

# ریاضیات DLM

آموزش سه بعدی مفاهیم

کاربرد ریاضیات  
در مدیریت،  
اقتصاد و حسابداری

طراح، مؤلف و گردآورنده:

امین بنیادگذار

ویراستار علمی:

حسین خدای

## کاربرد ریاضیات در اقتصاد، مدیریت و حسابداری

- توابع مختلف در علم اقتصاد..... ۵
۱. تابع تقاضا..... ۶
۲. تابع عرضه..... ۷
- نقطه تعادل بازار..... ۸
۳. تابع هزینه کل ( $TC$ )..... ۹
۴. تابع هزینه متوسط ( $AC$ )..... ۱۰
۵. تابع درآمد کل ( $TR$ )..... ۱۱
۶. تابع درآمد متوسط ( $AR$ )..... ۱۱
۷. تابع سود..... ۱۱
- نقطه سر به سر..... ۱۲
- مسیر متغیرها در طول زمان..... ۱۴
- محاسبه رشد..... ۱۵
- کاربرد مشتق در مباحث مالی..... ۱۶
- (۱) هزینه نهایی..... ۱۶
- (۲) درآمد نهایی..... ۱۷
- (۳) کشش (حساسیت)..... ۱۷
- رابطه بین درآمد نهایی و کشش..... ۱۹
- سوبسید و مالیات..... ۲۰
- کاربردهای انتگرال در مباحث مالی (درآمد ملی، مصرف ملی و پس انداز)..... ۲۲
- (۱) انباشت سرمایه..... ۲۳
- (۲) ارزش فعلی سرمایه..... ۲۴
۸. توابع تولید..... ۲۵



- نسبت بازده به مقیاس ..... ۲۶
- مازاد مصرف کننده ..... ۲۷
- مازاد تولیدکننده ..... ۲۸

### **سوالات آزمون کارشناسی ارشد رشته های مدیریت ، حسابداری و اقتصاد**

- سوالات آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته مدیریت ..... ۳۲
- سوالات آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی رشته مدیریت ..... ۳۷
- سوالات آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته حسابداری ..... ۳۸
- سوالات آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی رشته حسابداری ..... ۴۱
- سوالات آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته اقتصاد ..... ۴۳
- سوالات آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی رشته اقتصاد ..... ۵۹

### **حل سوالات آزمون کارشناسی ارشد رشته های مدیریت و حسابداری و اقتصاد**

- پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته مدیریت ..... ۶۶
- پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد رشته مدیریت ..... ۷۶
- پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته حسابداری ..... ۷۸
- پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد رشته حسابداری ..... ۸۳
- پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته اقتصاد ..... ۸۵
- پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد رشته اقتصاد ..... ۱۲۲

## تابع درآمد کل ( $TR$ ):

درآمد کل یعنی حاصل ضرب کل محصول فروخته شده در قیمت هر واحد محصول. اگر تابع تقاضا به صورت  $y = f(x)$  باشد، یعنی اگر قیمت هر واحد محصول برابر  $y$  باشد مقدار محصول خریداری شده توسط مصرف کنندگان برابر  $x$  است.

$$TR = xy = xf(x)$$

بنابراین مقدار درآمد کل ( $TR$ ) برابر است با:

## تابع درآمد متوسط ( $AR$ ):

درآمد حاصل از فروش یک واحد محصول را درآمد متوسط گویند، یعنی:

$$AR = \frac{TR}{x} = \frac{xf(x)}{x} = f(x)$$

به عبارت دیگر تابع درآمد متوسط همان تابع تقاضا است.

## تابع سود

سود	درآمد کل	هزینه کل
$\widehat{\pi}$	$\widehat{TR}$	$\widehat{TC}$

$$\widehat{\pi} = \widehat{TR} - \widehat{TC}$$

از این فرمول بدست می آید:

تست ۴) اگر تابع درآمد کل  $TR = e^{2x} - 1$  و هزینه کل  $TC = e^x + 9$  باشد که در آن  $x$  مقدار تولید است، به ازای چه مقدار تولید، سود بنگاه برابر ۱۰۰ می شود؟

(مدیریت سراسری ۸۱)

$$100 \quad 11 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad e^{10}$$

(حل)

$$\pi = TR - TC \rightarrow \pi = e^{2x} - 1 - (e^x + 9)$$

$$\pi = e^{2x} - 1 - e^x - 9 = e^{2x} - e^x - 10$$

$$\stackrel{\pi=100}{\implies} e^{2x} - e^x - 10 = 100 \rightarrow e^{2x} - e^x - 110 = 0$$

$$(e^x)^2 - e^x - 110 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (e^x - 11)(e^x + 10) = 0$$

$$e^x - 11 = 0 \rightarrow e^x = 11 \rightarrow \boxed{x = \ln 11}$$

گزینه ۳ صحیح است.

تست ۵) اگر تابع تقاضا  $y = 18 - 2x$  و تابع هزینه  $TC = 10x - x^2$  باشد،  $x$  مقدار

تقاضا و  $y$  قیمت است. به ازای چه مقدار، سود بنگاه ماکزیمم است؟ (اقتصاد سراسری ۸۴)

$$x = \frac{12}{2} \text{ (۴)} \quad x = 5 \text{ (۳)} \quad x = 4 \text{ (۲)} \quad x = \frac{5}{2} \text{ (۱)}$$

حل) سود بنگاه زمانی ماکزیمم (حداکثر) میشه که مشتق تابع سود، صفر باشه. پس اول باید

تابع سود رو بدست بیاریم، بعد ازش مشتق بگیریم و اونو مساوی صفر قرار بدیم:

$$TR = yx = (18 - 2x)x = 18x - 2x^2$$

$$\pi = TR - TC = (18x - 2x^2) - (10x - x^2) = 18x - 2x^2 - 10x + x^2$$

$$\pi = 8x - x^2$$

$$\pi' = 0 \rightarrow \pi' = 8 - 2x = 0 \rightarrow 8 = 2x \rightarrow x = \frac{8}{2} \rightarrow \boxed{x = 4}$$

بنابراین به ازای  $x = 4$  سود بنگاه ماکزیمم است.

گزینه ۲ صحیح است.

**نقطه سر به سر:**

نقطه ای است که سود (یا زیان) برابر با صفر باشد. به عبارت دیگر درآمد کل برابر با هزینه کل

$$\pi = TR - TC = 0 \rightarrow \boxed{TR = TC}$$

باشد، یعنی:

حال می توان گفت اگر مقدار تولید  $(Q)$ ، قیمت فروش هر واحد محصول  $(p)$ ، هزینه متغیر

تولید هر واحد محصول  $(VC)$  و مجموع هزینه های ثابت  $(FC)$  باشد، آن گاه:

$$TC = TR \rightarrow FC + VC Q_b = PQ_b$$

میزان تولید در نقطه سر به سر

$$FC = PQ_b - VC Q_b \rightarrow \widehat{Q_b} = \frac{\widehat{FC}}{\widehat{P} - \widehat{VC}}$$

میزان تولید در نقطه سر به سر
هزینه ثابت  

هزینه مقدار تولید

تست ۶) اگر تابع درآمد ملی  $TR = 2 \ln(x + 1)$  و هزینه  $TC = \ln(2x + 10)$  باشد،  
نقطه سر به سر کدام است؟ (مدیریت سراسری ۷۹)

۲ (۱)                      ۳ (۲)                      ۴ (۳)                      ۵ (۴)

حل) در نقطه سر به سر، درآمد کل با هزینه کل برابر است، یعنی  $TR = TC$  حال داریم:

$$\begin{cases} TR = 2 \ln(x + 1) \\ TC = \ln(2x + 10) \end{cases} \rightarrow TR = TC \rightarrow 2 \ln(x + 1) = \ln(2x + 10)$$

$$\ln(x + 1)^2 = \ln(2x + 10) \rightarrow (x + 1)^2 = (2x + 10) \rightarrow x^2 + 2x + 1 = 2x + 10$$

$$x^2 = 10 - 1 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow \begin{cases} x = +3 \\ x = -3 \end{cases} \xrightarrow[\text{مثبت باشد}]{\text{مقدار تولید باید}} x = 3$$

گزینه ۲ صحیح است.

تست ۷) هزینه ثابت برای تولید کالایی ۱۶,۲۰۰ واحد پول و هزینه متغیر آن ۷۰ درصد فروش است. اگر قیمت فروش هر واحد کالا ۱۲۰ واحد پول باشد، تعداد واحد کالا در نقطه سر به سر

کدام است؟ (مدیریت و حسابداری سراسری ۸۷)

۴۵۰ (۱)                      ۵۴۰ (۲)                      ۶۰۰ (۳)                      ۷۲۰ (۴)

$$Q_b = \frac{FC}{P - VC}$$

$$VC = 70\% \times P = \frac{7}{10} \times 120 = 84$$

$$Q_b = \frac{16,200}{120 - 84} = \frac{16,200}{36} = 450 \rightarrow \boxed{Q_b = 450} \rightarrow \text{تعداد کالا در نقطه سر به سر}$$

گزینه ۱ صحیح است.

## مسیر متغیرها در طول زمان:

زمانی که متغیری در طول زمان با نرخ ثابتی افزایش یا کاهش می یابد، می توان یک قاعده و فرمول برای حرکت آن متغیر در طول زمان بیان کرد.

\*بطور کلی اگر  $A$  متغیری باشد که در طول زمان با نرخ ثابت  $r$  رشد کند، می توان مقدار  $A$  را در هر زمان دلخواه با یکی از فرمول های زیر بدست آورد.

(۱) حالت ناپیوسته (گسسته):

تعداد سال ها	مقدار متغیر $A$ در زمان شروع
$\underbrace{A_t}_{\substack{\uparrow \\ \text{مقدار متغیر } A \text{ در زمان } t}} = \underbrace{\hat{A}}_{\substack{\uparrow \\ \text{نرخ ثابت رشد}}} \cdot (1 + \underbrace{r}_{\substack{\downarrow \\ \text{نرخ ثابت رشد}}})^{\underbrace{\hat{t}}_{\substack{\uparrow \\ \text{تعداد سال ها}}}}$	

اگر به جای آهنگ رشد سالانه، آهنگ رشد ماهانه و حتی آهنگ رشد روزانه را به دست آوریم به واقعیت نزدیک تر می شویم. اگر سال را به  $n$  قسمت مساوی تقسیم کنیم، یعنی  $\frac{1}{n}$ ، آن گاه

$$\boxed{A_t = A \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}}$$

فرمول رشد به صورت زیر خواهد بود:

(۲) حالت پیوسته:

تعداد سال ها    نرخ ثابت رشد    مقدار متغیر  $A$  در زمان  $t$

$$\underbrace{A_t}_{\substack{\uparrow \\ \text{مقدار متغیر } A \text{ در زمان شروع}}} = \underbrace{\hat{A}}_{\substack{\uparrow \\ \text{نرخ ثابت رشد}}} \cdot \underbrace{e^{\hat{r} \hat{t}}}_{\substack{\uparrow \\ \text{تعداد سال ها}}}$$

$$e \simeq 2/118 \quad (\text{عدد نپر}) \quad \text{مقدار متغیر } A \text{ در زمان شروع}$$

تست ۸) با نرخ بهره ۱۰ درصد که به صورت سالانه بر سرمایه افزوده می شود. ارزش اسمی یک سرمایه در ده سال آینده، برابر ۱۳۰,۰۰۰ است. ارزش کنونی سرمایه تقریباً چه قدر است؟<sup>۱</sup>

$$۶۰,۰۰۰ (۱) \quad ۵۰,۰۰۰ (۲) \quad ۶۵,۰۰۰ (۳) \quad ۷۵,۰۰۰ (۴)$$

(حل)

$$A_t = A_0 (1 + r)^t \rightarrow \begin{cases} A_{10} = 130,000 \\ A_0 = ? \\ r = 10\% = 0.1 \\ t = 10 \end{cases}$$

$$130,000 = A_0 (1 + 0.1)^{10} \rightarrow A_0 = \frac{130,000}{(1.1)^{10}} = \frac{130,000}{2.6} = 50,000$$

گزینه ۲ صحیح است.

### محاسبه رشد:

نرخ رشد تابع  $y = f(t)$  به صورت  $r(y) = \frac{f'(t)}{f(t)}$  است. به عبارت دیگر:

$$r(y) = \frac{d}{dt} \ln(f(t))$$

❖ تذکر: نرخ رشد حاصلضرب چند عامل، برابره با: مجموع نرخ رشد تک تک عامل ها.

تست ۹) یک شرکت تولیدی، کالایی را تولید می کند. رشد سالیانه مقدار محصول، ۷ درصد و افزایش قیمت کالا ۵ درصد است. نرخ رشد و فروش سالیانه شرکت کدام است؟ (اقتصاد سراسری ۹۱)

$$۱) \frac{5}{7} \% \quad ۲) \frac{7}{5} \% \quad ۳) ۱۲ \% \quad ۴) ۳۵ \%$$

(حل) نرخ رشد درآمد شرکت، برابره با نرخ رشد قیمت ضرب در نرخ رشد مقدار فروش محصول:

$$r(TR) = r(q) \cdot r(p)$$

نرخ رشد درآمد شرکت



خب، حالا طبق تذکری که در صفحه قبل دادیم، باید بگیم که نرخ رشد حاصلضرب این دو عامل  $r(p) \cdot r(q)$  برابره با: مجموع نرخ رشد تک تک این عامل‌ها:

$$\underbrace{r(TR)} = \underbrace{r(q) + r(p)} = \%7 + \%5 = \%12$$

مجموع نرخ رشد عامل‌ها      نرخ رشد درآمد شرکت

گزینه ۲ صحیح است.

## کاربرد مشتق در مباحث مالی:

در مباحث مالی برای بیان نسبت تغییرات تابع  $y = f(x)$  به تغییرات  $x$ ، از دو اصطلاح «متوسط» و «نهایی» استفاده می‌کنیم.

(نکته مهم: برای بدست آوردن متغیرهای «نهایی» باید از مشتق استفاده کنیم.)

(۱) هزینه نهایی:

اگر تابع هزینه کل به صورت  $TC = y = f(x)$  باشد، آن گاه مشتق  $f$  را تابع هزینه نهایی

$$MC = \frac{dTC}{dx} = F'(x)$$

می‌گویند، یعنی: هزینه نهایی، مشتق تابع هزینه کل است:

🌟 **تذکر:** واضح است که با داشتن هزینه نهایی، می‌توانیم هزینه کل را با روش انتگرال‌گیری

$$TC = \int MC \, dx$$

بدست آوریم، یعنی:

تست (۱۰) اگر معادله هزینه کل بصورت  $y = 20 + 2x + 0.5x^2$  بیان شده باشد که در آن

$y$  هزینه و  $x$  مقدار تولید باشد، کدام یک از توابع زیر هزینه نهایی خواهد بود؟ (حسابداری آزاد ۷۷)

$$f(x) = 20 + 2x + x^2 \quad (۱) \qquad f(x) = 20x + x^2 + \frac{5}{3}x^3 \quad (۲)$$

$$f(x) = 2 + x \quad (۳) \qquad f(x) = 2x + x^2 \quad (۴)$$

(حل) اگر از تابع هزینه کل مشتق بگیریم، تابع هزینه نهایی بدست می‌آید.

$$MC = y' = 0 + 2 + x \rightarrow \boxed{MC = 2 + x} \rightarrow \text{هزینه نهایی}$$

گزینه ۳ صحیح است.

آزمون های کارشناسی ارشد

سراسری و آزاد

رشته های مدیریت - حسابداری - اقتصاد

فصل:

کاربرد ریاضیات در

اقتصاد، مدیریت و حسابداری

پاسخ آزمون های کارشناسی ارشد

سراسری و آزاد

رشته های مدیریت - حسابداری - اقتصاد

فصل:

**کاربرد ریاضیات در اقتصاد، مدیریت و حسابداری**

۱۷۰. گزینه ۳ صحیح است.

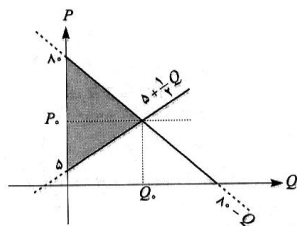
$$\ln Y = \alpha + \beta x \xrightarrow{\text{مشتق گیری از طرفین تساوی}} \frac{Y'}{Y} = \beta \xrightarrow{\text{ضرب در } x} Y' \frac{x}{Y} = \beta x$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب در } x} Y' \frac{x}{Y} = \beta x \rightarrow \frac{dy}{dx} \frac{x}{y} = \beta x \rightarrow E = \beta x$$

۱۷۱. گزینه ۲ صحیح است. قبل از وضع مالیات داریم:

$$\begin{cases} Q_d = 80 - p \rightarrow p = 80 - Q \\ Q_s = -10 + \frac{1}{2}p \rightarrow p = 5 + \frac{1}{2}Q \end{cases}$$

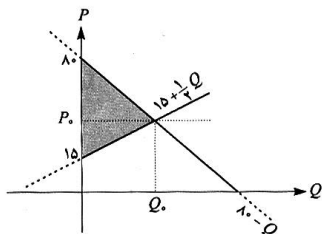
$$80 - Q = 5 + \frac{1}{2}Q \rightarrow 80 - 5 = \frac{1}{2}Q + Q \rightarrow 75 = \frac{3}{2}Q \rightarrow Q = \frac{75}{\frac{3}{2}} = 50$$



$$CS + PS = \text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2}(80 - 50)(50) = 1875$$

پس از وضع مالیات داریم:

$$\begin{cases} P = 80 - Q \\ 80 - Q = 15 + \frac{1}{2}Q \\ P = 5 + \frac{1}{2}Q + 10 = 15 + \frac{1}{2}Q \rightarrow 80 - 15 = \frac{1}{2}Q + Q \rightarrow 65 = \frac{3}{2}Q \rightarrow Q = \frac{65}{\frac{3}{2}} = \frac{130}{3} \end{cases}$$



$$CS + PS = \frac{1}{2}(80 - 15)\left(\frac{130}{3}\right) = \frac{4225}{3}$$

$$\frac{4225}{3} - \frac{1875}{1} = \frac{4225 - 5625}{3} = -\frac{1400}{3}$$

بنابراین مجموع مزاد مصرف کننده و تولید کننده کاهش برابر  $\frac{1400}{3}$  دارد.