعدی ۷
دستگاه مختصات دکارتی سه بعدی ۷
مشخص کردن مختصات یک نقطه در فضا ۹
نمایش محورهای مختصات با مجموعه ی نقاط ۹
نمایش صفحات مختصات با مجوعه های نقاط ۹
فاصله نقطه از محور ها و صفحه های مختصات ۹
تصویر نقطه ۱۱
پیکان های هم ارز ۱۲
بردار ۱۲
طول بردار ۱۳
بردار صفر ۱۳
بردار یکه (واحد) ۱۴
بردار جهت (یکه کردن بردار) ۱۴
جمع و تفریق دو بردار ۱۵
ضرب عدد در بردار ۱۵
خواص جمع بردارها و ضرب عدد در بردار ۱۶
قرینه یک بردار ۱۷
تساوی دو بردار ۱۷
بردارهای موازی ۱۸
مجموع و تفاضل دو بردار به روش هندسی ۱۹
ضرب داخلی (نقطه ای یا اسکالر) بردارها ۲۰
خواص ضرب داخلی ۲۱
کسینوس های هادی ۲۲
اتحاد های ضرب داخلی ۲۴
تصویر یک بردار بر بردار دیگر ۲۵
قرینه یک بردار نسبت به بردار دیگر ۲۶

تصویر بردار روی محورها و صفحات مختصات ۲۷
ضرب خارجی دو بردار (ضرب برداری)..... ۲۹
خواص ضرب خارجی ۳۱
ضرب بردارهای یکهٔ غیر هم نام ۳۲
دو اتحاد مهم..... ۳۳
مساحت مثلث و متوازی الاضلاع ۳۴
ضرب سه گانه ۳۵
ضرب مختلط..... ۳۶
حجم متوازی الاضلاع..... ۳۷
معادله خط در فضا..... ۳۸
بردار هادی خط ۴۰
معادله خطوط موازی محورها ۴۱
وضعیت دو خط نسبت به هم ۴۲
فاصله نقطه تا خط ۴۵
فاصله بین دو خط موازی..... ۴۶
زاویه بین دو خط ۴۷
معادله صفحه..... ۴۸
معادله صفحه گذرانده از سه نقطه..... ۵۰
زاویه خط و صفحه، زاویه صفحه و صفحه ۵۱
وضعیت دوصفحه..... ۵۳
وضعیت خط و صفحه..... ۵۴
فاصله نقطه تا صفحه..... ۵۶
فاصله خط تا صفحه ۵۷
فاصله دو صفحه موازی..... ۵۸
مکان هندسی مجموعه ای از نقاط در فضا..... ۵۹
مکان هندسی نقاطی از فضای R^3 (دو صفحه موازی)..... ۵۹
مکان هندسی نقاطی از فضا (دو صفحه غیر موازی)..... ۶۰
وضعیت نقطه و صفحه..... ۶۱

صفحه قاطع محورهای مختصات ۶۳
ترکیب خطی بردارها..... ۶۴
استقلال خطی و وابستگی خطی..... ۶۵

سوالات آزمون کارشناسی ارشد رشته های مدیریت ، حسابداری و اقتصاد

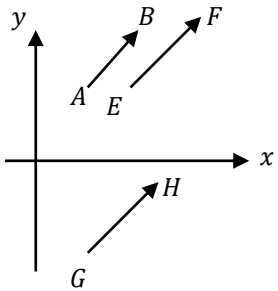
سوالات آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته مدیریت ۷۰
سوالات آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی رشته مدیریت..... ۷۱
سوالات آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته حسابداری..... ۷۳
سوالات آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی رشته حسابداری..... ۷۴
سوالات آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته اقتصاد..... ۷۵
سوالات آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی رشته اقتصاد..... ۷۸

حل سوالات آزمون کارشناسی ارشد رشته های مدیریت و حسابداری و اقتصاد

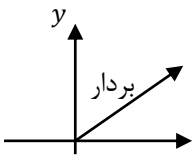
پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته مدیریت..... ۸۲
پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد رشته مدیریت ۸۵
پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته حسابداری ۹۳
پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد رشته حسابداری..... ۹۵
پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته اقتصاد ۹۷
پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد رشته اقتصاد..... ۱۰۵

پیکان های هم ارز:

هر پاره خط جهت دار را یک **پیکان** می‌نامند. پیکان های موازی، هم‌جهت و هم‌طول را پیکان های **هم ارز** می نامند. مانند پیکان های رو به رو:



بردار:



پاره خط جهت داری است (یعنی پیکانی است) که ابتدای آن بر **مبدأ** مختصات واقع است.

اگر نقطه $A(x_1, y_1, z_1)$ ابتدای یک پیکان و نقطه $B(x_2, y_2, z_2)$ انتهای آن پیکان باشد، سه تایی مرتب $(x_2 - x_1\ ,\ y_2 - y_1\ ,\ z_2 - z_1)$ را **بردار هم ارز** $\overrightarrow{AB}$ می نامیم.

در روابط و شکل‌ها به جای پیکان، از بردار هم ارز استفاده می کنیم. به عبارت ساده تر اگر نقطه $A(x_1, y_1, z_1)$ ابتدای یک پیکان و $B(x_2, y_2, z_2)$ انتهای آن باشد داریم:

$$\boxed{\overrightarrow{AB}: (\text{انتها} - \text{ابتدا}) \quad \text{یا} \quad \overrightarrow{AB}: (x_2 - x_1\ ,\ y_2 - y_1\ ,\ z_2 - z_1)}$$

مثال۵) دو نقطه $A(1, 2, 3)$ و $B(1, 1, 1)$ مفروضند. بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BA}$ را بدست آورید؟

حل)

$$\overrightarrow{AB}: (1 - 1\ ,\ 1 - 2\ ,\ 1 - 3) \ \rightarrow\ \overrightarrow{AB}(0, -1, -2)$$
$$\overrightarrow{BA}: (1 - 1\ ,\ 2 - 1\ ,\ 3 - 1) \ \rightarrow\ \overrightarrow{BA}(0, 1, 2)$$

طول بردار:

طول بردارِ $\overrightarrow{AB} = (a_۱, a_۲, a_۳) = (x_۲ - x_۱, y_۲ - y_۱, z_۲ - z_۱)$ از رابطه زیر بدست می آید:

$$\boxed{\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{a_۱^۲ + a_۲^۲ + a_۳^۲} = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲ + (z_۲ - z_۱)^۲}}$$

مثال۶) دو نقطه $A(۱,۲,۳)$ و $B(۱,۱,۲)$ مفروضند. $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ کدام است؟

حل) $\overrightarrow{AB} = (۱ - ۱\ ,\ ۱ - ۲\ ,\ ۲ - ۳) \ \rightarrow\ \overrightarrow{AB} = (۰, -۱, -۱)$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{۰^۲ + (-۱)^۲ + (-۱)^۲} = \sqrt{۰ + ۱ + ۱} = \sqrt{۲}$$

تست) دو بردار $a = (۱,۲,۱)$ و $b = (۰,۱,۲)$ مفروضند. طول دو بردار $c = ۲a - ۳b$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۴}$ ۲) $\sqrt{۱۸}$ ۳) $\sqrt{۲۱}$ ۴) $\sqrt{۲۶}$

حل) ابتدا بردار $۲a - ۳b$ را تشکیل می دهیم. سپس طول آن را محاسبه می کنیم:

$$a = (۱,۲,۱) \quad , \quad b(۰,۱,۲) \Rightarrow \begin{cases} ۲a = (۲,۴,۲) \\ ۳b = (۰,۳,۶) \end{cases}$$

$$۲a - ۳b = (۲,۴,۲) - (۰,۳,۶) = (۲ - ۰, ۴ - ۳, ۲ - ۶) = (۲,۱,-۴)$$

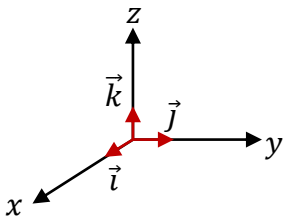
$$|۲a - ۳b| = \sqrt{(۲)^۲ + (۱)^۲ + (-۴)^۲} = \sqrt{۴ + ۱ + ۱۶} = \sqrt{۲۱}$$

بردار صفر:

بردار متناظر با نقطه ی $o(۰,۰,۰)$ را بردار صفر می نامند و آن را با o نشان می دهند.

بردار یکه (واحد):

بردار به طول واحد را بردار **یکه** می نامند. بردارهای یکه هم امتداد و هم جهت با محورهای مختصات x و y و z را به ترتیب i و j و k می نامند و داریم:



$$\vec{i} = (۱,۰,۰) \quad \vec{j} = (۰,۱,۰) \quad \vec{k} = (۰,۰,۱)$$
$$|i| = |j| = |k| = ۱$$

❄هر بردار $a = (a_۱ و a_۲ و a_۳)$ را می‌توانیم بصورت $a = a_۱ i + a_۲ j + a_۳ k$ نشان می دهیم، به عنوان مثال، بردار $a = (۱,۲,۳)$ را می‌توان بصورت $a = i + ۲j + ۳k$ نشان داد و برعکس.

بردار جهت (یکه کردن بردار):

بردار یکه ای که هم امتداد و هم جهت با بردار a می باشد را **بردار جهت** a می نامند و آن را با e_a نشان می دهند. برای بدست آوردن بردار یکه یک بردار، تک تک مؤلفه های آن بردار را بر طول بردار تقسیم می کنیم به عبارت دیگر:

$$\boxed{e_a = \frac{۱}{|a|}(a) \quad \rightarrow \quad e_a = \left(\frac{a_۱}{|a|}, \frac{a_۲}{|a|}, \frac{a_۳}{|a|}\right)}$$

مثال۷) بردار یکه بردار $a = (۲, -۱, -۲)$ را بدست آورید.

حل)

$$\begin{cases} e_a = \frac{۱}{|a|}(a) \\ |a| = \sqrt{(۲)^۲ + (-۱)^۲ + (-۲)^۲} = \sqrt{۴ + ۱ + ۴} = \sqrt{۹} = ۳ \\ e_a = \frac{۱}{۳}(۲, -۱, -۲) = \left(\frac{۲}{۳}, \frac{-۱}{۳}, \frac{-۲}{۳}\right) = \frac{۲}{۳}i - \frac{۱}{۳}j - \frac{۲}{۳}k \end{cases}$$

جمع و تفریق دو بردار:

مجموع و تفاضل دو بردار $\vec{a} = (a_۱, a_۲, a_۳)$ و $\vec{b} = (b_۱, b_۲, b_۳)$ به صورت زیر می باشد :

۱) $\vec{a} + \vec{b} = (a_۱ + b_۱, a_۲ + b_۲, a_۳ + b_۳)$

۲) $\vec{a} - \vec{b} = (a_۱ - b_۱, a_۲ - b_۲, a_۳ - b_۳)$

مثال۸) دو نقطه $A(۱,۲,۳)$ و $B(۱,۱,۴)$ مفروضند.حاصل $\vec{A} + \vec{B}$ و $\vec{A} - \vec{B}$ را بدست آورید؟

حل)

$$\vec{A} + \vec{B} = (۱,۲,۳) + (۱,۱,۴) = (۱ + ۱,۲ + ۱,۳ + ۴) = (۲,۳,۷)$$

$$\vec{A} - \vec{B} = (۱,۲,۳) - (۱,۱,۴) = (۱ - ۱,۲ - ۱,۳ - ۴) = (۰,۱,-۱)$$

ضرب عدد در بردار:

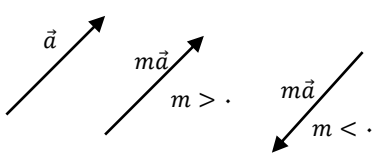
اگر عدد حقیقی m را $(m \in R)$ در بردار $\vec{a} = (a_۱, a_۲, a_۳)$ ضرب نماییم، حاصل بردارِ $\overrightarrow{ma}$عبارت است از :

$$\boxed{\overrightarrow{ma} = (ma_۱, ma_۲, ma_۳)}$$

به عبارت دیگر، اگر عدد حقیقی m را در برداری ضرب نماییم، عدد m در تک تک مؤلفه های بردار ضرب می شود.

⚠ **توجه** : اگر $m < ۰$ باشد، جهت بردار **عکس** می شود و اگر $m > ۰$ باشد جهت بردار **تغییر نمی‌کند**.

به عبارت دیگر، ضرب عدد حقیقی در بردار، ممکن است طول یا جهت بردار را تغییر دهد، اما هیچ گاه راستا را **تغییر نمی دهد.**



مثال۹) دو نقطه $A(۱,۲,۳)$ و $B(۱,۱,۴)$ مفروضند. بردارهای $۲\overrightarrow{AB}$ و $-۲\overrightarrow{AB}$ را بدست آورید؟

حل) $\overrightarrow{AB} = (۱-۱, ۱-۲, ۴-۳) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (۰,-۱,۱) \rightarrow \begin{cases} ۲AB = (۰,-۲,۲) \\ -۲AB = (۰,۲,-۲) \end{cases}$

> **نکته**: اگر a یک بردار و m یک عدد حقیقی باشد، آنگاه می توان گفت:
>
> $$\underbrace{|ma|}_{\text{طول بردار } ma} = \underbrace{|m|}_{\text{قدر مطلق عدد حقیقی } m} \times \underbrace{|a|}_{\text{طول بردار}}$$

مثال۱۰) اگر $|a| = ۵$ باشد، مطلوبست محاسبه $\left|-\frac{۲}{۵}a\right|$ و $|۲۰a|$

حل)

$$\left|-\frac{۲}{۵}a\right| = \left|-\frac{۲}{۵}\right||a| = \frac{۲}{۵} \times ۵ = ۲$$

$$|۲۰a| = |۲۰||a| = ۲۰ \times ۵ = ۱۰۰$$

خواص جمع بردارها و ضرب عدد در بردار:

اگر a و b و c سه بردار دلخواه و $\overline{o}(۰,۰,۰)$ بردار صفر و m و n اعداد حقیقی باشند داریم:

۱) $a + b = b + a$

۲) $a + (b + c) = (a + b) + c$

۳) $a + (-a) = (-a) + a = \overline{o}$

۴) $m(a + b) = ma + mb$

۵) $(m + n)a = ma + na$

۶) $m(na) = n(ma) = (mn)a$

۷) $۰ \times a = \overline{o} \neq ۰$

۸) $m \times \overline{o} = \overline{o} \neq ۰$

۹) $\overline{o} + a = a$

۱۰) $۱ \times a = a$

☠ **اخطار**: اگر بردار a را درعدد صفر ضرب کنیم، حاصل، بردار $\overline{o}$ می باشد، نه عدد صفر.

تست۸) قرینه بردار $a = j + ۳k$ نسبت به راستای $b = i - k$ کدام است؟

۱) $-i + ۳k$ ۲) $-۳i - j$ ۳) $۲i - j + k$ ۴) $۳i + j$

حل) $a = (۰,۱,۳) \quad , \quad b = (۱,۰,-۱)$

$$a' = \left(\frac{a.b}{|b|^۲}\right) b = \frac{۰ + ۰ - ۳}{(\sqrt{۲})^۲} (۱,۰,-۱) = \left(-\frac{۳}{۲}, ۰, \frac{۳}{۲}\right)$$

$$a'' = ۲a' - a = ۲\left(-\frac{۳}{۲}, ۰, \frac{۳}{۲}\right) - (۰,۱,۳) = (-۳,۰,۳) - (۰,۱,۳)$$

$a'' = (-۳,-۱,۰) = -۳i - j$ **گزینه ۲ صحیح است.**

تصویر بردار روی محورها و صفحات مختصات:

بردار $\vec{a} = (a_۱, a_۲, a_۳)$ را در نظر بگیرید. بردار تصویر و طول بردار تصویر روی محورها و صفحات مختصات بصورت زیر می باشد:

***a*)** اگر بردار فوق را روی محور x ها تصویر کنیم، بردار تصویر، $(a_۱, ۰,۰)$ است و طول بردار تصویر، $|a_۱|$ می باشد.

***b*)** اگر بردار فوق را روی محور y ها تصویر کنیم، بردار تصویر، $(۰, a_۲, ۰)$ است و طول بردار تصویر، $|a_۲|$ می باشد.

***c*)** اگر بردار فوق را روی محور z ها تصویر کنیم، بردار تصویر، $(۰,۰, a_۳)$ است و طول بردار تصویر، $|a_۳|$ می باشد.

***d*)** اگر بردار فوق را روی صفحه xy تصویر کنیم، بردار تصویر، $(a_۱, a_۲, ۰)$ است و طول بردار تصویر، $\sqrt{a_۱^۲ + a_۲^۲}$ می باشد.

***e*)** اگر بردار فوق را روی صفحه xz تصویر کنیم ، بردار تصویر، $(a_۱, ۰, a_۳)$ است و طول بردار تصویر، $\sqrt{a_۱^۲ + a_۳^۲}$ می باشد.

f) اگر بردار فوق را روی صفحه yz تصویر کنیم، بردار تصویر، $(۰, a_۲, a_۳)$ است و طول بردار تصویر، $\sqrt{a_۲^۳ + a_۳^۲}$ می باشد.

کلمه رمز : تصویر چاپلوس؟!!!! براساس روابط فوق، واضح است که بردار را بر هر محور یا صفحه‌ای تصویر کرده‌ایم، تصویر، مؤلفه های آن محور یا صفحه را حفظ کرده است و مؤلفه های دیگر را به **صفر** تبدیل کرده است. به عنوان مثال تصویر بردار ، روی محور x ها فقط x دارد و روی صفحه xy فقط x و y دارد.

مثال جامع ۱۷: بردار $a = (۱,-۲,۳)$ را روی محورها و صفحات مختصات تصویر می کنیم. بردارهای تصویر و طول این بردارها را تعیین کنید.

حل)

محور x ها: بردار: $(۱,۰,۰)$ و طول $|۱| = ۱$

محور y ها: بردار $(۰,-۲,۰)$ و طول $|-۲| = ۲$

محور z ها: بردار $(۰,۰,۳)$ و طول $|۳| = ۳$

صفحه xy : بردار $(۱,-۲,۰)$ و طول $\sqrt{۱^۲ + ۲^۲} = \sqrt{۱ + ۴} = \sqrt{۵}$

صفحه xz : بردار $(۱,۰,۳)$ و طول $\sqrt{۱^۲ + ۳^۲} = \sqrt{۱ + ۹} = \sqrt{۱۰}$

صحفه yz : بردار $(۰,-۲,۳)$ و طول $\sqrt{۲^۲ + ۳^۲} = \sqrt{۴ + ۹} = \sqrt{۱۳}$

تست۹) اگر تصاویر بردار $a = \left(۱,۲,\sqrt{۳}\right)$ روی محور oy و صفحه xz را به ترتیب b و c فرض کنیم، حاصل $|b||c|$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

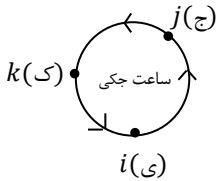
$$a = \left(۱,۲,\sqrt{۳}\right) \xrightarrow{\text{تصویر روی محور } oy} b = (۰,۲,۰) \rightarrow |b| = \sqrt{۰^۲ + ۲^۲ + ۰^۲} = \sqrt{۴} = ۲$$

$$a = \left(۱,۲,\sqrt{۳}\right) \xrightarrow{\text{تصویر روی محور } xz} c = \left(۱,۰,\sqrt{۳}\right) \rightarrow |c| = \sqrt{۱^۲ + ۰^۲ + \sqrt{۳}^۲} \rightarrow |c| = \sqrt{۴} = ۲$$

$$|b||c| = ۲ \times ۲ = ۴$$

گزینه ۳ صحیح است.

ضرب بردارهای یکهٔ غیر هم نام:



از روش جالب (**ساعت جکی**) استفاده می کنیم:

در حاصلضرب خارجی بردارهای j و k و i، ضرب خارجی دو بردار، برابر بردار سوم یا **قرینه** بردار سوم می باشد.

مطابق شکل بالا اگر جهت کوتاهترین مسیر از یک بردار ضرب شده در بردار دیگر، در **خلاف** جهت عقربه های ساعت (یعنی خلاف جهت نشان داده شده در ساعت جکی) باشد، آنگاه علامت بردار حاصل، **مثبت** و اگر در جهت حرکت عقربه های ساعت (عکس جهت نشان داده شده) باشد، علامت بردار حاصل، **منفی** است.

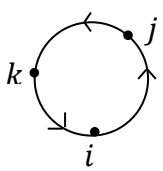
به عنوان مثال، $i \times j$ در جهت نشان داده شده روی شکل می باشد (در جهت عقربه‌های ساعته)، پس حاصل $+k$ است (یعنی **مثبته**)، درحالی که $j \times i$ **خلاف** جهت نشان داده شده می باشد، پس حاصل $-k$ می شود (**منفی** میشه). لذا داریم:

$$i \times j = k \quad , \quad j \times k = i \quad , \quad k \times i = j$$
$$j \times i = -k \quad , \quad k \times j = -i \quad , \quad i \times k = -j$$

تست۱۱) حاصل $i \times j - j \times i$ کدام است؟

۱) $-۲k$ ۲) $\overline{O}$ ۳) k ۴) $۲k$

حل)



$$i \times j - j \times i = k - (-k) = ۲k$$

گزینه ۴ صحیح است.

$$= (\underbrace{(۲ \times -۱)}_{-۲} - \underbrace{(۱ \times ۱)}_{۱} i - \underbrace{((۲ \times -۱)}_{-۲} - \underbrace{(-۱ \times ۱))}_{-۱} j + \underbrace{((۲ \times ۱)}_{۲} - \underbrace{(۲ \times -۱))}_{-۲} k$$

$$= -۳i - (-۱)j + ۴k = -۳i + j + ۴k = (-۳,۱,۴)$$

$$v = |a.(b \times c)| = |(۱,۱,۱).(-۳,۱,۴)|$$

$$v = |(۱ \times -۳) + (۱ \times ۱) + (۱ \times ۴)| = |-۳ + ۱ + ۴| = |۲| = ۲$$

گزینه ۱ صحیح است .

معادله خط در فضا:

برای نوشتن معادله یک خط در فضا، به یک نقطه از آن خط $A(x., y., z.)$ و بردار هادی خط نیازمندیم (بردار **هادی**، هر برداری است که یا موازی آن خط یا منطبق بر آن باشد).

مانند $L = pi + qj + rk$. در این صورت با داشتن یک نقطه از آن خط و بردار هادی می‌توانیم معادله آن خط را بصورت زیر بنویسیم:

$$\boxed{\frac{x - x.}{p} = \frac{y - y.}{q} = \frac{z - z.}{r}}$$

در این رابطه، به معادله خط ، معادله **کانونی** یا **متقارن** می گویند. به بردار L ، بردار هادی و به مقادیر p و q و r پارامترهای هادی می گویند. اما اگر معادله فوق را مساوی t فرض نماییم، معادله بصورت زیر تبدیل می شود (به رابطه زیر، **معادله پارامتری خط** می گویند):

$$\frac{x - x.}{p} = \frac{y - y.}{q} = \frac{z - z.}{r} = t \rightarrow \begin{cases} x - x. = pt \\ y - y. = qt \\ z - z. = rt \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = pt + x. \\ y = qt + y. \\ z = rt + z. \end{cases}$$

نکته مهم: برای نوشتن **معادله** یک خط به دو پارامتر زیر احتیاج داریم:

۱) یک نقطه از خط **۲)** بردار هادی خط: هر برداری که موازی خط یا منطبق برخط باشد.

تست۱۸) معادله خطی که از دو نقطه $A(۲,۰,۲)$ و $B(۳,-۱,-۳)$ می گذرد، کدام است؟

۱) $x-۲=-y=\frac{z-۳}{-۵}$ ۲) $\frac{x-۳}{۱}=\frac{y+۱}{-۱}=\frac{z+۳}{-۵}$

۳) $۱۰-۵x=۵y=z-۲$ ۴) هر سه گزینه صحیح است

حل) برای نوشتن معادله یک خط به یک نقطه از خط و بردار هادی (منطبق یا موازی) احتیاج داریم. در این سوال بجای یک نقطه از خط، ۲ نقطه داریم، پس فقط باید به دنبال بردار هادی باشیم. حال اگر بردار $\overrightarrow{AB}$ را تشکیل دهیم، می‌توانیم بگوییم بردار هادی است، چون **منطبق** بر خط AB است:

$$A(۲,۰,۲), B(۳,-۱,-۳) \rightarrow \overrightarrow{AB}=(۳-۲,-۱-۰,-۳-۲)=(۱,-۱,-۵)$$

حال، یا می توانیم از نقطه A استفاده نماییم و یا از نقطه B:

$$D: \frac{x-۲}{۱}=\frac{y}{-۱}=\frac{z-۲}{-۵} \quad \text{یا} \quad D: \frac{x-۳}{۱}=\frac{y+۱}{-۱}=\frac{z+۳}{-۵}$$

هردو معادله قابل قبول می باشند (هر دوی آنها یکی است). در ضمن گزینه ۳ نیز همان گزینه ۱ می باشد که در عدد ۵− ضرب شده است. بنابراین معادله خط هر ۳ گزینه صحیح است.

گزینه ۴ صحیح است.

☠ **اخطار**: بچه ها مواظب باشید: بعضی وقت ها طراحان محترم سوال، معادلات خط و صفحه را در ضرایبی ضرب می‌کنند. پس حواستان کامل به گزینه ها باشد که فریب نخورید.

تست۱۹) معادله خطی که از نقطه $A(۱,۲,۳)$ می گذرد و با بردار $L=۲i+۳j+k$ موازی باشد کدام است؟

۱) $\frac{x-۱}{۲}=\frac{y-۲}{۳}=z-۳$ ۲) $\frac{x-۱}{-۲}=\frac{y-۲}{۳}=۳-z$

۳) $\frac{x+۱}{۲}=\frac{y+۲}{۳}=z+۳$ ۴) $\frac{x+۱}{-۲}=\frac{y-۲}{۳}=z-۳$

حل) در این تست، بردار $L = (\underbrace{۲}_{p}, \underbrace{۳}_{q}, \underbrace{۱}_{r})$ **موازی** با خطی می باشد، پس همان بردار **هادی** خط است. نقطه $A(\underbrace{۱}_{x.}, \underbrace{۲}_{y.}, \underbrace{۳}_{z.})$ نقطه ای روی خط است. پس معادله خط بصورت های زیر می باشد:

معادله کانونی یا متقارن $\rightarrow \frac{x-x.}{p} = \frac{y-y.}{q} = \frac{z-z.}{r} \rightarrow \frac{x-۱}{۲} = \frac{y-۲}{۳} = \frac{z-۳}{۱}$

گزینه ۱ صحیح است.

در ضمن اگر معادله پارامتری خواسته می شد، به صورت زیر بود:

$$\frac{x-۱}{۲} = \frac{y-۲}{۳} = \frac{z-۳}{۱} = t \rightarrow \begin{cases} x = ۲t + ۱ \\ y = ۳t + ۲ \\ z = t + ۳ \end{cases}$$

بردار هادی خط:

اگر معادله خطی را به ما بدهند و بردار هادی آن خط را بخواهند، با توجه به نکات زیر، بردار هادی را بدست می آوریم:

۱) در معادله **متقارن** خط، اعداد موجود در **مخرج** کسرها، **پارامترهای** بردار هادی خط می باشند، به شرط آن که ضرایب x و y و z در صورت کسر ± ۱ باشد.

۲) در معادله **پارامتری** خط، **ضرایب** (t) ، **پارامترهای** بردار هادی خط می باشند، به شرط آن که ضرایب x و y و z، ± ۱ باشد.

تست۲۰) بردار هادی خط $D: \frac{۲x+۳}{۳} = -۲y = -z$ کدام می تواند باشد؟

۱) $(\frac{۳}{۲}, -۱, ۱)$ ۲) $(۳, ۱, ۱)$

۳) $(۳, -۱, -۲)$ ۴) $(\frac{۲}{۳}, -\frac{۱}{۲}, -۱)$

حل) ابتدا باید ضرایب x و y و z را در صورت کسر، ± ۱ کنیم تا اعداد موجود در مخرج کسر، پارامترهای هادی محسوب شوند (برای این منظور، صورت و مخرج کسر را بر ۲ تقسیم می‌کنیم):

$$D: \frac{۲x+۳}{۳} = -۲y = -z \xrightarrow{\text{صورت و مخرج تقسیم بر ۲}} \frac{x+\frac{۳}{۲}}{\frac{۳}{۲}} = \frac{y}{-\frac{۱}{۲}} = \frac{z}{\frac{۱}{-۱}}$$

حال ضرایب x و y و z ، $+۱$ شد، پس **بردار هادی** خط بصورت $L = (\frac{۳}{۲}, -\frac{۱}{۲}, -۱)$ می باشد.

معادله خطوط موازی محورها:

I) معادله خط گذرنده از نقطه $A(x_۰, y_۰, z_۰)$ و موازی محور z ها : $D: \begin{cases} x = x_۰ \\ y = y_۰ \end{cases}$

II) معادله خط گذرنده از نقطه $A(x_۰, y_۰, z_۰)$ و موازی محور y ها: $D: \begin{cases} y = y_۰ \\ z = z_۰ \end{cases}$

III) معادله خط گذرنده از نقطه $A(x_۰, y_۰, z_۰)$ و موازی محور x ها: $D: \begin{cases} y = y_۰ \\ z = z_۰ \end{cases}$

به زبان ساده : خط با هر محوری موازی باشد، متغیر مربوط به آن محور را در معادله ندارد. لذا اگر در سوالی از شما بپرسند خط $\begin{cases} x = ۵ \\ y = ۶ \end{cases}$ با چه محوری موازی است؟ به سرعت برق پاسخ می دهید محور z ها.

تست۲۱) معادلات دکارتی خطی که از نقطه (۳,۲,۴) گذشته و موازی محور z است عبارتند از:

(اقتصاد آزاد ۷۶)

۱) $y = ۲$ و $z = ۴$

۲) $x = ۳$ و $z = ۴$

۳) $\frac{x}{۳} = \frac{y}{۲} = \frac{z}{۴}$

۴) $y = ۲$ و $x = ۳$

حل) معادله خط گذرنده از نقطه $(\underbrace{۳}_{x_۰}, \underbrace{۲}_{y_۰}, \underbrace{۴}_{z_۰})$ و موازی محور z ها : $D: \begin{cases} x = x_۰ \to x = ۳ \\ y = y_۰ \to y = ۲ \end{cases}$

گزینه ۴ صحیح است.

مثال۲۰ : بردار $\vec{a} = (۷,۱,۲)$ را به صورت ترکیب خطی بردارهای $\vec{b} = (۲,-۱,۴)$ و $\vec{c} = (۱,-۲,۶)$ بنویسید.

حل) باید اعداد حقیقی $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ را پیدا کنیم، بطوری که: $\vec{a} = \lambda_۱\vec{b} + \lambda_۲\vec{c}$

بنابراین:

$$(۷,۱,۲) = \lambda_۱(۲,-۱,۴) + \lambda_۲(۱,-۲,۶)$$
$$(۷,۱,۲) = (۲\lambda_۱ + \lambda_۲, -\lambda_۱ - ۲\lambda_۲, ۴\lambda_۱ + ۶\lambda_۲)$$
$$\begin{cases} ۲\lambda_۱ + \lambda_۲ = ۷ \\ -\lambda_۱ - ۲\lambda_۲ = ۱ \\ ۴\lambda_۱ + ۶\lambda_۲ = ۲ \end{cases}$$
$$۲ \times \begin{cases} ۲\lambda_۱ + \lambda_۲ = ۷ \\ -\lambda_۱ - ۲\lambda_۲ = ۱ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cancel{۲\lambda_۱} + \lambda_۲ = ۷ \\ \underline{\cancel{-۲\lambda_۱} - ۴\lambda_۲ = ۲} \end{cases}$$
$$-۳\lambda_۲ = ۹ \rightarrow \lambda_۲ = \frac{۹}{-۳} = -۳ \rightarrow \boxed{\lambda_۳ = -۳}$$
$$۲\lambda_۱ + \lambda_۲ = ۷ \xRightarrow{\lambda_۲=-۳} ۲\lambda_۱ - ۳ = ۷ \rightarrow ۲\lambda_۱ = ۱۰ \rightarrow \lambda_۱ = \frac{۱۰}{۲} \rightarrow \boxed{\lambda_۱ = ۵}$$

چون مقادیر $\lambda_۱ = ۵$ و $\lambda_۲ = -۳$ در معادله سوم صدق می کند، بنابراین جواب مسئله هستند در نتیجه : $\boxed{\vec{a} = ۵\vec{b} - ۳\vec{c}}$

استقلال خطی و وابستگی خطی (مهم ترین و سوال خیزترین قسمت فصل **):**

به طور کلی برای تشخیص آن که در فضای $R^۲$ یا $R^۳$ یا ... بردارها دارای وابستگی خطی هستند یا استقلال خطی، کافیست بردارها را بصورت سطری یا ستونی در یک **دترمینان** نوشته آنگاه می‌توان گفت :

I) اگر حاصل دترمینان برابر **صفر** باشد، بردارها **وابستگی** خطی دارند.

II) اگر حاصل دترمینان **مخالف صفر** باشد، بردارها **استقلال** خطی دارند.

نکته مهم: سه بردار، در یک صفحه (یا موازی یک صفحه)، هستند اگر حاصل **ضرب مختلط** آن ها (یا **دترمینان** ماتریس حاصل از آن ها) **صفر** باشد،

و اگر سه بردار، هم صفحه نباشند، باید حاصل دترمینان **مخالف صفر** باشد.

تست۴۹) به ازای کدام مقدار a سه بردار $\vec{i}+۲\vec{j}-\vec{k}$ و $۲\vec{i}+a\vec{j}$ و $۳\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ موازی یک صفحه اند؟ (مدیریت و حسابداری سراسری۹۱)

۱) -۲ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۱}{۲}$

حل) در صورتی سه بردار، موازی یک صفحه اند که دترمینان ماتریس حاصل از سه بردار **صفر** باشد، بنابراین می توان گفت:

$(۱,۲,-۱)\ ,(۲,a,۰)\ ,\ (۳,-۱,۱)$

$$\begin{vmatrix} ۳ & -۱ & ۱ \\ ۲ & a & ۰ \\ ۱ & ۲ & -۱ \end{vmatrix} = ۰$$

$$\begin{matrix} ۳ & -۱ & ۱ \\ ۲ & a & ۰ \end{matrix}$$

با استفاده از روش **ساروس** عمل دترمینان گیری را انجام می دهیم :

$$\overbrace{((۳\times a\times -۱)+(۲\times ۲\times ۱)+(۱\times -۱\times ۰))}^{\text{مجموع حاصلضرب درایه های روی قطر اصلی}}-\overbrace{((۱\times a\times ۱)+(۰\times ۲\times ۳)+(-۱\times -۱\times ۲))}^{\text{مجموع حاصلضرب درایه های روی قطر فرعی}}=۰$$

$$\rightarrow \big((-۳a)+(۴)+۰\big)-\big((a)+(۰)+(۲)\big)=۰$$

$$\rightarrow -۳a+۴-a-۲=۰\ \rightarrow\ -۴a+۲=۰\ \rightarrow\ ۲=۴a\ \rightarrow\ \boxed{a=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}}$$

بنابراین اگر $a=\frac{۱}{۲}$ باشد سه بردار موازی یک صفحه می باشند.

گزینه ۴ صحیح است.

تست۵۰) بردارهای $\vec{A}(۱,۲,۰)$ و $\vec{B}(۰,۱,۲)$ مفروض‌اند. اگر بردار $\vec{D}(a,b,c)$ با $\vec{A}$ و $\vec{B}$ وابسته خطی باشد، کدام رابطه بین c,b,a برقرار است؟ (اقتصاد سراسری۸۹)

۱) $c = ۲b - ۴a$ ۲) $b = a - ۲c$

۳) $a + b - ۲c = ۰$ ۴) $c = ۲b + c$

حل) اگر سه بردار بخواهند نسبت به هم وابسته خطی باشند، باید دترمینان آنان برابر **صفر** شود بنابراین داریم:

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ a & b & c \end{vmatrix} = ۰$$

$$\begin{matrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{matrix}$$

با استفاده از روش ساروس عمل دترمینان گیری را انجام می دهیم :

$$\big((۱ \times ۱ \times c) + (۰ \times b \times ۰) + (a \times ۲ \times ۲)\big) - \big((۰ \times ۱ \times a) + (۲ \times b \times ۱) + (a \times ۲ \times ۰)\big) = ۰$$

$$\rightarrow \big((c) + (۰) + (۴a)\big) - \big((۰) + (۲b) + (۰)\big) = ۰$$

$$\rightarrow c + ۴a - ۲b = ۰ \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = ۲b - ۴a}$$ (سه بردار وابسته خطی می شوند)

گزینه ۱ صحیح است .

تست های کنکور کارشناسی ارشد

بردار و فضای برداری

خط و صفحه

رشته های مدیریت و حسابداری و اقتصاد

سراسری و آزاد

حل تست های کنکور کارشناسی ارشد

بردار و فضای برداری

خط و صفحه

رشته های مدیریت و حسابداری و اقتصاد

سراسری و آزاد

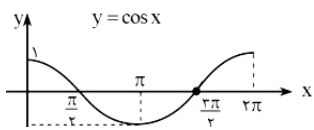
$$\vec{a} = (\overset{a_۱}{۲}, \overset{a_۲}{-۲}, \overset{a_۳}{۱})$$

$$\vec{b}\left(\underset{b_۱}{۱}, \underset{b_۲}{\frac{۳}{۲}}, \underset{b_۳}{۱}\right)$$

$$cos\theta = \frac{(۲)(۱) + (-۲)\left(\frac{۳}{۲}\right) + (۱)(۱)}{\sqrt{(۲)^۲ + (-۲)^۲ + (۱)^۲} \times \sqrt{(۱)^۲ + (\frac{۳}{۲})^۲ + (۱)^۲}}$$

$$cos\theta = \frac{۲ - ۳ + ۱}{\sqrt{۴ + ۴ + ۱} \times \sqrt{۱ + \frac{۹}{۳} + ۱}} = \frac{۰}{\sqrt{۹} \times \sqrt{\frac{۱۷}{۴}}} = \frac{۰}{\frac{۳\sqrt{۱۷}}{۲}} = ۰$$

$$cos\theta = ۰ \rightarrow \theta = \frac{\pi}{۲}$$



راه دوم : اگر حاصلضرب داخلی دو بردار (یعنی $\vec{a}.\vec{b}$) برابر صفر شود دو بردار بر هم عمودند که $\theta = \frac{\pi}{۲}$ می باشد.

$$\underbrace{(۲, -۲, ۱)}_{\vec{a}} . \underbrace{\left(۱, \frac{۳}{۲}, ۱\right)}_{\vec{b}} = (۲)(۱) + (-۲)\left(\frac{۳}{۲}\right) + (۱)(۱)$$

$\vec{a}.\vec{b} = ۲ - ۳ + ۱ = ۰ \rightarrow$ دو بردار بر هم عمودند $\rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{۲}}$

---

۶۲. گزینه ۴ صحیح است.

$\vec{d} = ۲\vec{b} - \vec{c} = ۲(۱, -۱, ۱) - (۱, -۱, ۲) = (۲, -۲, ۲) - (۱, -۱, ۲) = (۱, -۱, ۰)$

شرط آن که دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{d}$ بر هم عمود باشند آن است که ضرب داخلی (یعنی $\vec{a}.\vec{d}$) برابرصفر گردد. بنابراین:

$$\vec{a}.\vec{d} = a_۱d_۱ + a_۲d_۲ + a_۳d_۳ = ۰$$

$$\vec{a} = (\overset{a_۱}{۱}, \overset{a_۲}{m}, \overset{a_۳}{-۱}) \ , \vec{d}\left(\underset{d_۱}{۱}, \underset{d_۲}{-۱}, \underset{d_۳}{۰}\right)$$

$$(۱)(۱) + (m)(-۱) + (-۱)(۰) = ۰ \quad \rightarrow \quad ۱ - m + ۰ = ۰ \quad \rightarrow \quad \boxed{m = ۱}$$

۶۳. گزینه ۳ صحیح است.

حل : معادله خطی که از نقطه $(۱,۰,-۱)$ می گذرد و موازی با بردار $v = \vec{i} - \vec{j} + ۲\vec{k}$ یعنی $(۱,-۱,۲)$ می باشد به صورت زیر خواهد بود: $\frac{x-۱}{۱} = \frac{y-۰}{-۱} = \frac{z+۱}{۲}$

حال معادله ی خط را با معادله صفحه xoz یعنی $y = ۰$ قطع می دهیم یعنی:

$$\frac{z+۱}{۲} = ۰ \to z + ۱ = ۰ \to z = -۱$$

---

۶۴. گزینه ۲ صحیح است.

حل : بردارهادی خط موازی با بردار نرمال صفحه یعنی (۱- ,۱ ,۱) می باشد بنابراین معادله آن با توجه به اینکه از نقطه (۲, -۲،۱) می گذرد برابر است با:

$$\frac{x-۲}{۱} = \frac{y+۲}{۱} = \frac{z-۱}{-۱}$$

لذا محل تقاطع این خط با صفحه xoz یا $y = ۰$ برابر است با:

$$\begin{cases} y = ۰ \to \frac{x-۲}{۱} = \frac{۰+۲}{۱} \to x - ۲ = ۲ \to x = ۲ + ۲ = ۴ \to x = ۴ \\ y = ۰ \to \frac{z-۱}{-۱} = \frac{۰+۲}{۱} \to \frac{z-۱}{-۱} = ۲ \xrightarrow{\text{طرفین وسطین می کنیم}} z - ۱ = -۲ \to z = -۲ + ۱ = -۱ \to z = -۱ \end{cases}$$

بنابراین مختصات نقطه تقاطع $(\underbrace{۴}_{x}, \underbrace{۰}_{y}, \underbrace{-۱}_{z})$ است.