ریاضیات DLM

آموزش سه‌بعدی مفاهیم

ماتریس

طراح، مؤلف و گردآورنده:

امین بنیاد گذار

ویراستار علمی:

حسین خدامی

عنوان	صفحه

آموزش کلاسیک ماتریس

ماتریس ۷
تعریف ماتریس ۸
مرتبه (یا اندازه‌ی) ماتریس و سطر و ستون ۸
دِرایه ۸
انواع ماتریس ۹
۱. ماتریس صفر ۹
۲. ماتریس مربعی ۹
۳. ماتریس قطری ۹
۴. ماتریس اسکالر ۱۰
۵. ماتریس همانی (واحد، یکه) ۱۰
۶. ماتریس بالا مثلثی ۱۰
۷. ماتریس پایین مثلثی ۱۱
۸. ماتریس سطری(بردار سطری) ۱۱
۹. ماتریس ستونی (بردار ستونی) ۱۱
۱۰. ماتریس قطر فرعی ۱۲
تساوی دو ماتریس ۱۳
قرینه‌ی ماتریس ۱۴
جمع ماتریس‌ها ۱۴
خواص جمع ماتریس‌ها ۱۵
ضرب عدد در ماتریس ۱۵
خواص ضرب عدد در ماتریس ۱۵
تفاضل ماتریس‌ها ۱۶
ضرب ماتریس‌ها ۱۶
ویژگی‌های ضرب ماتریس ۱۹
ضرب ماتریسی در حالت‌های زیر خاصیت جابجایی دارد ۲۲
ماتریس‌های تعویض پذیر و تعویض ناپذیر ۲۴

ماتریس‌های مربعی خاص ۲۷
ماتریس ترانهاده (برگردانده) (ترانسپوزه) ۳۰
خواص ترانهاده یک ماتریس ۳۱
ماتریس متقارن ۳۵
ویژگی‌های ماتریس متقارن ۳۶
ماتریس شبه متقارن (پاد متقارن) ۳۷
ویژگی‌های ماتریس پادمتقارن ۳۷
تشخیص متقارن یا پادمتقارن بودن یک ماتریس (یک عبارت ماتریسی) ۴۰
ماتریس هرمیتی و شبه هرمیتی ۴۱
اِفراز ماتریس‌ها ۴۲
زیرماتریس‌ها ۴۳
دترمینان ۴۴
دترمینان ماتریس‌های ۱ × ۱ ..... ۴۴
دترمینان ماتریس‌های ۲ × ۲ ..... ۴۴
دترمینان ماتریس‌های ۳×۳ ..... ۴۵
دترمینان ماتریس‌های $n \times n$ ۴۶
۱. تعریف کهاد ۴۶
۲. تعریف همسازه یک درایه ۴۶
روش لاپلاس ۴۸
مواردی که حاصل دترمینان برابر صفر می‌شود ۵۰
ویژگی های دترمینان ۵۲
دترمینان واندرموند ۵۴
دو کاربرد دترمینان ۵۵
ماتریس منفرد و غیرمنفرد ۵۶
ماتریس همساز و ماتریس الحاقی (وابسته) ۵۸
قضیه کوشی ۶۱
معکوس (وارون) یک ماتریس (ماتریس‌های وارن پذیر (نامنفرد، ناویژه) ۶۲
شرط معکوس پذیری ماتریس ۶۳

روش‌های محاسبه معکوس یک ماتریس..... ۶۴
محاسبه معکوس ماتریس به روش ماتریس الحاقی..... ۶۵
محاسبه معکوس ماتریس به روش گاوس..... ۶۷
ویژگی‌های معکوس یک ماتریس..... ۶۹
ماتریس برگردان..... ۷۱
ماتریس متعامد..... ۷۱
رتبه یا مرتبه ماتریس (سوال خیز ترین قسمت فصل)..... ۷۲
عملیات مقدماتی..... ۷۶
صورت های نرمال..... ۷۷
مقادیر ویژه و بردارهای ویژه..... ۷۸
ماتریس‌های متشابه (همنشت)..... ۷۹
دستگاه معادلات خطی..... ۸۰
معادله خطی همگن و غیرهمگن..... ۸۱
دستگاه معادلات همگن و غیرهمگن..... ۸۱
دستگاه دو معادله دو مجهول..... ۸۲
بررسی از نظر هندسی..... ۸۳
دستگاه سه معادله و سه مجهول..... ۸۴
بررسی از نظر هندسی..... ۸۵
دستگاه دو معادله و سه مجهول..... ۸۷
دستگاه سه معادله و دو مجهول..... ۸۹
بررسی از نظر هندسی..... ۸۹
راه تشخیص حالت‌های فوق..... ۹۰
دستگاه معادلات خطی m معادله n مجهول..... ۹۱
دستگاه m معادله n مجهولی $AX = B$..... ۹۴
روش حذفی گاوس برای حل دستگاه ها..... ۹۴
بحث در تعداد جواب های دستگاه معادلات خطی..... ۹۵
حل دستگاه n معادله n مجهول روش اول)دستور کِرامر..... ۹۷
حل دستگاه n معادله n مجهول روش دوم) استفاده از معکوس ماتریس ها..... ۹۸

دستگاه معادلات همگن خطی (قسمت سوال خیز و مهم) ۱۰۰
فرمهای درجه دوم ۱۰۲
علامت فرم درجه دوم ۱۰۳

سوالات آزمون کارشناسی ارشد رشته های مدیریت ، حسابداری و اقتصاد

سوالات آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته مدیریت ۱۰۶
سوالات آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی رشته مدیریت ۱۱۵
سوالات آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته حسابداری ۱۳۳
سوالات آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی رشته حسابداری ۱۴۰
سوالات آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته اقتصاد ۱۴۵
سوالات آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی رشته اقتصاد ۱۵۸

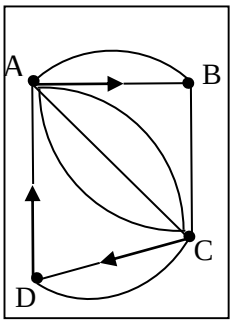
حل سوالات آزمون کارشناسی ارشد رشته های مدیریت و حسابداری و اقتصاد

پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته مدیریت ۱۶۸
پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد رشته مدیریت ۱۹۳
پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته حسابداری ۲۲۷
پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد رشته حسابداری ۲۴۲
پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته اقتصاد ۲۵۰
پاسخ تشریحی و تکنیکی آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد رشته اقتصاد ۲۷۹

ماتریس:

قبل از معرفی رسمی ماتریس، توجه شما را به یک مثال جالب جلب می کنم:

مثال) در شکل مقابل، چهارشهر A،B،C،D و راه های ارتباطی آنها نشان داده شده است.



خطهای پیکان دار، جاده های یک طرفه در جهت پیکان را نشان می دهند و راه هایی که پیکان بر آن‌ها قرار ندارند، دو طرفه هستند، با رسم یک جدول، تعداد راه‌های ارتباطی بین شهرها را مشخص کنید؟

حل : جدول مقابل، تعداد راه‌های بین هر دو شهر را نشان می‌دهد. اگر این جدول را به صورت دیگری نمایش دهیم، همان چیزی بدست می آید که آن را **ماتریس** می‌نامیم.

در زیر جدول، ماتریس این مدل رسم شده است.

	A	B	C	D
A	۰	۲	۳	۰
B	۱	۰	۱	۰
C	۳	۱	۰	۲
D	۱	۰	۱	۰

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۳ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ & ۰ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

تعریف ماتریس :

هرگاه دسته‌ای از اعداد یا اشیاء با آرایش سطری و ستونی در یک جدول مستطیلی شکل، قرار گیرند، یک «**ماتریس**» حاصل می شود.

مرتبه (یا اندازه‌ی) ماتریس و سطر و ستون:

«**مرتبه‌ی** یک ماتریس» نشان دهنده‌ی تعداد سطرها و ستون های یک ماتریس است، یعنی وقتی می‌گوییم A یک ماتریس $m\times n$است، یعنی mسطر و n ستون دارد.

دِرایه:

هریک از اعداد یا اشیاء ماتریس را یک «**درایه**» ماتریس می نامند. هر درایه ماتریس را در حالت کلی با شکل a_{ij} نمایش می‌دهند که «i» یعنی رقم اول اندیس، نشان دهنده‌ی **سطر** و «j» یعنی رقم دوم اندیس، نشان دهنده **ستونی** است که درایه در آن قرار گرفته است.

ماتریسی مانند $A_m\times_n$ را با توجه به درایه‌های آن به صورت کلی $A_{m\times n}=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ نمایش می‌دهند. برای مثال، درایه $a_{۲۳}$ یعنی عضوی که در سطر دوم و ستون سوم قرار دارد، در نتیجه در ماتریس $A=\left[i-j\right]_{۲\times ۲}$ تمام درایه ها به صورت $i-j$ هستند و اگر درایه سطر دوم $(i=۲)$و ستون اول $(j=۱)$ این ماتریس را بخواهیم، باید بصورت زیر عمل کنیم:

$$\begin{cases} i=۲ \\ j=۱ \end{cases} \longrightarrow i-j=۱$$

و به همین ترتیب :

$$A=\begin{bmatrix} 1-1 & 1-2 \\ 2-1 & 2-2 \end{bmatrix} \rightarrow A=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B=\left[i^2-j\right]_{2\times 2} \Rightarrow B=\begin{bmatrix} 1^2+1 & 1^2+2 \\ 2^2+1 & 2^2+2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

انواع ماتریس:

۱) **ماتریس صفر:** ماتریسی که همه درایه هایش صفر باشد را ماتریس صفر می نامند.

ماتریس صفر با مرتبه‌ی $m \times n$ را با نماد $\overline{O}_{m\times n}$ یا به طور خلاصه با نماد $\overline{O}$ نمایش می‌دهند. برای مثال :

$$\overline{o}_{۲\times ۳} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

۲) ماتریس مربعی: ماتریسی که تعداد سطرها و ستون های آن مساوی باشد را ماتریس **مربعی** گویند.

اگر A یک ماتریس مربعی از مرتبه $n \times n$ باشد، به طور خلاصه می گوئیم: A یک ماتریس مربعی از مرتبه n است. درایه‌های $a_{۱۱}, a_{۲۲}, ..., a_{nn}$ را در ماتریس $A_{m\times n} = [a_{ij}]_{n\times m}$، درایه-های قطر **اصلی** A می نامند.

قطر فرعی　　قطر اصلی

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲n} \\ a_{n۱} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

۳) ماتریس قطری: هر ماتریس مربعی که همه درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی آن صفر باشند را ماتریس **قطری** می‌گویند. در ضمن درایه‌های واقع بر قطر اصلی نیز می‌توانند صفر باشند. (مثل ماتریس B در مثال زیر)

برای مثال:

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

۴) ماتریس اسکالر: هر ماتریس قطری که همه عناصر واقع بر قطر اصلی آن با هم مساوی باشند را ماتریس **اسکالر** می نامند.

$$A=\begin{bmatrix}\sqrt{۲} & ۰ & ۰\\ ۰ & \sqrt{۲} & ۰\\ ۰ & ۰ & \sqrt{۲}\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

قطر اصلی　　قطر اصلی　　قطر اصلی

۵) ماتریس همانی (واحد، یکه): هر ماتریس قطری که تمام درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن برابر یک می‌باشد را ماتریس همانی گویند و با نماد I_n یا به طور خلاصه با نماد I، نمایش می‌دهند و یا به صورت $a_{ij}=\begin{cases}۱ & i=j\\ ۰ & i\neq j\end{cases}$ ؛ مانند ماتریس C در بالا و ماتریس های زیر:

$$I=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix} \qquad I=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

نتیجه اخلاقی: هر ماتریس همانی، در واقع یک ماتریس اسکالر است، زیرا تمام درایه های قطر اصلی آن باهم برابرند.

۶) ماتریس بالامثلثی: ماتریس مربعی که کلیه درایه‌های واقع در **زیر** قطر اصلی آن، صفر می‌باشند را ماتریس **بالامثلثی** می‌گویند.

توجه: در ماتریس بالامثلثی، درایه‌های واقع بر **بالای** قطر اصلی نیز می‌توانند صفر باشند. مانند:

$$A=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & -۱\\ ۰ & ۳ & ۶\\ ۰ & ۰ & ۲\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & -۱\\ ۰ & ۳ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

۷) ماتریس پایین مثلثی: ماتریس مربعی که کلیه درایه‌های واقع در **بالای** قطر اصلی آن، صفر می باشد را ماتریس **پایین مثلثی** می‌گویند.

توجه: در ماتریس پایین مثلثی درایه‌های واقع بر **پایین** قطر اصلی نیز می‌توانند صفر باشند. مانند ماتریس های زیر:

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۳ & ۰ \\ ۱ & ۴ & ۸ \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۲ & -۲ \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

۸) ماتریس سطری(بردار سطری): ماتریسی که فقط دارای یک سطر باشد را ماتریس **سطری** یا **بردار سطری** می‌نامند.

به عنوان مثال، ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۴ \end{bmatrix}$ یک ماتریس سطری مرتبه‌ی ۳ یا یک ماتریس از مرتبه‌ی ۱×۳ است.

همچنین هر بردار $a=\begin{bmatrix} a_۱,a_۲,a_۳ \end{bmatrix}$ را می توان به صورت $\begin{bmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ \end{bmatrix}$ که یک بردار سطری (یا ماتریس سطری) است، نمایش داد.

۹) ماتریس ستونی (بردار ستونی): ماتریسی که فقط دارای یک ستون باشد را ماتریس **ستونی** یا **بردار ستونی** می نامند.

به عنوان مثال ماتریس روبرو یک ماتریس **ستونی** است: $A=\begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \\ -۱ \end{bmatrix}$

همچنین هر بردار $a=\begin{bmatrix} a_۱,a_۲,a_۳ \end{bmatrix}$ را می‌توان به صورت $\begin{bmatrix} a_۱ \\ a_۲ \\ a_۳ \end{bmatrix}$ که یک بردار ستونی یا (ماتریس ستونی) است، نمایش داد.

🔔 **نکته**: ماتریس 1×1 مانند $A=[a_{11}]$ بیانگر **یک عدد** می‌باشد که می‌توان گفت هم یک **ماتریس سطری** است (چون فقط یک سطر داره) و هم یک **ماتریس ستونی** (چون فقط یک ستون دارد).

۱۰) ماتریس قطر فرعی: هر ماتریس مربعی که همه درایه های غیرواقع بر قطر فرعی آن برابر **صفر** باشند را ماتریس **قطر فرعی** (ماتریس **فرعی**) می‌نامیم.

توجه: البته درایه‌های روی قطر فرعی نیز، می‌توانند صفر باشند، مانند ماتریس های زیر:

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۳ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۲ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

قطر فرعی قطر فرعی

🔔 **نکته**: همواره در یک ماتریس، مجموع درایه های قطر **اصلی** را **اثر ماتریس** می‌نامند و با $tr(A)$ نشان می‌دهند. بنابراین:

$$\boxed{tr(A)=a_{11}+a_{22}+.....+a_{nn}=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}}$$

در ضمن برای هر دو ماتریس دلخواه A و B می‌توان گفت: $\boxed{tr(AB)=tr(BA)}$

تست ۱) هرگاه B,A دو ماتریس و $AB=\begin{bmatrix} ۵ & ۸ \\ ۱۳ & ۲۰ \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس BA کدام ماتریس زیر می‌تواند باشد؟

۱) $\begin{bmatrix} ۱۹ & ۱۰ \\ ۱۱ & ۷ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۱۲ & ۱۱ \\ ۱۳ & ۲۰ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۱۲ & ۱۴ \\ ۱۵ & ۳ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۱۵ & ۲۲ \\ ۷ & ۱۰ \end{bmatrix}$

حل) با توجه به نکته گفته شده، برای هر دو ماتریس دلخواه B,A می‌توان گفت:

$tr(AB)=tr(BA)$ $(tr(AB))=۵+۲۰=۲۵$: مجموعه درایه‌های قطر اصلی

$$AB=\begin{bmatrix} ۵ & ۸ \\ ۱۳ & ۲۰ \end{bmatrix}$$

بنابراین گزینه ای به عنوان BA صحیح خواهد بود که مجموع درایه‌های روی قطر اصلی آن عدد ۲۵ شود.

$$\begin{bmatrix} ۱۵ & ۲۲ \\ ۷ & ۱۰ \end{bmatrix} \rightarrow tr(BA)) = ۱۵ + ۱۰ = ۲۵$$:مجموع داریه های قطر اصلی

گزینه ۴ صحیح است.

تساوی دو ماتریس:

دو ماتریس هم مرتبه‌ی $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ و $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ **مساوی** هستند، هرگاه داریه‌های نظیر به نظیر آن‌ها مساوی باشند. به عبارت دیگر به ازاء هر i و j، $a_{ij} = b_{ij}$ باشد.

تست۲) اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} mn & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۱ & m+n \end{bmatrix}$ برابر باشند، آن‌گاه حاصل $m \times n$ برابر است با :[1]

۱) ۳ ۲) ۷ ۳) ۲ ۴) ۴

حل) با توجه به اینکه دو ماتریس با هم **برابر**ند، پس درایه‌های نظیر به نظیر آن‌ها باید با هم برابر باشند، یعنی ←

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۱ & m+n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mn & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} m+n=3 \\ mn=1 \end{cases} \xrightarrow{m\times n} \begin{aligned} m^۲ + n^۲ &= (m+n)^۲ - ۲mn \\ m^۲ + n^۲ &= (۳)^۲ - ۲(۱) = ۹ - ۲ = ۷ \end{aligned}$$

گزینه ۲ صحیح است.

---

[1] مثال ۴- پناهی- صفحه ۵۶۶

قرینه‌ی ماتریس:

هرگاه عدد «۱-» را در یک ماتریس $A_{m\times n}$ **ضرب** کنیم، ماتریسی حاصل خواهد شد که هر درایه‌ی آن **قرینه‌ی** درایه‌های متناظرش در A می‌باشد. یعنی :

$$-۱ \times A_{m\times n} = [-a_{ij}] = -A_{m\times n}$$

جمع ماتریس‌ها:

هرگاه B,A دو ماتریس هم مرتبه باشند، آنگاه $A+B$ ماتریسی است که هر درایه‌ی آن از جمع درایه‌های متناظر B,A به دست می آید.

بدیهی است که مرتبه‌ی $A+B$ ، همان مرتبه‌ی B,A می‌باشد. اگر B,A هم مرتبه نباشند، جمع آنها تعریف نشده است، یعنی :

$$A_{m\times n}=[a_{ij}]\ ,\ \ B_{m\times n}=[b_{ij}]\ ,\ \ C_{m\times n}=[c_{ij}]$$
$$A+B=C\ \rightarrow c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

مثال) اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۲ & ۵ \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد، مطلوب است $A+A$ و $B+A$ ؟

حل)

$$A+A=\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳+۳ & ۴+۴ \\ ۱+۱ & ۲+۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۶ & ۸ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$$
$$B+A=\begin{bmatrix} -۲ & ۵ \\ c & d \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲+۳ & ۵+۴ \\ c+۱ & d+۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۹ \\ c+۱ & d+۲ \end{bmatrix}$$

دترمینان :

دترمینان، تابعی است از مجموعه ماتریس‌های مربع روی اعداد حقیقی که به هر $A=[a_{ij}]_{n\times m}$ طبق قوانین معین، عددی حقیقی را نسبت می دهد و آن را به صورت $|A|$ یا $det\ (A)$ *و به صورت زیر نشان می دهیم :*

$$det(A)=|A|=\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots\cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots\cdots & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n۱} & a_{n۲} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=|a_{ij}|$$

دترمینان ماتریس‌های ۱ × ۱:

ماتریس ۱×۱ چون فقط یک عنصر دارد، بنابراین دترمینانش با خود عضو برابر است، یعنی :

$$\boxed{A=[a]\rightarrow|A|=a}$$

دترمینان ماتریس‌های ۲ × ۲:

ماتریس $A_{۲\times۲}$ را بصورت $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در نظر بگیرید. دترمینان آن از تفاضل حاصلضرب اعداد قطر اصلی و فرعی بدست می‌آید یعنی:

$$\boxed{A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\rightarrow|A|=ad-bc}$$

نکته: به قطری که بر قطر اصلی عمود باشد، **قطر فرعی** گفته می‌شود.

مثال: دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۴ & ۶ \end{bmatrix}$ را بدست آورید؟

حل)

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۴ & ۶ \end{bmatrix}\rightarrow|A|=\overset{a}{(۱)}\overset{d}{(۶)}-\overset{b}{(۳)}\overset{c}{(۴)}=۶-۱۲=-۶\rightarrow|A|=-۶$$

تست۲۱) اگر دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} m-۱ & ۰ \\ ۱ & m+۱ \end{bmatrix}$ برابر ۳ باشد، m کدام است؟[۱]

۱) ۰ ۲) ± ۲ ۳) ± ۱ ۴) ± ۳

حل) گزینه ۲ صحیح است.

$$|A| = ۳ \to (m-۱)(m+۱) - (۰)(۱) = ۳ \to m^۲ - ۱ = ۳ \to m^۲ = ۴ \to \boxed{m = \pm ۲}$$

دترمینان ماتریس‌های ۳×۳ (روش <u>ساروس</u> که <u>فقط</u> برای ماتریس‌های ۳×۳ قابل استفاده است):

اگر A یک ماتریس <u>مربع</u> مرتبه ۳ باشد، برای <u>محاسبه دترمینان</u> A به روش ساروس از گام‌های زیر استفاده کنید: (۴ گام وجود دارد):

گام اول) <u>دو سطر اول</u> ماتریس A را <u>زیر سطر سوم</u> می‌نویسیم.

گام دوم) <u>سه قطر اصلی</u> ماتریس A را پیدا کرده و حاصلضرب هریک از این قطرها را بدست آورده و در انتها این ضرب‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

گام سوم) <u>سه قطر فرعی</u> ماتریس A را پیدا کرده و حاصلضرب هریک از این قطرها را بدست آورده و در انتها این ضرب‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

گام چهارم) حاصل نهایی <u>دترمینان</u> برابر است با:

$|A| =$ (مجموع حاصلضرب درایه‌های روی قطر اصلی) − (مجموع حاصلضرب درایه‌های روی قطر فرعی)

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \to |A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \overbrace{\left(\underbrace{aei+dhc+gbf}_{\text{گام دوم}}\right) - \underbrace{(ceg+fha+ibd)}_{\text{گام سوم}}}^{\text{گام چهارم}}$$

[۱] رنجبران، صفحه ۵۲۷

تست۲۲) حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} ۲ & ۳ & -۱ \\ ۴ & ۶ & ۳ \\ ۳ & -۴ & ۵ \end{vmatrix}$ کدام است؟ (مدیریت و حسابداری سراسری ۹۰)

۱) ۷۵ ۲) ۳۸ ۳) ۲۷ ۴) ۸۵

حل)

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۳ & -۱ \\ ۴ & ۶ & ۳ \\ ۳ & -۴ & ۵ \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{برای محاسبه دترمینان}]{\text{استفاده از روش ساروس}} \begin{matrix} ۲ & ۳ & -۱ \\ ۴ & ۶ & ۳ \end{matrix}$$

$$((۲\times۶\times۵)+(۴\times-۴\times-۱)+(۳\times۳\times۳))-((-۱\times۶\times۳)+(۳\times-۴\times۲)+(۵\times۳\times۴))$$
$$=((۶۰)+(۱۶)+(۲۷))-((-۱۸)+(-۲۴)+(۶۰))=(۱۰۳)-(۱۸)=۸۵$$

گزینه ۴ صحیح است.

تست۲۳) مقدار دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ -۱ & ۱ & ۲ \\ ۲ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ کدام است؟ (اقتصاد سراسری ۷۹)

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

$$|A| = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ -۱ & ۱ & ۲ \\ ۲ & -۱ & ۱ \end{vmatrix} \begin{matrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ -۱ & ۱ & ۲ \end{matrix}$$

$$|A| = \overbrace{((۱\times۱\times۱)+(-۱\times-۱\times-۱)+(۲\times۲\times۲))}^{\text{مجموع حاصلضرب درایه های قطر اصلی}} - \overbrace{((-۱\times۱\times۲)+(۲\times-۱\times۱)+(۱\times۲\times-۱))}^{\text{مجموع حاصلضرب درایه های روی قطر فرعی}}$$

$$=(۱+-۱+۸)-(-۲+-۲+-۲)=۸-(-۶)=۸+۶=۱۴$$

گزینه ۳ صحیح است.

دستگاه معادلات همگن خطی (قسمت سوال خیز و مهم):

اگر در دستگاه معادلات خطی، مقادیر ثابت (b) برابر **صفر** باشد، آن دستگاه را **همگن** گویند.

برای مثال، یک دستگاه همگن دو معادله دو مجهول، به صورت $\begin{cases} ax+by=۰ \\ a'x+b'y=۰ \end{cases}$ می باشد و

یا دستگاه همگن سه معادله سه مجهول به صورت $\begin{cases} ax+by+cz=۰ \\ a'x+b'y+c'z=۰ \\ a''x+b''y+c''z=۰ \end{cases}$ می باشد.

مثال) دستگاه های معادلات زیر همگن هستند:

$$\begin{cases} x_۱+۲x_۲+۳x_۳=۰ \\ ۵x_۱-۷x_۲=۰ \\ ۱۱x_۱-x_۲-x_۳=۰ \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x_۱-۲x_۲=۰ \\ x_۱+۷x_۲=۰ \end{cases}$$

***مبدأ** مختصات یک جواب بدیهی هر دستگاه **همگن** است. به عبارت دیگر، $X=O$ یک جواب هر دستگاه همگن $(AX=O)$ می باشد. بنابراین هر دستگاه **همگن**، حداقل یک جواب، که همان **مبدأ** مختصات باشد را دارد.

حال بحث در مورد جواب های یک دستگاه همگن می باشد که می توان گفت:

۱) شرط لازم و کافی برای اینکه یک دستگاه همگن، فقط جواب منحصر به فرد داشته باشد، آن است که حاصل دترمینان، ماتریس، **مخالف صفر** باشد، یعنی: $\boxed{|A| \neq ۰}$

۲)شرط لازم و کافی برای اینکه یک دستگاه همگن، دارای تعداد نامتناهی جواب غیرصفر باشد، آن است که حاصل دترمینان ماتریس، مساوی **صفر** باشد، یعنی: $\boxed{|A| = ۰}$

نکته: اگر در دستگاه معادلات خطی، مقادیر ثابت (b) **صفر نباشند**، آن دستگاه را **غیرهمگن** گوییم که در بحث بر سر جواب های دستگاه غیرهمگن می توان گفت:

۱) اگر $|A| \neq ۰$ باشد، دستگاه **غیرهمگن** جواب منحصر به فرد دارد.

۲) اگر $|A| = ۰$ باشد، دستگاه **غیرهمگن** فاقد جواب است.

تست۵۰) دستگاه معادلات $\begin{cases} x+۲y+z=۴ \\ x-y+۲z=-۳ \\ ۲x-y+kz=۲ \end{cases}$ به ازای کدام مقدار k فاقد جواب است؟

(مدیریت و حسابداری سراسری ۸۵)

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۷}{۳}$ ۳) $\frac{۱۱}{۳}$ ۴) $\frac{۷}{۴}$

حل) دستگاه **غیرهمگن**، زمانی فاقد جواب است که دترمینان ضرائب برابر **صفر** باشد، بنابراین :

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۲ \\ ۲ & -۱ & k \end{vmatrix} = ۰$$

$$\begin{matrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۲ \end{matrix}$$

$$\big((۱\times -۱\times k)+(۱\times -۱\times ۱)+(۲\times ۲\times ۲)\big)-\big((۱\times -۱\times ۲)+(۲\times -۱\times ۱)\big)+(k\times ۲\times ۱)=۰$$

$$\longrightarrow \big((-k)+(-۱)+(۸)\big)-\big((-۲)+(-۲)+(۲k)\big)=۰$$

$$\longrightarrow -k+۷-۲k+۴=۰ \rightarrow -۳k+۱۱=۰ \rightarrow ۱۱=۳k \rightarrow \boxed{k=\frac{۱۱}{۳}}$$

گزینه ۳ صحیح است.

تست۵۱) دستگاه معادلات خطی $\begin{cases} x+y+z=۰ \\ x-۲y+z=۰ \\ ۴x+y+kz=۰ \end{cases}$ به ازای کدام مقدار k ، جوابهای غیر بدیهی (غیر صفر) دارد؟ (اقتصاد سراسری ۷۵) (مدیریت سراسری ۷۵) (حسابداری آزاد ۸۹)

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

حل) دستگاه معادلات خطی **همگنِ** $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$ زمانی جوابهای غیرصفر دارد که $|A|=۰$ باشد، پس:

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۲ & ۱ \\ ۴ & ۱ & k \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۲ & ۱ \end{matrix}$$

$$\big((۱\times -۲\times k)+(۱\times ۱\times ۱)+(۴\times ۱\times ۱)\big)-\big((۱\times -۲\times ۴)+(۱\times ۱\times ۱)+(k\times ۱\times ۱)\big)=۰$$

$$\longrightarrow \big((-۲k)+(۱)+(۴)\big)-۸+(۱)+(k)=۰ \rightarrow (-۲k+۵)-(-۷+k)=۰$$

$$\longrightarrow -۲k+۵+۷-k=۰ \rightarrow ۱۲-۳k=۰ \rightarrow ۱۲=۳k \rightarrow \boxed{k=\frac{۱۲}{۳}=۴}$$

گزینه ۴ صحیح است.

فرمهای درجه دوم: [۱]

هر عبارت درجه دوم **همگن** به صورت زیر را یک **فرم** درجه دوم n متغیره می خوانند.

$$\boxed{q(x_۱,x_۲,\dots,x_n)=\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n}a_{ij}\,.\,x_i.x_j=X'AX}$$

که در آن $X'=(x_۱,x_۲,\dots,x_n)$ بوده و $A=[x_{ij}]$ است. ماتریس از درجه n است و A را ماتریس **فرم** درجه دوم گویند مثلاً به ازای $n=۲$ داریم:

$$\boxed{q(x_۱,x_۲)=a_{۱۱}x_۱^۲+a_{۱۲}x_۱x_۲+a_{۲۱}x_۲x_۱+a_{۲۲}x_۲^۲=[x_۱,x_۲]\begin{bmatrix}a_{۱۱} & a_{۱۲}\\ a_{۲۱} & a_{۲۲}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_۱\\ x_۲\end{bmatrix}=X'AX}$$

*ماتریس A را که ماتریس **فرم** درجه دوم است را در نظر بگیرید. بنا به تعریف، مرتبه A را مرتبه فرم درجه دوم می گویند. اگر $r(A)<n$ باشد، فرم درجه دوم را **منفرد** می نامند، به عبارت دیگر اگر ماتریس A **منفرد** باشد فرم درجه دوم را نیز **منفرد** گویند وگرنه آن را **غیرمنفرد** گویند.

[۱] رنجبران صفحه ۵۵۸

سوالات

آزمون های کارشناسی ارشد سراسری و آزاد

ماتریس و دستگاه ها

۳ نوع حل (سنتی، نکته ای، تکنیکی)

آزمون های کارشناسی ارشد سراسری و آزاد

ماتریس و دستگاه ها

۳ نوع حل (سنتی، نکته ای، تکنیکی)

۳۳۲. **گزینه ۲ صحیح است.**

حل : ماتریس بالا مثلثی است بنابراین دترمینان ماتریس A برابر حاصلضرب درایه های روی قطر اصلی است یعنی می توان گفت : $|A| = ۲ \times ۵ \times -۱ = -۱۰$

$$(cof(A))' = |A| \times A^{-۱} \quad \rightarrow \quad (cof(A))' = -۱۰A^{-۱}$$

$$\xrightarrow{\text{کو فاکتور}} \text{مقادیر ویژه ماتریس} = -۱۰(\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۵}, -۱) = -۵, -۲, ۱۰$$

---

۳۳۳. **گزینه ۱ صحیح است.**

حل : یادآوری: (قضیه کیلی همیلتون) هر ماتریس در معادله مفسرش صدق می کند.

$$A^۲ - ۳A + ۵ = ۰ \quad \rightarrow \quad A^۲ - ۳A = -۵ \quad \rightarrow \quad A(A - ۳I) = -۵$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین تساوی را در } A^{-۱} \text{ ضرب میکنیم}} A^{-۱}[A(A - ۳I)] = -۵A^{-۱} \quad \rightarrow \quad -۵A^{-۱} = A - ۳I$$

$$\rightarrow A^{-۱} = \frac{A - ۳I}{-۵} = \frac{۳}{۵}I - \frac{۱}{۵}A$$