ریاضیات DLM

آموزش سه‌بعدی مفاهیم

دنباله و سری

طراح، مؤلف و گردآورنده:

امین بنیاد گذار

ویراستار علمی:

حسین خدامی

عنوان **صفحه**

آموزش کلاسیک دنباله و سری

تعریف دنباله ۷

دسته بندی انواع دنباله ها ۹

۱)دنباله‌ی ثابت ۹

۲) دنباله ی نوسانی ۱۰

۳) دنباله ی تصاعد عددی (حسابی) ۱۱

۴) دنباله ی تصاعد هندسی ۱۱

تغییر متغیر ۱۲

تعریف حد دنباله ۱۴

تعریف دنباله همگرا و واگرا ۱۷

هم ارزی های مهم برای تعیین همگرایی یا واگرایی یک دنباله ۱۷

قانون رشد ۲۲

آشنایی با عدد نپر e ۲۵

دنباله های بازگشتی ۲۶

وضعیت همگرایی روی اَعمال چهارگانه دنباله ۲۸

روش های تعیین صعودی یا نزولی بودن دنباله ها ۲۹

۱. روش اول ۲۹

۲. روش دوم ۳۰

۳. روش سوم ۳۲
دنباله های هموگرافیک ۳۵
کران داری دنباله ها ۳۸
دنباله ی به فرم $\{\frac{\alpha^n}{n!}\}$ ۴۷
سیگما و خواص آن ۴۸
جمع های معروف کنکور ۵۰
تعریف سری- سری همگرا و واگرا ۵۳
تحلیل همگرایی و واگرایی سری های عددی ۵۶
۱) آزمون سری p ۵۶
۲) آزمون هم ارزی ۵۷
سری هارمونیک ۵۸
سری اویلری ۵۹
سری صعودی و نزولی ۶۰
سری متناوب و آزمون سری های متناوب لایب نیتز ۶۱
آزمون های مقایسه ای ۶۴
آزمون نسبت (یا دالامبر) و آزمون ریشه (یا کوشی) ۶۵
آزمون انتگرال ۶۶
آزمون همگرایی مطلق ۶۸
سری هندسی ۷۰

سری تلسکوپی ۷۲
سری های توانی ۷۵
بازه همگرایی ۷۵
سری تیلور ۷۹
سری مک لورن ۷۹
رموز استفاده از آزمون های مختلف ۸۳
بسط مک لورن چند تابع مهم و پر کاربرد ۸۴

سوالات آزمون کارشناسی ارشد رشته های مدیریت ، حسابداری و اقتصاد

سوالات آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته مدیریت ۸۶
سوالات آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی رشته مدیریت ۸۷
سوالات آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته حسابداری ۹۶
سوالات آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی رشته حسابداری ۹۷
سوالات آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته اقتصاد ۹۸
سوالات آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی رشته اقتصاد ۱۰۰

حل سوالات آزمون کارشناسی ارشد رشته های مدیریت و حسابداری و اقتصاد

پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته مدیریت ۱۰۴
پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد رشته مدیریت ۱۰۹
پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته حسابداری ۱۳۹

پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد رشته حسابداری..... ۱۴۱
پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته اقتصاد ۱۴۴
پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد رشته اقتصاد..... ۱۵۲

تعریف دنباله:

هر دنباله تابعی است از N به R یعنی به هر عدد طبیعی، یک عدد حقیقی نسبت داده می شود که معمولاً آن را با جمله عمومی‌اش که همان جمله ی nام آن می باشد، نمایش می دهند (مثل a_n یا b_n یا u_n یا t_n یا ...)

* دنباله را با نماد $\{a_n\}$ هم نشان می دهند: $\{a_n\} = a_۱, a_۲, a_۳, \dots$

مثال۱) در دنباله ی $a_n = \frac{n+۲}{n+۱}$ مجموع جمله های اول و نهم دنباله را تعیین کنید؟

حل) کافیست برای محاسبه $n, a_۱$ را مساوی ۱ قرار دهیم : $a_۱ = \frac{۱+۲}{۱+۱} = \frac{۳}{۲}$

کافیست برای محاسبه $n, a_۹$ را مساوی ۹ قرار دهیم: $a_۹ = \frac{۹+۲}{۹+۱} = \frac{۱۱}{۱۰}$

$$a_۱ + a_۹ = \frac{۳}{۲} + \frac{۱۱}{۱۰} = \frac{۱۵ + ۱۱}{۱۰} = \frac{۲۶}{۱۰} = \frac{۱۳}{۵}$$

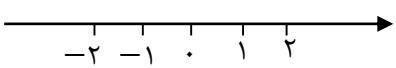
مثال۲) دنباله ی $a_n = \frac{۴n-۱۰۵}{۲n-۱۱}$ چند جمله ی منفی دارد؟

حل) برای اینکه جمله $a_n = \frac{۴n-۱۰۵}{۲n-۱۱}$ منفی باشد، باید کل این کسر منفی باشد: $\frac{۴n-۱۰۵}{۲n-۱۱} < ۰$

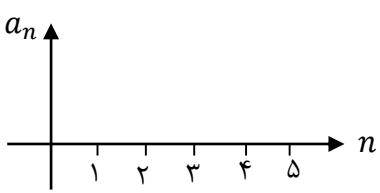
یعنی $(۴n - ۱۰۵)(۲n - ۱۱) < ۰$ ، پس $\frac{۱۱}{۲} < n < \frac{۱۰۵}{۴}$ یعنی $۶ \le n \le ۲۶$ و تعداد این جملات برابر است با : $۲۶ - ۶ + ۱ = ۲۱$

توجه: برای نمایش یک دنباله از دو روش می توان استفاده کرد:

۱. نمایش محوری روی یک محور افقی به صورت زیر:



۲. نمایش دکارتی:

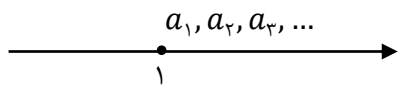


مثال۳) نمودار دنباله ی $a_n = (-۱)^{(-۲)^n}$ را به هر دو روش محوری و دکارتی نشان دهید.

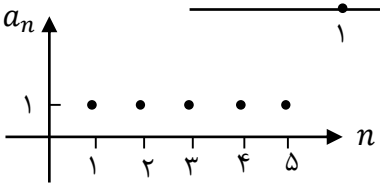
حل) برای راحتی کار، ابتدا n را **در ۲ حالت زوج و فرد** در نظر می‌گیریم:

$$a_n = (-۱)^{(-۲)^n} = \begin{cases} (-۱)^{۲^n} = ۱ & : n \text{ زوج} \\ (-۱)^{(-۲)^n} = \dfrac{۱}{(-۱)^{۲^n}} = ۱ & : n \text{ فرد} \end{cases}$$

۱.نمایش محوری:



۲.نمایش دکارتی:



تست۱) اگر مجموعه‌ی $\{a_n : n \subset N \,;\, |a_n| = k^۲ - ۳k - ۴\}$ بیانگر یک دنباله باشد، k کدام است؟

۱) $\{-۱\}$ ۲) $\{۴\}$ ۳) $\{-۱ , ۴\}$ ۴) $\{۰\}$

حل) از آن جایی که <u>دنباله ها نوعی تابع</u> هستند، پس باید به ازای هر n ای از دامنه خود، <u>فقط یک a_n</u> داشته باشند که لازمه ی این امر هم این است که $a_n = ۰$ باشد، بنابراین :

$$|a_n| = k^۲ - ۳k - ۴ \xRightarrow{a_n = ۰} (k-۴)(k+۱) = ۰ \;\rightarrow\; \begin{cases} k = ۴ \\ k = -۱ \end{cases}$$

گزینه ۳ صحیح است.

تست۲) در دنباله $\{n^۲ - ۲n\}$ ، چندمین جمله دنباله برابر با ۳۹۹ است؟ (مکانیک- آزاد ۸۹)

۱) ۲۱ ۲) ۲۴ ۳) ۲۳ ۴) ۱۲

حل) برای یافتن شماره جمله ای که برابر با ۳۹۹ می‌باشد، کافیست جمله عمومی دنباله را با آن عدد، برابر قرار دهیم، یعنی:

$$n^۲ - ۲n = ۳۹۹ \;\rightarrow\; n(n-۲) = ۳۹۹ = ۲۱ \times ۱۹ \;\rightarrow\; \boxed{n = ۲۱}$$

گزینه ۱ صحیح است.

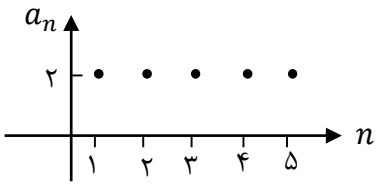
دسته بندی انواع دنباله ها :

۱)دنباله‌ی ثابت : دنباله‌ای است که تمام جمله‌های آن برابر مقدار **ثابتی** می باشد.

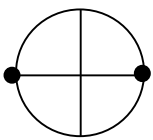
مانند دنباله های زیر:

الف) $a_n = \{۲\}$: ۲, ۲, ۲, ۲, ...

n	۱	۲	۳	... ... n
a_n	۲	۲	۲	... ... ۲

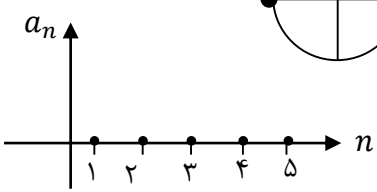


نقاط $n\pi$ روی دایره مثلثاتی



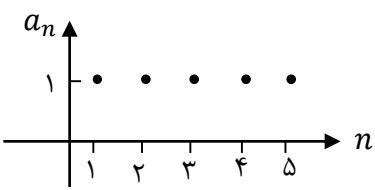
ب) $a_n = sinn\pi$: ۰, ۰, ۰, ۰, ...

n	۱	۲	۳	... ... n
a_n	۰	۰	۰	... ... ۰



ج) $a_n = (-۱)^n . cosn\pi$: ۱, ۱, ۱, ۱, ...

n	۱	۲	۳	... ... n
a_n	۱	۱	۱	... ... ۱

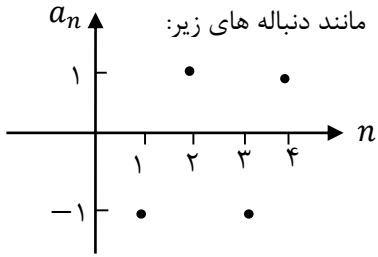


توجه: بچه ها بد نیست بدانید که $cosn\pi$ و $(-۱)^n$ هر دو دارای جملات **یکسانی** هستند، طوری که هر جا $cosn\pi$ دیدید، می توانید جایش $(-۱)^n$ بگذارید. نگاه کنید:

$$a_n = (-۱)^n . cosn\pi = (-۱)^n . (-۱)^n = (-۱)^{۲n} = ۱$$

۲) دنباله ی نوسانی: دنباله ای است که تمام جمله های آن در حال نوسان هستند.

مانند دنباله های زیر:

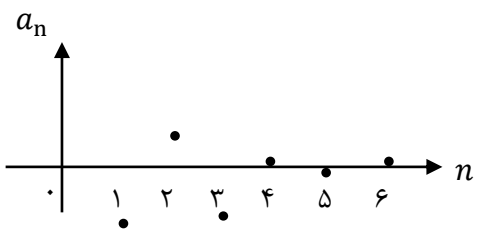


الف) $a_n = (-۱)^n \ : \ \begin{cases} -۱ : n \text{ فرد} \\ ۱ : n \text{ زوج} \end{cases}$

n	۱	۲	۳	۴ ... ...
a_n	-۱	۱	-۱	۱ ... ...

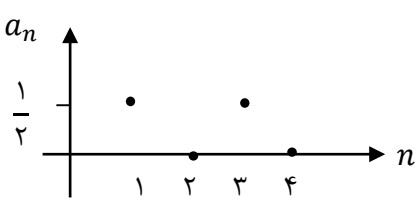
ب) $a_n = \frac{cos n\pi}{n} \ : \ \frac{(-۱)^n}{n}$

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶ ... ...
a_n	-۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{-۱}{۳}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{-۱}{۵}$	$\frac{۱}{۶}$ ... ...



ج) $a_n = \frac{۵n}{۲} - [\frac{۵n}{۲}]$

n	۱	۲	۳	۴	... ...
a_n	$\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۰	... ...



۳) دنباله ی تصاعد عددی (حسابی): دنباله ای است که هر جمله‌ی آن از **جمع** جمله‌ی قبلی با یک مقدار ثابت (مثل d) بدست می آید (مقدار ثابت d رو بهش **قدر نسبت** می گیم).

$$\underbrace{a_۱}_{a_۱},\ \underbrace{a_۲}_{a_۱+d},\ \underbrace{a_۳}_{a_۱+۲d},\ \dots\ \underbrace{a_n}_{a_۱+(n-۱)d} \rightarrow \underbrace{a_n}_{\text{جمله عمومی (}n\text{ام)}} = \overbrace{a_۱}^{\text{جمله اول}} + \left(\underbrace{n}_{\text{تعدادجملات}} - ۱\right)\overbrace{d}^{\text{قدر نسبت}}$$

نکته: جمله عمومی در تصاعد عددی به فرم کلی $An + B$ می باشد که A همان قدر نسبت است.

مثال: $a_n = \underbrace{۲}_{d=۲\ (\text{قدر نسبت})} n + ۳ \ :\ \underbrace{۵}_{a_۱},\ \underbrace{۷}_{a_۲},\ \underbrace{۹}_{a_۳},\ \underbrace{۱۱}_{a_۴},\ \dots$

۴) دنباله ی تصاعد هندسی: دنباله ای است که هر جمله ی آن از **ضرب** جمله قبلی آن در یک مقدار ثابت (مثل q) بدست می آید (مقدار ثابت q روبهش **قدر نسبت** می گیم).

$$\underbrace{a_۱}_{a_۱},\ \underbrace{a_۲}_{a_۱q},\ \underbrace{a_۳}_{a_۱q^۲},\ \dots\ \underbrace{a_n}_{a_۱q^{n-۱}} \rightarrow \overbrace{a_n}^{\text{جمله عمومی (}n\text{ام)}} = \underbrace{a_۱}_{\text{جمله اول}}\ \underbrace{q}_{\text{قدر نسبت}}^{\overbrace{n}^{\text{تعداد جملات}}-۱}$$

نکته: جمله عمومی در تصاعد هندسی به فرم کلی $A(B)^n$ می باشد که B همان قدرنسبت است.

مثال : $a_n = ۲ \times \underbrace{۳}_{q=۳\ (\text{قدر نسبت})}{}^n \ :\ \underbrace{۶}_{a_۱},\ \underbrace{۱۸}_{a_۲},\ \underbrace{۵۴}_{a_۳},\ \underbrace{۱۶۲}_{a_۴},\ \dots$

تست۳) کدام یک از موارد زیر بیانگر یک تصاعد حسابی است؟

۱) $\{3n^2 - 1\}$ ۲) $\{\frac{2\sqrt{n}+1}{5}\}$ ۳) $\{5 - \frac{4}{7}n\}$ ۴) $\{\frac{n}{n+1}\}$

حل) در نکته صفحه قبل، گفته بودیم که فرم جمله عمومی در تصاعد حسابی $An + B$ می‌باشد. بنابراین $5 - \frac{4}{7}n$ یک تصاعد حسابی می باشد.

گزینه ۳ صحیح است.

تست۴) کدام دنباله ی زیر معرف یک تصاعد عددی است؟

۱) $a_n = n^n$ ۲) $b_n = n^2 + 2n$

۳) $c_n = n!$ ۴) $d_n = \frac{n}{5} + 1$

حل) با توجه به اینکه فرم کلی جمله عمومی در یک تصاعد عددی عبارتست از $An + B$ بنابراین $d_n = \frac{n}{5} + 1$ معرف یک تصاعد عددی است. **گزینه ۴ صحیح است.**

تغییر متغیر:

گاهی اوقات در تست ها دیده شده که طراح به جای این که a_n را بدهد، $a_{f(n)}$ را می دهد، ($f(n)$ عبارتی بر حسب n است، مثلاً به جای این که a_n را به ما بدهد، a_{3n+2} را می دهد) و بعد جمله ی k ام دنباله را می پرسد. در این شرایط چه کاری باید انجام داد؟

جواب: باید $f(n)$ را مساوی k بگذارید و از آن جا n را حساب کنید و بعد n را در دنباله‌ی داده شده، جایگزین کنید.

به تست زیر توجه کنید:

تست۵) جمله ی $(2n + 1)$ اُم یک رشته ی عددی بر حسب n برابر است با $\frac{4n^2+1}{2n-1}$.

جمله ی سوم این رشته چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۵) ۵

حل)

$$\begin{cases} a_{\underbrace{۲n+۱}_{f(n)}} = \dfrac{۴n^۲+۱}{۲n-۱} \\ a_{\underbrace{۳}_{k}} = ? \end{cases} \xrightarrow{f(n) \text{ را مساوی } k \text{ قرار می دهیم}} ۲n+۱ = ۳ \to ۲n = ۲ \to n = \frac{۲}{۲} = ۱$$

حال به جای n عدد یک را قرار می دهیم:

$$a_۳ = \frac{۴(۱)+۱}{۲(۱)-۱} = \frac{۵}{۱} = ۵$$

گزینه ۴ صحیح است.

تست۶) در یک دنباله از اعداد، جمله ی عمومی بصورت $a_{۴n+۱} = n^۲ - ۳$ می باشد. جملهٔ بیست و یکم این دنباله چقدر است؟

۱) ۲۲ ۲) ۴۴۱ ۳) ۴۳۸ ۴) ۳۲

حل) وقتی از روی $a_{\underbrace{۴n+۱}_{fn}}$ می خواهید $a_{\underbrace{۲۱}_{k}}$ را حساب کنید، اول باید $۴n+۱$ رو مساوی ۲۱ قرار دهید و n رو پیدا کنید. به صورت زیر:

$$\begin{cases} ۴n+۱ = ۲۱ \to ۴n = ۲۰ \to n = \dfrac{۲۰}{۴} = ۵ \\ a_{۲۱} = (۵)^۲ - ۳ = ۲۵ - ۳ = ۲۲ \end{cases}$$

گزینه ۱ صحیح است.

تست۷) اگر جمله ی $(۲n+۱)$ام دنباله ای برابر $\frac{n-۱}{۲n+۱}$ باشد، جمله ی n ام کدام است؟

۱) $\frac{n-۱}{۳n+۲}$ ۲) $\frac{۲n+۱}{n-۱}$ ۳) $\frac{n-۲}{۳n}$ ۴) $\frac{n-۳}{۲n}$

حل) با توجه به اینکه $a_{۲n+۱} = \frac{n-۱}{۲n+۱}$ است، فرض می کنیم: $۲n+۱ = t$ بنابراین:

$$۲n+۱ = t \;\to\; ۲n = t-۱ \;\to\; n = \frac{t-۱}{۲}$$

$$a_t = \frac{\frac{t-۱}{۲} - ۱}{۲\left(\frac{t-۱}{۲}\right)+۱} = \frac{\frac{t-۱-۲}{۲}}{t-۱+۱} = \frac{\frac{t-۳}{۲}}{t} = \frac{t-۳}{۲t} \;\to\; \boxed{a_n = \frac{n-۳}{۲n}}$$

گزینه ۴ صحیح است.

تعریف دنباله همگرا و واگرا:

اگر حد دنباله ی $\{a_n\}$ وقتی n به $(+\infty)$ میل می کند، برابر **یک عدد معین** شود، دنباله را **همگرا** به آن عدد می نامیم. (یک عدد معین= $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$)

در غیر اینصورت دنباله را **واگرا** می نامیم (مثلاً اگر حد دنباله، **عددی نامعین** شود یا ∞ شود و یا چند عدد نامساوی شود، دنباله **واگرا** خواهد بود):

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} \text{دنباله واگرا} \leftarrow \text{عدد نا معین} \\ \text{دنباله واگرا} \leftarrow \pm\infty \\ \text{دنباله واگرا} \leftarrow \text{چند عدد نا مساوی} \end{cases}$$

مثال۴) کدام یک از دنباله های زیر همگرا و کدام واگرا است؟

الف) $\left\{\frac{۱}{n}\right\}: \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{۱}{n} = \frac{۱}{+\infty} = ۰ \rightarrow$ همگرا

ب) $\{(-۱)^n\}: \lim\limits_{n\to+\infty} (-۱)^n = \pm ۱ \rightarrow$ واگرا

ج) $\left\{\frac{cosn\pi}{n^۲+۱}\right\}: \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{cosn\pi}{n^۲+۱} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-۱)^n}{n^۲+۱} = \frac{\pm ۱}{+\infty} = ۰ \rightarrow$ همگرا

د) $\{sin\, n\}: \lim\limits_{n\to+\infty} sin(n) = sin\infty = -۱ \leq$ عدد نا معین $\leq ۱ \rightarrow$ واگرا

هم ارزی های مهم برای تعیین همگرایی یا واگرایی یک دنباله :

هم ارزی ۱:

$\sin\limits_{\square\to ۰} \square \sim \square$	$\tan\limits_{\square\to ۰} \square \sim \square$

$Arcsin\limits_{\square\to ۰} \square \sim \square$	$Arctan\limits_{\square\to ۰} \square \sim \square$

هم ارزی ۹ : هم ارزی نیوتون (رادیکال ها) :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[p]{an^k + bn^{p-1} + \cdots} \sim \lim_{n\to+\infty} \sqrt[p]{a}\left(n + \frac{b}{pa}\right)$$

مثال۱۳) حاصل حدمقابل را بیابید؟

$$Lim\left(\sqrt{n^2 + 4n} - \sqrt[4]{n^4 - 2n^3}\right) = ?$$

حل)

$$\sim \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{1}\left(n + \frac{4}{2}\right) - \sqrt[4]{1}\left(n + \frac{-2}{4}\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left((n+2)\right) - \left(n - \frac{1}{2}\right) = 2 - \left(\frac{-1}{2}\right) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

هم ارزی ۱۰ : برای حدهای بزرگتر از ۱- داریم :

$$1^p + 2^p + 3^p + \cdots \overset{n\to\infty}{\approx} \frac{n^{p+1}}{p+1}$$

تست ۱۱) حاصل $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}\right)^2$ کدام است؟ (اقتصاد سراسری ۸۸)

۱) $\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) ۴ ۴) ۹

حل)

$$\sim \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{n^{2+1}}{2+1}}{n^3}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{n^3}{3}}{n^3}\right)^2 = \left(\frac{n^3}{3n^3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

گزینه ۱ صحیح است .

قانون رشد:

براساس قانونی بنام «قانون رشد» می توانیم سرعت رشد توابع گوناگون را وقتی n به $(+\infty)$ میل می کند، با هم مقایسه کنیم:

$$n^n \gg n! \gg \underbrace{a^n}_{\text{تابع نمایی}} \gg \underbrace{n^b}_{\text{تابع جبری}} \gg logn \gg sin(n), cos(n), \dots$$

تست۱۲) دنباله ی $\frac{۴n^۲-cosn}{۶n^۲+n}$ به چه عددی همگراست؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) صفر ۳) ۳ ۴) واگراست

حل) با توجه به قانون رشد، وقتی n به سمت $+\infty$ میل می کند، سرعت رشد $۴n^۲$ از $cosn$ خیلی بیشتر است، پس می توانیم بگوییم:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{۴n^۲ - cosn}{۶n^۲ + n} \sim \lim_{n\to+\infty} \frac{۴n^۲}{۶n^۲} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳} \rightarrow \text{دنباله ای همگراست}$$

گزینه ۱ صحیح است .

تست۱۳) کدام دنباله به صفر همگراست؟

۱) $\{\sqrt{۳n+۱} - \sqrt{۲n-۱}\}$ ۲) $\{\sqrt{n^۲+n} - \sqrt{n^۲-n}\}$

۳) $\{\frac{\sqrt{n+۱}+\sqrt{۴n+۱}}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{۹n+۱}}\}$ ۴) $\{\frac{n^۲}{۲n}\}$

بررسی همه گزینه ها:

(گزینه ۱ $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{۳n+۱} - \sqrt{۲n-۱}) \times \frac{\sqrt{۳n+۱} + \sqrt{۲n-۱}}{\sqrt{۳n+۱} + \sqrt{۲n-۱}}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(۳n+۱) - (۲n-۱)}{\sqrt{۳n+۱} + \sqrt{۲n-۱}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+۲}{\sqrt{۳n+۱} + \sqrt{۲n-۱}}$$

$$\sim \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{۳n} + \sqrt{۲n}} = \infty \rightarrow \text{دنباله ای واگراست}$$

(گزینه ۲ $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^۲+n} - \sqrt{n^۲-n}\right)$

دنباله ای همگراست $\rightarrow$ $\lim\limits_{n\to+\infty}[\left(n+\frac{۱}{۲}\right)-\left(n-\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۱}{۲}-\left(-\frac{۱}{۲}\right)=۱$ هم ارزی رادیکال ها $\sim$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n+۱}+\sqrt{۴n+۱}}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{۹n+۱}}\sim\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}+۲\sqrt{n}}{\sqrt{n}+۳\sqrt{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{۳\sqrt{n}}{۴\sqrt{n}}=\frac{۳}{۴}$$ (گزینه ۳

بنابراین دنباله همگراست.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{۲}}{۲^{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\text{تابع جبری}}{\text{تابع نمایی}}=۰$$ (گزینه ۴

سرعت رشد مخرج **<u>بیشتر</u>** از سرعت رشد صورت است. بنابراین در گزینه ۴ ، وقتی حد دنباله را در بی نهایت محاسبه کردیم، همگرا به صفر شد.

گزینه ۴ صحیح است.

نکته: برای محاسبه ی حد دنباله هایی به فرم $\{f(a_n)\}$ به روش زیر عمل می کنیم:

$$\lim_{n\to+\infty}f(a_n)=f\left(\lim_{n\to+\infty}a_n\right)=\cdots$$

تست۱۴) اگر دنباله‌ی $a_n=\frac{۲n+۱}{n+۲}$ و تابع $f(x)=(x+۱)[x]$ مفروض باشند، آن گاه دنباله‌ی $f(a_n)$ به کدام عدد همگراست؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

حل)

$$\lim_{n\to+\infty}f(a_n)=f\left(\lim_{n\to+\infty}a_n\right)=f\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{۲(n+۲)-۳}{n+۲}\right)$$

$$=f\left(\lim_{n\to+\infty}۲-\frac{۳}{n+۲}\right)=f\left(۲-\frac{۳}{+\infty}\right)=f(۲^{-})$$

$$f(۲^{-})=(۲^{-}+۱)[۲^{-}]=۳(۱)=۳$$

گزینه ۲ صحیح است.

نکته: شرط همگرا بودن دنباله های به فرم $\{c^n\}$ آن است که:

$-۱ < c \leq ۱$ باشد (در غیر اینصورت دنباله واگراست)

تست۱۵) به ازای چه مقداری از a، دنباله ی $\{(\frac{۲}{۵-a})^{-n}\}$ همگراست؟

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۸

حل)

$$\left\{\left(\frac{۲}{۵-a}\right)^{-n}\right\} = \left\{\left(\frac{۵-a}{۲}\right)^{n}\right\} \rightarrow \text{شرط همگرایی} \; -۱ < c \leq ۱$$

$$-۱ < \frac{۵-a}{۲} \leq ۱ \rightarrow -۲ < ۵-a \leq ۲ \rightarrow -۷ < -a \leq -۳ \rightarrow ۳ \leq a < ۷$$

عددی که در این بازه می تواند قرار گیرد. **گزینه ۱** یعنی عدد ۵ می باشد.

تست۱۶) به ازای کدام مقادیر x، دنباله ی $\{(\frac{x}{۲})^{۲n}\}$ همگراست؟

۱) $-۳ \leq x \leq ۱$ ۲) $-۲ \leq x \leq ۲$

۳) $۱ < x < ۳$ ۴) $-۲ \leq x < ۳$

حل)

$$a_n = (\frac{n}{۲})^{۲n} = [\left(\frac{x^۲}{۴}\right)]^n \xRightarrow{\text{شرط همگرایی } -۱<c\leq ۱} \underbrace{-۱ < \frac{x^۲}{۴}}_{\text{همواره برقرار}} \leq ۱$$

$$\frac{x^۲}{۴} \leq ۱ \;\rightarrow\; x^۲ \leq ۴ \;\rightarrow\; |x| \leq ۲ \;\rightarrow\; -۲ \leq x \leq ۲$$

گزینه ۲ صحیح است.

تعریف سری– سری همگرا و واگرا :

با توجه به تعریف اولیه سری (که در درسنامه اول گفتیم) به این نتیجه رسیدیم که:

$$\boxed{s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

از آن جا که منظور از s_n ، مجموع n جمله ی اول دنباله ی $\{a_n\}$ است، پس می‌توانیم بگوییم:

$s_1 =$ مجموع یک جمله اول $\rightarrow$ $s_1 = a_1$

$s_2 =$ مجموع دو جمله اول $\rightarrow$ $s_2 = a_1 + a_2$

$s_3 =$ مجموع سه جمله اول $\rightarrow$ $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$

.

.

.

$s_n =$ مجموع n جمله اول $\rightarrow$ $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

حالا با توجه به چیزهایی که گفتیم، می خواهیم دنباله ی $\{s_n\}$ را تشکیل دهیم:

$$\{s_n\}: \underbrace{s_1}_{a_1}, \underbrace{s_2}_{a_1+a_2}, \underbrace{s_3}_{a_1+a_2+a_3}, \ldots, \underbrace{s_n}_{a_1+a_2+\cdots+a_n}$$

به هر یک از جمله های این دنباله، یک **مجموع جزئی** می گوییم (مثلاً s_1 را مجموع جزئی یکم می خوانیم، s_2 را مجموع جزئی دوم می خوانیم و...) بنابراین دنباله ی $\{s_n\}$ را هم **دنباله‌ی مجموع های جزیی** می نامیم.

***خلاصه ی کلام:** دنباله ی مجموع های جزیی (یعنی $\{s_n\}$) را اصطلاحاً **سری** می نامیم.

توجه ۱: سری هایی که دارای تعداد نامتناهی جمله می باشند (یعنی حد بالای سیگماشون، ∞ می شود) را به دو دسته کلی تقسیم می کنیم:

۱)سری **همگرا** ← یک عدد **معین** $= \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

۲) سری واگرا
$$\left.\begin{array}{l} \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \text{عدد نامعین} \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \text{چند عدد نابرابر} \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty \end{array}\right\}$$

توجه ۲: اگر سری $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ همگرا باشد، آن گاه حتماً حد جمله ی عمومی آن **صفر** است (یعنی $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$) ولی عکس این قضیه لزوماً برقرار نیست، یعنی ممکن است حد جملهٔ عمومی دنباله ای صفر شود، ولی سری همگرا نباشد.

***خلاصه ی کلام :**

حد جمله ی عمومی صفر است $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ سری همگراست

به عبارتی شرط $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ یک شرط **لازم** برای همگرایی سری $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ محسوب می‌شود **نه** شرط **کافی**، مثلاً سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ همگراست و حد جمله‌ی عمومیش هم برابر صفر است ($\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^2} = 0$)، همین طور سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ واگراست، اما باز هم حد جمله‌ی عمومی سری برابر **صفر** است: ($\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$)

توجه۳: اگر حد جمله ی عمومیِ سری $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **مخالف صفر** شود، آن گاه سری را **واگرا** می خوانیم. دقت داشته باشید که عکس این قضیه هم لزوماً برقرار نیست، یعنی ممکن است سری **واگرا** باشد در حالی که حد جمله ی عمومی آن **صفر** شود.

به عبارتی شرط $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$ یک شرط **کافی** برای واگرایی سریِ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ محسوب می شود.

نکته: همان طور که گفتیم دنباله ی مجموع های جزیی $\{s_n\}$ ، معادل سری می باشد. پس می توان گفت:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

اگر یک عدد **معین** شود، سری را همگرا و در غیر اینصورت سری را **واگرا** می نامیم.

تست۳۶) دنباله ی $a_n = \{\frac{2^n+2^{2n+1}}{3^n+4^n}\}$ و سری $s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

۱)واگراست- همگراست ۲) همگراست- همگراست

۳) همگراست- واگراست ۴) واگراست- واگراست

حل) برای تعیین همگرایی یا واگرایی دنباله ها، کافیست حد دنباله را در بی نهایت بگیریم:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 2^{2n+1}}{3^n + 4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n + (4^n \times 2)}{3^n + 4^n} \sim \lim_{n\to\infty} \frac{4^n \times 2}{4^n} = 2$$

بنابراین دنباله، همگرا به ۲ می باشد. اما مطلب جدیدی که یاد گرفتیم اینه که برای تعیین همگرایی یا واگرایی یک سری، باید حد جمله عمومیش را بگیریم تا ببینیم **صفر** می شود یا نه:

$$s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n : \lim_{n\to+\infty} a_n = 2 \neq 0$$

حد جمله عمومی سری **مخالف صفر** شده پس فوراً می گوییم سری واگراست.

گزینه ۳ صحیح است.

تحلیل همگرایی و واگرایی سری های عددی:

فهمیدن اینکه مجموع جملات در سری، برابر **عدد مشخصی** می شود یا خیر اهمیت زیادی دارد (همگرایی یا واگرایی سری)، به همین منظور آزمون‌هایی که برای بررسی همگرایی یا واگرایی سری ها کاربرد دارند را به شما عزیزان آموزش می‌دهیم.

۱) آزمون سری p (بعضی ها به آن **سری توانی** هم می گویند): قیافه اش به فرم کلی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ است و حالت های زیر را دارد:

الف) اگر $p \leq 1$: سری **واگرا** می شود. **ب)** اگر $p > 1$: سری **همگرا** می شود.

تست۳۷) در مورد سری های $s_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ و $s_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ کدام درست است؟

۱) s_1 همگراست و s_2 واگراست. ۲) s_1 واگراست و s_2 همگراست.

۳) s_1 و s_2 هر دو همگراست. ۴) s_1 و s_2 هر دو واگراست.

حل)

$$\begin{cases} s_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} : p = 2 > 1 \quad \rightarrow \quad \text{سری همگراست} \\ s_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} : p = \frac{1}{2} < 1 \quad \rightarrow \quad \text{سری واگراست} \end{cases}$$

بنابراین s_1 همگراست و s_2 واگراست.

گزینه ۱ صحیح است.

۲) آزمون هم ارزی: برای تعیین همگرایی یا واگرایی یک سری، می توانیم در صورت امکان از **هم ارز** آن سری کمک بگیریم (هم ارز یک سری، اگر همگرا باشد، خود سری هم همگرا میشود، اگر هم واگرا باشد خود سری هم واگرا می باشد.)

تست۳۸) در مورد سری های $s_1=\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos^2\frac{1}{n})$ و $s_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4+4n+1}{\sqrt{n^9+3n^2+1}}$ کدام درست است؟

۱) s_1 همگرا و s_2 واگراست.　　۲) هر دو همگرا هستند.

۳) s_1 واگرا و s_2 همگراست.　　۴) هر دو واگرا هستند.

حل)

$$\underset{\square\to 0}{1-\cos^m}\square\sim\frac{1}{2}m\square^2$$

$$s_1=\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos^2\frac{1}{n})\ \text{ازمون } \textbf{هم ارزی} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\times 2\times(\frac{1}{n})^2$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\quad\rightarrow\quad p=2>1\quad\rightarrow\quad \text{سری همگراست}$$

$$s_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4+4n+1}{\sqrt{n^9+3n^2+1}}\underset{\text{(آزمون هم ارزی)}}{\sim}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{\sqrt{n^9}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\rightarrow p=\frac{1}{2}<1\rightarrow \text{سری واگراست}$$

بنابراین s_1 همگرا و s_2 واگراست.

گزینه ۱ صحیح است.

سری هندسی:

قیافه اش به فرم کلی $\sum_{k=1}^{n} p^k$ هست (p یک مقدار **ثابت** است)

سری های هندسی را به دو گروه تقسیم می کنیم (صعودی و نزولی):

الف) سری هندسی صعودی:

۱) با جمله های **متناهی** : $\sum_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1} = a_1 \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

۲) با جمله های **نامتناهی** به معنی اینکه سری واگراست. $\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = a_1 \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \infty$

ب) سری هندسی نزولی:

۱) با جمله های **متناهی** :

۲) با جمله های **نامتناهی** به معنی اینکه سری واگراست. حد مجموع $\sum_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1} = \frac{a_1}{1-q} \rightarrow$

تذکر: اگر در یک سری **هندسی**، $|q| < 1$ باشد، آنگاه سری هندسی **نزولی** داریم که **همگرا**ست، به: $\frac{a_1}{1-q}$. $\left(q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \cdots\right)$

تذکر: در سری هندسی، قدر نسبت سری عبارت است از پایهٔ n.

هم چنین برای به دست آوردن جمله اول سری (یعنی a_1) کافیست حد پایین (باند پایین) سیگما را به جای n قرار دهیم.

تست۴۸) مقدار سری $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^k + 4^k}{4^k + 8^k}$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) ۲

حل) تست جالبی است ....

بنابرآزمون سری متناوب سری در $x = -۲$ همگراست $\rightarrow \sum_{n=۲}^{\infty}(-۱)^n \underbrace{\frac{۱}{nlnn}}_{\downarrow}$ $\rightarrow x = -۲$: نقطه ابتدا

مثبت، نزولی و همگرا به صفر

گزینه ۴ صحیح است.

سری تیلور:

هر تابعی که بی نهایت بار مشتق پذیر باشد را می توان به صورت **یک سری توانی** مناسب نشان داد. اگر $f(x)$ تا مرتبه بی نهایت در $x = a$ مشتق پذیر باشد، آن گاه سری زیر را **بسط تیلور** تابع f حول $x = a$ می گویند.

$$\sum_{n=۰}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{۱!}(x-a) + \frac{f''(a)}{۲!}(x-a)^۲ + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

⚠️ **توجه**: $f^{(n)}(a)$ یعنی مشتق مرتبه n اُمِ f در $x = a$ ، مثلا $f^{(۰)}(a)$ همان $f(a)$ و $f^{(۱)}(a)$ مقدار مشتق f در $x = a$ می باشد.

سری مک لورن:

سری **تیلور** برای حالتی که $a = ۰$ باشد، به **سری مک لورن** تبدیل می شود که به صورت زیر است:

$$\boxed{\sum_{n=۰}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(۰)}{n!}x^n = f(۰) + \frac{f'(۰)}{۱!}\mathrm{x} + \frac{f''(۰)}{۲!}x^۲ + \cdots + \frac{f^{(n)}(۰)}{n!}x^n + \cdots}$$

مثال۳۵) بسط تیلور $f(x) = lnx$ را حول $x = ۱$ به دست آورید؟

حل) $f(x) = lnx$

* موارد ستاره دار (۱، ۲ و ۳) خیلی مهم اند.

بسط مک لورن چند تابع مهم و پر کاربرد:

تابع $f(x)$	سری مک لورن
*۱) $sinx$	$\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n \frac{x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!} = x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} - \frac{x^۷}{۷!} + \cdots \qquad -\infty < x < +\infty$
*۲) $cosx$	$\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n \frac{x^{۲n}}{(۲n)!} = ۱ - \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} - \frac{x^۶}{۶!} + \cdots \qquad -\infty < x < +\infty$
*۳) e^x	$\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = ۱ + \frac{x^۱}{۱!} + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \cdots \qquad -\infty < x < +\infty$
۴) $\frac{۱}{۱-x}$	$\sum_{n=۰}^{\infty} x^n = ۱ + x + x^۲ + x^۳ + \cdots$
۵) $tanx$	$x + \frac{x^۳}{۳} + \frac{۲x^۵}{۱۵} + \cdots \qquad (\lvert x\rvert < \frac{\pi}{۲})$
۶) $Arctanx$	$\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n \frac{x^{۲n+۱}}{۲n+۱} = x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} - \frac{x^۷}{۷!} + \cdots \qquad (-۱ \le x \le ۱)$
۷) $Arcsinx$	$x + \frac{x^۳}{۲\times۳} + \frac{۱\times۳x^۵}{۲\times۴\times۵} + \frac{۱\times۳\times۵x^۷}{۲\times۴\times۶\times۷} + \cdots \qquad (-۱ \le x \le ۱)$
۸) $(۱+x)^k$	$\sum_{n=۰}^{\infty}\binom{k}{n}x^n = ۱ + kx + \frac{k(k-۱)}{۲!}x^۲ + \frac{k(k-۱)(k-۲)}{۳!}x^۳$ $(-۱ < x < ۱)$
۹) $\frac{۱}{x+۱}$	$۱ - x + x^۲ - x^۳ + x^۴ - x^۵ + \cdots \qquad (-۱ < x < ۱)$

تست های کنکور کارشناسی ارشد

دنباله و سری

رشته های مدیریت و حسابداری و اقتصاد

سراسری و آزاد

حل تست های کنکور کارشناسی ارشد

دنباله و سری

رشته های مدیریت و حسابداری و اقتصاد

سراسری و آزاد

✐ پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته مدیریت

۱. گزینه ۳ صحیح است.

حل کلاسیک :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,(۲n)^{۲}}{(n+۱)!\,(n+۲)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,(۲n)^{۲}}{(n+۱)n!\,(n+۲)}=\lim_{n\to\infty}\frac{۴n^{۲}}{n^{۲}+۳n+۲}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{۴n^{۲}}{n^{۲}}=۴$$

در حد گیری وقتی n به سمت بی نهایت میل می کند

می توان گفت: $\dfrac{\text{ضریب بزرگترین در چه صورت}}{\text{ضریب بزرگترین درجه مخرج}}$

حل تکنیکی : کافیست برای حد دیگری در بی نهایت عددی بزرگی را در سؤال قرار دهیم که

اگر $n\to+\infty$ $\begin{matrix}(\text{عدد}+۱۰)\\(\text{عدد}+۱۰۰)\end{matrix}$ و $n\to-\infty$ $\begin{matrix}(\text{عدد}-۱۰)\\(\text{عدد}-۱۰۰)\end{matrix}$ را قرار می دهیم و اگر $n\to\infty$

مشخص نبود ترجیحاً از عدد (۱۰ + یا۱۰۰+) استفاده می کنیم حال داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,(۲n)^{۲}}{(n+۱)!\,(n+۲)}\xRightarrow{n=+۱۰۰}\frac{۱۰۰!\,(۲(۱۰۰))^{۲}}{(۱۰۰+۱)!\,(۱۰۰+۲)}$$

$$=\frac{۱۰۰!\times۴\times۱۰^{۴}}{۱۰۱!\times۱۰۲}=\frac{۱۰۰!\times۴\times۱۰^{۴}}{۱۰۱\times۱۰۰!\times۱۰۲}\cong\frac{۴\times۱۰^{۴}}{۱۰^{۲}\times۱۰^{۲}}=\frac{۴\times۱۰^{۴}}{۱۰^{۴}}=۴$$

$$\begin{cases}۱۰۱\simeq۱۰۰=۱۰^{۲}\\۱۰۲\simeq۱۰۰=۱۰^{۲}\end{cases}$$

---

۲. گزینه ۳ صحیح است.

حل کلاسیک : مجموع n عدد متوالی همواره برابر است با: $۱+۲+۳+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$

۱۱۵. **گزینه ۴ صحیح است.**

$$k=\sqrt{۳+\sqrt{۳+\sqrt{۳+\cdots}}} \xrightarrow{\text{طرفین تساوی به توان ۲}} k^{۲}=۳+\underbrace{\sqrt{۳+\sqrt{۳+\sqrt{۳+\cdots}}}}_{k}$$

$$\rightarrow k^{۲}=۳+k \quad \rightarrow \quad k^{۲}-k-۳=۰$$

$$\frac{\text{بدست آوردن ریشه با روش}\Delta}{\Delta=b^{۲}-۴ac, k_{۱,۲}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}} \quad \Delta=(-۱)^{۲}-۴(۱)(-۳)=۱+۱۲=۱۳$$

$$\rightarrow k_{۱},k_{۲}=\frac{-(-۱)\pm\sqrt{۱۳}}{۲(۱)} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} k_{۱}=\frac{۱+\sqrt{۱۳}}{۲} \\ k_{۲}=\frac{۱-\sqrt{۱۳}}{۲} \end{cases}$$

غیرقابل قبول زیرا طرف راست عبارت رادیکال با فرجه زوج است و نامنفی می باشد و طرف چپ هم باید نامنفی باشد. بنابراین مقدار:

$$k=\frac{۱+\sqrt{۱۳}}{۲}$$

⚠️ **توجه**: اگر تعداد جملات داده شده محدود بود (بی نهایت نبود) باید مشخص شود چند جمله داریم مثلاً:

$$\sqrt{\underbrace{۳+\sqrt{۳+\cdots\sqrt{۳}}}_{n\text{مرتبه}}}$$