

۳۱- مقدار حد و دنباله ی  $\left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{i}}{n^{\frac{3}{2}}} \right\}$  در صورت وجود، برابر کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{6}$  (۲)  $\cdot$  (۳)  $\frac{2}{3}$  (۴) حد وجود ندارد

گزینه ۳ (  $\frac{2}{3}$  )

کتاب ریاضیات عمومی آقاسی جلد اول صفحه ۲۸۲

بر طبق رابطه ی  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$  عمل می کنیم بصورتی که ابتدا عبارت سیگما را ساده سازی می

کنیم تا به صورت  $\frac{1}{n} \sum$  درآید پس داریم؛

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{i}}{n^{\frac{3}{2}} - 1} \Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{i}}{n^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{i}{n}}$$

حاصل عبارت بدست آمده داخل سیگما  $\left(\frac{\sqrt{i}}{\sqrt{n}}\right)$  را به صورت  $f(x)$  درآورده و انتگرالی حل می کنیم یعنی هر جا  $\frac{i}{n}$  دیدیم جای مقدار آن  $x$  قرار می دهیم پس بنا به رابطه داریم:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{n}} = \int_0^1 \sqrt{x} dx \Rightarrow \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

• مشابه این تست در آزمون سال ۸۳ (تست ۴۶)، ۸۴ (تست ۴۱) و ۸۸ (تست ۴۴) آمده است

۳۲- شعاع همگرایی و بازه همگرایی سری  $\sum_{k=1}^n (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^n}{4^{\frac{n}{\sqrt{n}}}}$  برابر کدام است؟

(۱) و (۱۳) (۲) و (۱۳) (۳) و (۶و۲-) (۴) و (۶و۲-)

گزینه ۲: (۱۳) و (۱)

کتاب ریاضیات عمومی آقاسی جلد اول صفحه ۵۲۰

توجه می کنیم که سؤال دو خواسته از ما دارد یکی شعاع همگرایی و دیگری بازه ی همگرایی، همانطور که می بینیم عبارت سیگما از دو قسمت تشکیل شده یک قسمت که برحسب  $n$  می باشد و قسمت دیگر که برحسب  $x$  نوشته شده که این دو راه از هم جدا می کنیم.

$$\frac{(-1)^{n-1}}{4^{\frac{n}{\sqrt{n}}}} \text{ (عبارت برحسب } n \text{)}$$

$$(x-2)^n \text{ (عبارت برحسب } x \text{)}$$

حال طبق تعاریف می دانیم برای بدست آوردن شعاع همگرایی می بایست از رابطه ی  $\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$  استفاده کنیم توجه کنیم

که برای این نوع سؤالات عبارت  $a_n$  و  $a_{n+1}$  را از عبارت برحسب  $n$   $\left( \frac{(-1)^{n-1}}{4^{\frac{n}{\sqrt{n}}}} \right)$  بدست می آوریم بدین صورت داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n}{4^{\frac{n+1}{\sqrt{n+1}}}}}{\frac{(-1)^{n-1}}{4^{\frac{n}{\sqrt{n}}}}} \right| \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n}{4^{\frac{n+1}{\sqrt{n+1}}}}}{\frac{(-1)^n \times (-1)^{-1}}{4^{\frac{n}{\sqrt{n}}}}} \right| \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n}{(-1)^{n-1}} \times \frac{4^{\frac{n}{\sqrt{n}}}}{4^{\frac{n+1}{\sqrt{n+1}}}} \right| \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1) \times \sqrt[n]{n}}{\sqrt[n+1]{n+1}} \right| \end{aligned}$$

حال به قسمت دوم سؤال باز می گردیم. برای بدست آوردن بازه همگرایی می بایست از عبارت برحسب  $x$  یعنی  $(x-2)^n$  استفاده کنیم این عبارت نشان دهنده این است که باید شعاع همگرایی را حول نقطه ۲ بدست آوریم و طبق رابطه  $|x - x_0| < R$  بازه ی همگرایی را به صورت زیر برحسب  $x$  بدست می آوریم:

$$|x - 2| < 1 \Rightarrow -1 < x - 2 < 1 \Rightarrow 1 < x < 3$$

حال به منظور اطمینان خود نقطه  $x = 1$  و  $x = 3$  را بررسی می کنیم که آیا سری در این نقاط همگراست یا اصلاً واگراست.

$$x = 1 \xrightarrow{\text{جای گزاری در عبارت}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (-1)^n}{4^{\sqrt[n]{n}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{4^{\sqrt[n]{n}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{4^{\sqrt[n]{n}}}$$

پس چون  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  برابر صفر نشد پس  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{4^{\sqrt[n]{n}}}$

حال همگرایی را بررسی سری در  $x=1$  و اگر است و جذر بازه همگرایی  $n \rightarrow \infty$  می کنیم نیست

$$x = 3 \xrightarrow{\text{جای گزاری در عبارت}} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{4^{\sqrt[n]{n}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4^{\sqrt[n]{n}}} =$$

پس سری در نقطه  $x=3$  نیز واگراست و جذر بازه همگرایی نیست.

بنابراین شعاع همگرایی برابر ۱ و بازه همگرایی برابر  $(۱, ۳)$  است.

۳۳- تعریف می کنیم  $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$  ، به ازای  $x$  عدد صحیح نامنفی، در این صورت  $I_n = k I_{n-2}$  که در آن  $n > 2$  ، ضریب ثابت  $k$  (وابسته به  $n$ ) کدام است؟

(۴)  $\frac{n-1}{n+2}$

(۳)  $\frac{n-1}{n+1}$

(۲)  $\frac{n}{n+2}$

(۱)  $\frac{n}{n+3}$

گزینه ۴:  $\frac{n-1}{n+2}$

کتاب ریاضیات عمومی آقاسی جلد اول صفحه ۲۶۰

نکته راه حل سؤال این است که باید از  $I_n$  انتگرال بگیریم و ببینیم چه عبارتی بر حسب  $I_{n-2}$  بدست می آیند و قطعاً بین  $I_n$  و  $I_{n-2}$  ضربی وجود خواهد داشت که طرح آن از  $k$  نامیده

حال شروع به حل سؤال می کنیم برای انتگرال گیری از  $I_n$  نیاز به یک ابتکار داریم بدین صورت که  $I_n$  را به صورت زیر بنویسیم:

$$I_n = \int_0^1 x^{n-1} \times \sqrt{1-x^2} dx$$

که همان عبارت  $I_n$  است حال به دو عبارت  $x^{n-1}$  و  $x\sqrt{1-x^2}$  دست پیدا می کنیم که طبیعتاً از طریق روش جزء به جزء قادر به ایجاد  $I_{n-2}$  به کمک این دو عبارت خواهیم بود.  $x^{n-1}$  را  $u$  می نامیم و  $x\sqrt{1-x^2}$  را  $v$  حال از روش جزء به جزء خواهیم داشت:

|                                          |      |           |
|------------------------------------------|------|-----------|
| $\Rightarrow u \int v' - \int u' \int v$ | مشتق | انتگرال   |
| $u$                                      |      | $v$       |
| $u'$                                     |      | $\int v'$ |

| مشتق           | انتگرال                             |
|----------------|-------------------------------------|
| $x^{n-1}$      | $x\sqrt{1-x^2}$                     |
| $(n-1)x^{n-2}$ | $-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$ |

$$\Rightarrow \left[ x^{n-1} \times \left\{ -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \right\} \right]_0^1 - \left[ \int_0^1 (n-1)x^{n-2} \times -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx \right] 0$$

$$-\frac{n-1}{3} \int_0^1 x^{n-1} \sqrt{1-x^2} dx - \frac{n-1}{3} \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx$$

$$I_n = 0 + \frac{n-1}{3} \int_0^1 x^{n-2} \times 1 \times \sqrt{1-x^2} dx - \frac{n-1}{3} \int_0^1 x^{n-2} \times x \times \sqrt{1-x^2} dx$$

$$I_n = \frac{n-1}{3} \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1-x^2} dx - \frac{n-1}{3} \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$$

$$I_n + \frac{n-1}{3} I_n = \frac{n-1}{3} I_{n-2} \Rightarrow \left( \frac{n+2}{3} \right) I_n = \frac{n-1}{3} I_{n-2}$$

$$I_n = \frac{n-1}{n+2} I_{n-2} \Rightarrow k = \frac{n-1}{n+2}$$

• مشابه این تست در سال ۸۶ (تست ۳۱) آمده است.

۳۴- در مورد توابع هزلولی گون (هزلولی) گزینه صحیح کدام است؟

$$\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \quad (۱)$$

$$\sinh(a+b) = \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b$$

$$\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \quad (۲)$$

$$\sinh(a+b) = \sinh a \cosh b - \cosh a \sinh b$$

$$\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \quad (۳)$$

$$\sinh(a+b) = \sinh a \cosh b - \cosh a \sinh b$$

$$\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \quad (۴)$$

$$\sinh(a+b) = \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b$$

$$\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \quad \text{گزینه ۴:}$$

$$\sinh(a+b) = \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b$$

کتاب ریاضیات عمومی آقاسی جلد اول صفحه ۳۴

بنا به رابطه توابع هیپربولیک داریم

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$

۳۵- مساحت قسمت هایی از کرهای  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  که توسط استوانه ای  $x^2 + y^2 = ax$  بریده شده، برابر کدام است؟

- (۱)  $2a(\pi - 2)$  (۲)  $2a^2(\pi - 2)$  (۳)  $a^2(\pi - 2)$  (۴)  $a(\pi - 2)$

گزینه ۳:  $a^2(\pi - 2)$

کتاب ریاضیات عمومی آقاسی جلد دوم صفحه ۴۰۱

برای محاسبه انتگرال سطح باید چند مرحله را طی کنیم:

۱- باید سطح موردنظر را مشخص کرده و آن را در یکی از صفحات مختصات تصویر کنیم

۲- باید  $d(s)$  را محاسبه کنید که در اینجا داریم  $g(x)$  برابر حجمی است که باید مساحت آن را محاسبه کنیم و برای محاسبه  $d(s)$

داریم.  $d(s) = \frac{|\nabla g|}{|\nabla g \cdot k|} dx dy$  مثلاً اینجا برای کره داریم  $v(g) = 2x, 2y, 2z$  و  $\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (2z)^2} =$

$|\nabla g|$  و  $|\nabla g \cdot k|$  برابر است با  $k = 2z$  .  $(2x, 2y, 2z) \cdot k = 2z$

و با جایگذاری در رابطه  $d(s)$  برابر است با  $d(s) = \frac{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{2z} = \frac{2a}{2z} = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$

۳- و در نهایت حاصل به دست آمده را روی ناحیه ای که از مرحله ۱ بدست آمد انتگرال دوگانه می گیریم  $\int ds dA$

$$d(s) = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \Rightarrow \int_1 ds dA \Rightarrow \int \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy$$

❁ توجه کنیم  $dA$  برابر  $dx dy$  است چون عبارت بر حسب  $y, x$  بدست آمد و  $k$  در  $ds$  اثر کرد. حال حدود ناحیه موردنظر را بدست می

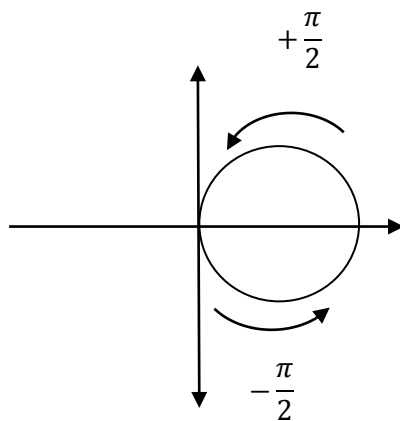
آوریم همانطور که می بینیم به دلیل وجود عبارت  $x^2 + y^2$  می توانیم  $\iint$  ناحیه را بر حسب مختصات قطبی بنویسیم.

برای استوانه داریم  $x^2 + y^2 = ax$  همانطور که می دانیم  $x^2 + y^2 = r^2$  و  $x = r \cos \theta$  پس می نویسیم

$$x = r \cos \theta \Rightarrow r = a \cos \theta$$

باتوجه به شکل دایره ی مسطح داریم  $r = 0$  تا  $r = a \cos \theta$   $0 \leq r \leq a \cos \theta$

همچنین برای تعیین حدود زاویه انتگرال به کمک شکل تصویر شده استوانه داریم:



همینطور که می بینیم زاویه از  $-\frac{\pi}{2}$  است تا  $+\frac{\pi}{2}$  و حال با جایگذاری تمام مقادیر در انتگرال:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \cos \theta} \frac{a \cos \theta}{\sqrt{a^2 - r^2}} r dr d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a \left[ -\sqrt{a^2 - r^2} \right]_0^{a \cos \theta} d\theta$$

$$\Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[ a \sqrt{a^2 - a^2 \cos^2 \theta} \right] - \sqrt{a^2 - 0} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -a x [a \sin \theta - a] d\theta$$

$$\Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2 (1 - \sin \theta)$$

$$\Rightarrow a^2 (\theta + \cos \theta) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = a^2 \frac{\pi}{2} + 0 - \left( \frac{-a^2 \pi}{2} \right) - 0 = 2 \frac{a^2 \pi}{2}$$

۳۶- تابع  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x-y)}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases}$  مفروض است. کدام یک از گزینه های زیر در مورد این تابع صحیح است؟

(۱) تابع در  $(0, 0)$  پیوسته است اما مشتق پذیر نیست.

(۲) تابع در  $(0, 0)$  پیوسته نیست و مشتق پذیر نیست.

(۳) تابع در  $(0, 0)$  پیوسته است و مشتق پذیر هم هست.

(۴) مشتق جهتی تابع  $f$  در مبدأ و در امتداد بردار یکه  $u = (u_1, u_2)$  صفر است.

گزینه ۱: تابع در  $(0, 0)$  پیوسته است اما مشتق پذیر نیست

کتاب ریاضیات عمومی آقاسی جلد اول صفحه ۱۷۰ و ۱۶۲

ابتدا می بایست پیوستگی سوال را بررسی کنیم بدین صورت که به جای مقدار  $x$  و  $y$  مقادیر قطبی آنها یعنی  $x = r\cos\theta$  و  $y = r\sin\theta$  را قرار می دهیم سپس حد عبارت بدست آمده وقتی  $r$  به سمت صفر میل کند را بدست می آوریم. اگر مقدار برابر صفر می شد که پیوسته است و گرنه پیوسته نیست.

به طور ساده برای حل اینگونه سوالات ابتدا به جای  $x$  و  $y$  و  $r\cos\theta$  و  $r\sin\theta$  قرار می دهیم اگر عبارت بدست آمده فقط به  $\theta$  وابسته بود یعنی با ازای  $\theta$  ها مختلف مقادیر مختلف داشت جواب پیوسته نیست و گرنه پیوسته است.

حال از این روش استفاده می کنیم:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(xy)(x-y)}{x^2+y^2} \xrightarrow{x=r\cos\theta} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r\sin\theta r\cos\theta(r\cos\theta - r\sin\theta)}{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos\theta \sin\theta (\cos\theta - \sin\theta)}{r^2} = r\cos\theta \sin\theta (\cos\theta \sin\theta) = 0$$

همانطور که می بینیم جواب به ازای  $r = 0$  به  $\theta$  وابسته نیست پس حد برابر صفر است و تابع پیوسته می باشد. حال به سراغ بررسی مشتق پذیری می رویم.

حال برای بررسی مشتق پذیری مشتقات جزئی یعنی  $f(x)$  مشتق تابع بر حسب  $x$  و  $f_y$  مشتق تابع بر حسب  $y$  از تابع مشتق می گیریم:

$$\frac{df}{dx} = \frac{y(x-y) + xy(x^2+y^2) - 2x^2y(x-y)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\lim \frac{df}{dx} = \lim \frac{(2xy - y^2)(x^2 + y^2) - 2x^2y(x - y)}{(x^2 + y^2)^2}$$

حال مقادیر قطبی را جایگزین می کنیم.

$$\lim \frac{(2r^2 \cos \theta \sin \theta - r^2 \sin^2 \theta)r^2 - 2r^3 \cos^2 \theta \sin \theta (r \cos \theta - r \sin \theta)}{r^4}$$

$$\lim \frac{df}{dx} = r^4 \frac{[(2 \cos \theta \sin \theta - \sin^2 \theta)r^2 - 2 \cos^2 \theta \sin \theta (\cos \theta - r \sin \theta)]}{r^4}$$

می بینیم مقادیر  $f(x)$  به  $\theta$  های مختلف وابسته است پس مشتق جزئی ندارد بنابراین تابع در کل مشتق پذیر نیست.

• مشابه این تست در سال ۹۱ (تست ۴۱) آمده است.

۳۷- تابع برداری  $\hat{r}(t) = (Lnt)\hat{i} + (Lnt)\hat{j} + \frac{t}{2}\hat{k}$  به ازای  $t > 0$  مفروض است، بردارهای قائم دوم یکه  $\hat{B}(t)$  و مماس یکه  $T(t)$  و کمیت خمیدگی (انحنای)  $k(t)$  کدام است.

$$B = \frac{\hat{t}i - \sqrt{2}\hat{t}j + \hat{k}}{t^2+1}, \quad T(t) = \frac{i + \sqrt{2}\hat{t}j + \hat{t}k}{t^2+1}, \quad k(t) = \frac{\sqrt{2t}}{(t^2+1)^2} \quad (۱)$$

$$B = \frac{\hat{t}i + \sqrt{2}\hat{t}j + \hat{k}}{t^2+1}, \quad T(t) = \frac{i + \sqrt{2}\hat{t}j + \hat{t}k}{t^2+1}, \quad k(t) = \frac{\sqrt{2t}}{(t^2+1)^2} \quad (۲)$$

$$B = \frac{\hat{t}i - \sqrt{2}\hat{t}j + \hat{k}}{t^2+1}, \quad T(t) = \frac{i - \sqrt{2}\hat{t}j + \hat{t}k}{t^2+1}, \quad k(t) = \frac{\sqrt{2t}}{(t^2+1)^2} \quad (۳)$$

$$B = \frac{\hat{t}(t) - \sqrt{2}\hat{t}j + k}{t^2+1}, \quad T(t) = \frac{i + \sqrt{2}\hat{t}j + \hat{t}k}{t^2+1}, \quad k(t) = \frac{\sqrt{2t}}{(t^2+1)^2} \quad (۴)$$

$$B = \frac{\hat{t}i - \sqrt{2}\hat{t}j + \hat{k}}{t^2+1}, \quad T(t) = \frac{i + \sqrt{2}\hat{t}j + \hat{t}k}{t^2+1}, \quad k(t) = \frac{\sqrt{2t}}{(t^2+1)^2} \quad (\text{گزینه ۱})$$

کتاب ریاضی ۲ آقاسی صفحات ۱۵، ۱۶، ۱۹

با دانستن این نکته که  $\vec{T}$  و  $\vec{B}$  به هم عمودند و می دانیم که ضرب داخلی دو بردار عمود صفر است ( $\vec{T} \cdot \vec{B} = 0$ ) بنابراین با ضرب داخلی مولفه به

مولفه چهار گزینه با زمانی کم می توان به راحتی بفهمیم جواب یا گزینه ۱ است یا ۴ و تفاوت در مقدار  $k(t)$  است مقدار  $k(t)$  نیز به کمک رابطه

$$k(t) = \frac{|\vec{r}'(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3}$$

قابل محاسبه است، داریم:

$$\vec{r} = Lnt \hat{i} + \sqrt{2}t \hat{j} + \frac{t^2}{2} \hat{k}$$

$$\vec{r}' = \frac{1}{t} \hat{i} + \sqrt{2} \hat{j} + t \hat{k}$$

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{1}{t^2} \hat{i} + 0 + \hat{k}$$

$$\dot{r}(t) \times \dot{r}(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{1}{t} & \sqrt{2} & t \\ -\frac{1}{t} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \left( \sqrt{2}, -\frac{2}{t}, \frac{+\sqrt{2}}{t^2} \right)$$

$$|\dot{r}(t) \times \dot{r}(t)| = \sqrt{2 + \frac{4}{t^2} + \frac{2}{t^4}} = \sqrt{2} \times \sqrt{1 + \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^4}} = \sqrt{2} \times \sqrt{\left(\frac{1}{t^2} + 1\right)^2} = \frac{\sqrt{2}(t^2 + 1)}{t^2}$$

$$|r(t)| = \sqrt{\frac{2}{t^2} + 2 + t^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{t} + t\right)^2} = \left(\frac{1}{t} + t\right) = \frac{t^2 + 1}{t}$$

$$k(t) = \frac{|\dot{r}(t) \times \dot{r}(t)|}{|\dot{r}(t)|} = \frac{\sqrt{2} \frac{(t^2 + 1)}{t^2}}{\left|\frac{t^2 + 1}{t}\right|^3} = \frac{\sqrt{2}t}{(t^2 + 1)^2}$$

پس واضحاً جواب گزینه ۱ است.

برای تشریح بیشتر جواب مقدار مقدار  $\vec{T}(t)$  و مقدار  $\vec{B}(t)$  را نیز بدست می آوریم:

$$T = \frac{\frac{dr(t)}{dt}}{\left|\frac{dr(t)}{dt}\right|}, \quad B = \frac{r(t) \times \dot{r}(t)}{|r(t) \times \dot{r}(t)|} = \frac{r \times a}{|r \times a|}$$

تمام مقادیر را قبلاً بدست آوردیم با جایگذاری داریم:

$$T = \frac{\frac{1}{t}i + \sqrt{2}j + tk}{\frac{t^2 + 1}{t}} = \frac{i + \sqrt{2}tj + \hat{t}k}{t^2 + 1}$$

$$B = \frac{\sqrt{2}i - \frac{2}{t}j + \frac{\sqrt{2}}{t^2}k}{\frac{\sqrt{2}(t^2 + 1)}{t^2}} = \frac{t^2i - \sqrt{2}tj + k}{t^2 + 1}$$

۳۸- مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع  $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$  کدام است؟

$$(۱) \quad \frac{1}{2}e, -\frac{1}{2}e^{-1} \quad (۲) \quad -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \quad (۳) \quad -\frac{1}{2}e^{-1}, \frac{1}{2}e^{-1} \quad (۴) \quad -\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}$$

گزینه ۳:  $-\frac{1}{2}e^{-1}, \frac{1}{2}e^{-1}$

کتاب ریاضی ۱ اقامی صفحه ۱۷۲

همینطور که مشاهده می کنیم عبارت بر حسب  $x$  و  $y$  می باشد و می دانیم برای بدست آوردن مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق می بایست از تابع مشتق بگیریم برای اینکار یک بار از تابع بر حسب  $x$  و بار دیگر بر حسب  $y$  مشتق می گیریم.

$$f_x = ye^{-x^2-y^2} - 2x^2ye^{-x^2-y^2} \Rightarrow f_x = y(1 - 2x^2)e^{-x^2-y^2} \Rightarrow y(1 - 2x^2) = 0$$

$$y = 0, \quad x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f_y = x(1 - 2y^2)e^{-x^2-y^2} = 0 \Rightarrow x(1 - 2y^2) = 0 \Rightarrow x = 0, \quad y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

حال می بینیم سه مقدار برای  $x$  و سه مقدار برای  $y$  بدست می آید که می توان از آنها به نقاط زیر اشاره کرد:

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \text{ و } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \text{ و } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ و } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ و } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ و } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ و } \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ و } \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}e^{-1}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times e^{-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2}e^{-1}$$

$$f\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = 0$$

پس می بینیم  $\frac{1}{2}e^{-1}$  ماکزیمم مطلق و  $-\frac{1}{2}e^{-1}$  مینیمم مطلق است.

۳۹) حد جواب معادله دیفرانسیل  $ty' + (t+1)y = 2te^{-t}$  با شرط کمکی  $y(1) = a$  در نقطه  $t = 0$  برابر با صفر است. هرگاه  $a$  برابر باشد با:

- (۱)  $-\frac{1}{e}$  (۲)  $-e$  (۳)  $\frac{1}{e}$  (۴)  $e$

گزینه ۳:  $\frac{1}{e}$

کتاب معادلات دیفرانسیل گاج\_ صفحه ۳۰

معادله مرتبه اول خطی است.

برای حل معادله مرتبه اول خطی  $y' + p(x)y = R(x)$  داشتیم:

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \left\{ \int R(x)\mu(x)dx + c \right\}$$

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

ابتدا معادله را به شکل استاندارد تبدیل می کنیم:

$$ty' + (t+1)y = 2te^{-t} \Rightarrow y' + \left(1 + \frac{1}{t}\right)y = 2e^{-t}$$

بنابه رابطه نیاز به  $\mu(x)$  داریم

$$\mu(x) = e^{\int \left(1 + \frac{1}{t}\right)dx} = e^{t+Lnt} = e^t \times e^{Lnt} = e^t \times t \cdot te^t$$

$$y(t) = \frac{1}{te^t} \left\{ \int te^t \times 2e^{-t}dt + c \right\} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{te^t} \left\{ \int 2tdt + c \right\}$$

برای بدست آوردن مقدار  $C$  از صورت سوال استفاده می کنیم که گفته در  $t=0$  برابر صفر است.

$$te^t y(t) = t^2 + C \Rightarrow$$

$$0 = 0 + C \Rightarrow C = 0$$

پس در نهایت داریم  $y(t) = te^{-t} \Leftarrow te^t y(t) = t^2$

با کمک رابطه  $y(1) = a$  داریم:  $a = 1 \times e^{-1} \Rightarrow a = \frac{1}{e}$

۴۰. مسأله مقدار اولیه ی  $(ye^{xy}\cos 2x - 2e^{xy}\sin 2x + 2x)dx + (2e^{xy}\cos 2x - 3)dy = 0$  مفروض است، با شرط

اولیه ی اینکه نمودار آن از مبدأ می گذرد. اگر نمودار مذکور از نقطه  $(\frac{\pi}{4}, y_*)$  نیز عبور کند، مقدار  $y_*$  کدام است؟

$$\frac{\pi^2}{48} + \frac{1}{3} \quad (۴) \quad \frac{\pi^2}{48} - \frac{2}{3} \quad (۳) \quad \frac{\pi^2}{96} - \frac{1}{3} \quad (۲) \quad \frac{\pi^2}{48} - \frac{1}{3} \quad (۱)$$

گزینه ۱:  $\frac{\pi^2}{48} - \frac{1}{3}$

کتاب معادلات دیفرانسیل گاج صفحه ۱۹

خب از شکل سؤال پیداست که معادله مرکب است و تفکیک پذیر نیست. پس شرط کامل بودن را امتحان می کنیم به یاد داریم، شرط کامل بودن به صورت زیر بود:

$$p dx + Q dy = 0 \Rightarrow Q_x - p_y = 0 \quad \text{معادله همگن است}$$

پس برای مثال داریم:

$$P_y = e^{xy}\cos 2x + yx2e^{xy}\cos 2x - 2xe^{xy}\sin 2x$$

$$Q_x = e^{xy}\cos 2x + yx2e^{xy}\cos 2x - 2xe^{xy}\sin 2x$$

پس معادله کامل است و برای حل معادله کامل داشتیم:

$$\frac{du}{dx} = P(x) \rightarrow \int P dx = u$$

$$\frac{dv}{dy} = Q(y) \rightarrow \int Q dy = v$$

و از اشتراک جملات  $u$  و  $v$  جواب معادله بدست می آید.

$$\int [ye^{xy}\cos 2x - 2e^{xy}\sin 2x + 2x] dx = x^2$$

$$\int [xe^{xy}\cos 2x - 3] dy = e^{xy}\cos 2x - 3y$$

$$\Rightarrow C = x^2 + e^{xy}\cos 2x - 3y$$

حال با جایگذاری مقادیر  $x = 0$  و  $y = 0$  که در صورت سوال داده شده مقدار  $C = +1$  بدست می آید و حل معادله به صورت روبرو است:

$$x^2 + e^{xy}\cos 2x - 3y = 1$$

حال با جای گذاری مقدار  $x = \frac{\pi}{4}$  مقدار  $y_*$  را بدست می آورند:

$$\frac{\pi^2}{16} - 3y_* = 1 \Rightarrow y_* = \frac{-1}{3} + \frac{\pi^2}{48}$$

alm group

(۴) جواب کلی معادله ی دیفرانسیل  $xy'' + (1 - 2x)y' + (x - 1)y = 0$  کدام است؟

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x \ln x \quad (۳) \quad y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \ln x \quad (۱)$$

$$y = C_1 e^x + C_2 e^x \ln x \quad (۴) \quad y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x} \ln x \quad (۳)$$

گزینه ۴:  $y = C_1 e^x + C_2 e^x \ln x$

کتاب معادلات دیفرانسیل گاج صفحه ۱۰۰

معادله درجه دوست ولی ضرایب ثابت نیستند و از روش های معمول معادله درجه استفاده نمی توان کرد. در اینجا نیاز به یک ابتکار داریم بدین صورت که به کمک گزینه ها یک جواب معادله را حدس می زنیم این جواب  $e^x$  است سپس به کمک فرمول آبل جواب دیگر را بدست می آوریم و

در نهایت جواب به صورت  $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$  به دست می آید.

فرمول آبل عبارت است از:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P(x) dx}}{y_1^2} dx$$

ابتدا معادله را استاندارد می کنیم:

$$xy'' + (1 - 2x)y' + (x - 1)y = 0 \Rightarrow y'' + \frac{(1 + 2x)}{x} y' + \frac{(x - 1)}{x} y = 0$$

حال مقدار  $y_1 = e^x$  را در معادله آبل جای گذاری می کنیم.

$$y_2 = e^x \int \frac{1}{e^{2x}} e^{-\int (\frac{1}{x} - 2) dx} dx = e^x \int e^{-2x} e^{-\ln x + 2x} dx \Rightarrow y_2 = e^x \int \frac{dx}{x} = e^x \ln x$$

پس جواب دیگر به صورت  $e^x \ln x$  نوشته می شود.

و در نهایت داریم:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^x \ln x$$

(۴۲) کدام گزینه جواب خصوصی معادله ی دیفرانسیل زیر نیست؟

$$x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} + x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2y = 2x^4$$

$$y_p = \frac{1}{15}x^4 + x^{-2} \quad (۲) \quad y_p = \frac{1}{15}x^4 + 2x^{-1} \quad (۱)$$

$$y_p = \frac{1}{15}x^4 + 7x^2 \quad (۴) \quad y_p = \frac{1}{15}x^4 + 4x \quad (۳)$$

$$\text{گزینه ۲: } y_p = \frac{1}{15}x^4 + x^{-2}$$

همینطور که مشاهده می کنیم معادله مرتبه ۳ است و حل معادله اصلاً ساده نیست ما راه حل بهتری را استفاده می کنیم با توجه به گزینه ها مطمئن می شویم که یکی از جواب های سوال  $\frac{x^4}{15}$  است طبیعتاً با امتحان جواب دیگر در معادله باید در سمت چپ صدق کند (سمت چپ معادله برابر صفر شود) و با امتحان گزینه ها می فهمیم گزینه ی ۲ یعنی جواب  $x^{-2}$  جزء جواب های معادله نیست توجه می کنیم در غیراینصورت باید از حل معادله ی لژ انداز درجه ۳ استفاده می کردیم که بسیار مشکل است.

(۴۳) مسأله ی مقدار اولیه ی دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر مطرح است:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 - 2x_2 \\ x'_2 = 3x_1 - 4x_2 \end{cases} \quad x_1(0) = -1, \quad x_2(0) = 2$$

$$\begin{cases} x_1(t) = -7e^{-t} + 6e^{-2t} \\ x_2(t) = -7e^{-t} + 9e^{-2t} \end{cases} \quad (۲) \quad \begin{cases} x_1(t) = -5e^{-t} + 4e^{-2t} \\ x_2(t) = -7e^{-t} + 9e^{-2t} \end{cases} \quad (۱)$$

$$\begin{cases} x_1(t) = -5e^{-t} + 4e^{-2t} \\ x_2(t) = -5e^{-t} + 7e^{-2t} \end{cases} \quad (۴) \quad \begin{cases} x_1(t) = -7e^{-t} + 6e^{-2t} \\ x_2(t) = -5e^{-t} + 7e^{-2t} \end{cases} \quad (۳)$$

گزینه ۲:  $\begin{cases} x_1(t) = -7e^{-t} + 6e^{-2t} \\ x_2(t) = -7e^{-t} + 9e^{-2t} \end{cases}$

کتاب معادلات دیفرانسیل گاج فصل ۵ صفحه ۲۳۸

برای حل دستگاه و ساده سازی عبارتها از لاپلاس استفاده می کنیم و جای عبارت  $x'$  عبارت  $Sf(S) - f(0)$  قرار می دهیم و معادله را به

صورت زیر می نویسیم:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x'_1 = x_1 - 2x_2 \\ x'_2 = 3x_1 - 4x_2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{L}(x'_1) = \mathcal{L}(x_1) - 2\mathcal{L}(x_2) \\ \mathcal{L}(x'_2) = 3\mathcal{L}(x_1) - 4\mathcal{L}(x_2) \end{cases} \\ \xrightarrow{\mathcal{L}x' = Sf(S) - f(0)} &\begin{cases} 5\mathcal{L}(x'_1) - x_1(0) = \mathcal{L}(x_1) - 2\mathcal{L}(x_2) & x_1(0) = -1 \\ 5\mathcal{L}(x'_2) - x_2(0) = 3\mathcal{L}(x_1) - 4\mathcal{L}(x_2) & x_2(0) = 2 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} (5-1)\mathcal{L}(x_1) - 2\mathcal{L}(x_2) = -1 \\ (5+4)\mathcal{L}(x_2) - 3\mathcal{L}(x_1) = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

حال دستور کرامر در حل معادله به ما کمک می کند:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5+4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5-1 & 2 \\ -3 & 5+4 \end{vmatrix}} = \frac{-5-8}{(5-1)(5+4)+6} \Rightarrow x_1 = \frac{-5-8}{5^2+35+2} = \frac{-7}{5+1} - \frac{6}{5+2}$$

$$\frac{-7}{5+1} + \frac{6}{5+2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -7e^{-t} + 6e^{-2t} \\ x_2 = -7e^{-t} + 9e^{-2t} \end{cases}$$

۴۴) در بسط لوران، مقدار اصلی  $(1+z)^{\frac{1}{z}}$  حول  $z=0$  ضریب  $z^2$  برابر کدام است؟

۱)  $\frac{13}{24} e^4$

۲)  $\frac{11}{12} e^3$

۳)  $\frac{11}{12} e^3$

۴)  $\frac{13}{24} e^4$

گزینه ۳:  $\frac{11}{12} e^3$

کتاب ریاضیات مهندسی کریمی صفحه ۳۲۲

عبارت  $(1+z)^{\frac{1}{z}}$  را به صورت  $e^{\frac{1}{z} \ln(1+z)}$  می نویسیم و سپس بسط  $\ln(1+z)$  لوران را جایگزین می کنیم.

$$(1+z)^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{1}{z} \ln(1+z)} = e^{\frac{1}{z} \left( z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots \right)} = e^{\left( 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \dots \right)} = e \cdot e^{-\frac{z}{2}} \cdot e^{\frac{z^2}{3}}$$

$$\text{بسط } \ln(1+z) \xrightarrow{y'} \frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots$$

$$\int \Rightarrow \ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots$$

حال اینجا بسط بدست آمده را دوباره برحسب بسط لوران می نویسیم:

$$e \times \left[ 1 + \left( \frac{z^2}{2} \right) + \frac{1}{2!} \left( -\frac{z}{2} \right)^2 + \dots \right] \left[ 1 + \frac{z^2}{3} + \frac{1}{2!} \left( -\frac{z^2}{3} \right)^2 + \dots \right] = e \left( 1 - \frac{z}{2} + \frac{11}{24} z^2 + \dots \right)$$

ضریب  $z^2$  برابر  $e \times \frac{11}{24}$  می باشد که برابر جواب سوال است.

**\*این تست عینا تست سال ۸۴ برای رشته ریاضی بود\***

۴۵) درمورد تابع مختلط  $f(z) = \begin{cases} \left(\frac{z^2}{2}\right) & , z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$  کدام گزینه درست است؟

۱) در مبدأ (۰ و ۰) روابط کوشی - ریمان برقرار نیستند.

۲) در نقطه  $z = 0$  تابع پیوسته نیست.

۳) در نقطه  $z = 0$  مشتق پذیر نیست، چون روابط کوشی - ریمان در مبدأ برقرار نیست.

۴) مشتقات جزئی مرتبه اول توابع حقیقی  $Ref(z)$  در (۰ و ۰) پیوسته نیستند.

گزینه ۳: در نقطه  $z = 0$  مشتق پذیر نیست، چون روابط کوشی - ریمان در مبدأ برقرار نیست

کتاب ریاضیات مهندسی کریمی فصل ۳ صفحه ۲۶۱

طبق تعریف شرایط کوشی ریمان می دانیم زمانی یک تابع مختلط در شرایط کوشی ریمان صدق می کند که داشته باشیم:

$$\frac{du}{d\theta} = -r \frac{dv}{dr}, \quad \frac{du}{dr} = \frac{1}{r} \frac{dv}{d\theta}$$

پس متوجه می شویم باید عبارت را برحسب  $r$  و  $\theta$  بنویسیم.

$$f(z) = \frac{(z)^2}{2} = \frac{ve^{-2i\theta}}{re^{i\theta}} = re^{-3i\theta} = r\cos 3\theta - ir\sin 3\theta \Rightarrow u = r\cos 3\theta \quad v = -r\sin 3\theta$$

$$\frac{du}{dr} = \cos 3\theta$$

$$\frac{dv}{dr} = -\sin 3\theta$$

$$\frac{du}{d\theta} = -3r\sin 3\theta$$

$$\frac{dv}{d\theta} = -3r\cos 3\theta$$

حال معادلات کوشی ریمان را بررسی می کنیم توجه می کنیم این شرایط را در مبدا بررسی می کنیم یعنی شرایط  $r = 0$

$$\frac{du}{d\theta} = 0, \quad -r \frac{dv}{dr} = 0 \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = -r \frac{dv}{dr}$$

در نهایت شرایط کوشی ریمان در مبدأ برقرار است.

$$r \frac{du}{dv} = 0, \quad \frac{dv}{d\theta} = 0 \Rightarrow \frac{du}{dr} \times r = \frac{dv}{d\theta}$$

حال شرایط مشتق پذیری را بررسی می کنیم لذا از تعریف مشتق داریم:

$$f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^2}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(z)^2}{z} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 e^{-2i\theta}}{r^2 e^{2i\theta}} = e^{-2i\theta}$$

چون مقدار مشتق به ازای  $r = 0$  (در مبدأ مشخص نیست و به  $\theta$  وابسته است پس تابع در مبدأ  $z = 0$  مشتق ندارد).

aim group

(۴۶) مانده ی تابع  $f(z) = e^z \sinh \frac{1}{z}$  حول  $z = 0$  برابر کدام است؟

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(ni)+(n+1)i} \quad (۲) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)i+(2n+1)i} \quad (۱)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)i+(n)i} \quad (۴) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)i+(n+1)i} \quad (۳)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)i+(2n+1)i} \quad \text{گزینه ۱:}$$

کتاب ریاضیات مهندسی کریمی صفحه ۳۴۵

برای بدست آوردن مانده تابع ابتدا باید تمام تابع را به صورت بسط لوران بنویسیم سپس ضریب  $\frac{1}{z}$  برابر مانده ی تابع در  $z = 0$  است.

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \Rightarrow \sinh \frac{1}{z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^3 3!} + \frac{1}{z^5 5!} + \dots$$

$$f(z) = e^z \sinh \frac{1}{z} = (1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots) (\frac{1}{z} + \frac{1}{z^3 3!} + \frac{1}{z^5 5!} + \dots)$$

حال باید ضریب  $\frac{1}{z}$  را محاسبه کنیم:

$$z = 0 \text{ مانده در } (1 + \frac{1}{2! 3!} + \frac{z^3}{4! 5!} + \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)i + (2n+1)i}$$

○ این تست عینا تست ریاضی سال ۸۴ بوده

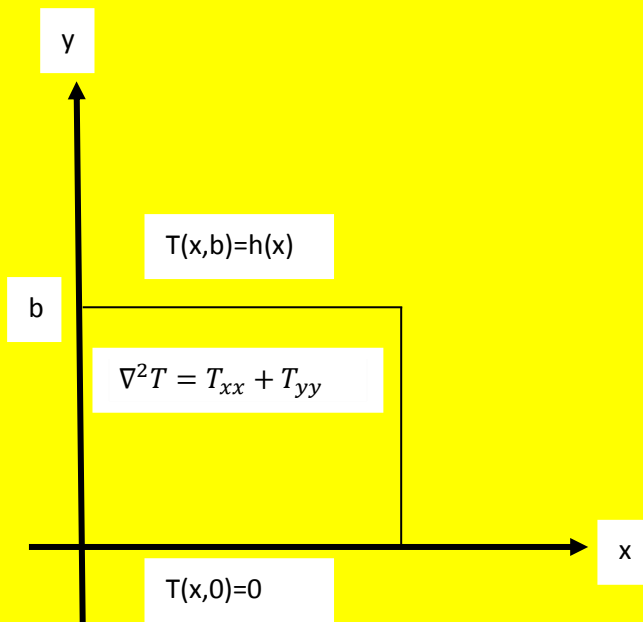
(۴۷) پایه متعامد مورد نیاز برای استفاده در حل مسأله مقدار مرزی داده شده از طریق جداسازی متغیرها، کدام است؟

$$\frac{1}{2}, \sin \frac{2\pi x}{a}, \cos \frac{2\pi x}{a}, \dots, \sin \frac{2n\pi x}{a}, \cos \frac{2n\pi x}{a}, \dots \quad (۱)$$

$$\frac{1}{2}, \sin \frac{\pi x}{a}, \cos \frac{\pi x}{a}, \dots, \sin \frac{n\pi x}{a}, \cos \frac{n\pi x}{a}, \dots \quad (۲)$$

$$\frac{1}{2}, \sin \frac{\pi x}{a}, \cos \frac{\pi x}{a}, \dots, \sin \frac{(2n-1)\pi x}{a}, \cos \frac{(2n-1)\pi x}{a}, \dots \quad (۳)$$

$$\frac{\sin 2\pi x}{a}, \cos \frac{2\pi x}{a}, \dots, \sin \frac{2n\pi x}{a}, \cos \frac{2n\pi x}{a}, \dots \quad (۴)$$



$$\begin{cases} T(0,y) = T(a,y) \\ T_x(0,y) = T_x(a,y) \end{cases} \quad \text{شرایط مرزی روی دو ضلع راست و چپ}$$

$$\frac{1}{2}, \sin \frac{2\pi x}{a}, \cos \frac{2\pi x}{a}, \dots, \sin \frac{2n\pi x}{a}, \cos \frac{2n\pi x}{a}, \dots: ۱ \text{ گزینه}$$

کتاب ریاضیات مهندسی کریمی فصل سوم

$$T_{xx} + T_{yy} = 0$$

$$T(x,0)=0$$

$$T(0,y)=T(a,y)$$

$$T_x(0,y)=T_x(x,y)$$

پس برای توابع متعامد  $T_x = 2n\pi/a$  است چون تابع تناوبی است. و مشخص است که  $\sin$  و  $\cos$  با توجه به شرایط مرزی توابع پایه هم شامل داریم

$$1/2, \sin 2n\pi/a, \cos 2n\pi/a, \dots, \sin 2n\pi x/a, \dots$$

قرار دهیم می بینیم گزینه ۳ و ۴ غلط هستند پس باید ۲/۱ نیز وجود داشته  $a$  یا  $0$ ،  $x$  یعنی اگر جای  $T(0,y)=T(a,y)$  همانطور که می بینیم داریم باشد پس گزینه ۴ غلط است.

پس جواب گزینه ۱ است.

۴۸) سری فوریه کسینوسی نیم دامنه ی تابع  $0 \leq x \leq L$  و  $f(x) = x(L-x)$  کدام است؟

$$\begin{aligned} \frac{L^2}{3} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{L^2}{4(m\pi)^2} \cos \frac{2m\pi x}{L} & \quad \frac{L^2}{4} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4L^2}{4(m\pi)^2} \cos \frac{2m\pi x}{L} \quad (۱) \\ \frac{L^2}{6} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4L^2}{4(2m-1)^2\pi^2} \cos \frac{(2m-1)\pi x}{L} & \quad \frac{L^2}{6} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4L^2}{4(m\pi)^2} \cos \frac{2m\pi x}{L} \quad (۳) \end{aligned}$$

گزینه ۳:  $\frac{L^2}{6} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4L^2}{4(m\pi)^2} \cos \frac{2m\pi x}{L}$

کتاب ریاضیات مهندسی کریمی صفحه ۶

می دانیم فرمول سری فوریه بصورت زیر است:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

حال

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \cos \left( \frac{n\pi}{L} x \right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \sin \left( \frac{n\pi}{L} x \right) dx$$

حال می بینیم در صورتی که  $f(x)$  ما زوج باشد تابع  $b_n$  برابر صفر است چون  $\sin \frac{n\pi}{L} x$  (فرد)  $\times f(x)$  (زوج) تابعی فرد می شود و انتگرال تابع فرد برابر صفر است.

در صورتیکه  $f(x)$  ما فرد باشد،  $a_n$  صفر و  $a_0$  صفر می شود. بدلیل اینکه تابع  $f(x)$  فرد و  $\cos \frac{n\pi}{L} x$  (زوج)  $\times f(x)$  (فرد) توابعی فرد می شوند و انتگرال تابع خود صفر می شود.

حال به صورت سوال می نویسیم سؤال سری فوریه کسینوسی را از ما خواسته پس چون سری کسینوسی زوج است پس  $b_n$  برابر صفر و رابطه سری فوریه کسینوسی به شکل زیر درمی آید:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x \quad T = (-L, L)$$

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx \quad x = [0, L]$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx$$

حال مقادیر مسأله را جای گذاری می کنیم:

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L x(L-x) dx = \frac{2}{L} \int_0^L xL dx - \frac{2}{L} \int_0^L x^2 dx$$

$$= \frac{2x^2}{L} \int_0^L - \frac{2}{L} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^L = L^2 - \frac{2L^2}{3} = \frac{L^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx = \frac{2}{L} \int_0^L x(L-x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx =$$

$$\frac{2}{L} \int_0^L xL \cos \frac{n\pi}{L} x dx - \frac{2}{L} \int_0^L x^2 \cos \frac{n\pi}{L} x dx$$

$$a_n = 2 \int_0^L x \cos \left( \frac{n\pi}{L} x \right) dx - \frac{2}{L} \int_0^L x^2 \cos \frac{n\pi}{L} x dx$$

حال به دو انتگرال جزء به جزء می رسیم و برای حل آنها از روش جزء به جزء استفاده می کنیم.

|                |     |                                                             |
|----------------|-----|-------------------------------------------------------------|
|                | $x$ | $\cos \frac{n\pi}{L} x$                                     |
| $\frac{d}{dx}$ | 1   | $\frac{L}{n\pi} \sin \left( \frac{n\pi}{L} x \right)$       |
| $\frac{d}{dx}$ | 0   | $\frac{L^2}{(n\pi)^2} \cos \left( \frac{n\pi}{L} x \right)$ |

$$I_1 = 2 \int_0^{\mathcal{L}} x \left( \cos \frac{n\pi}{\mathcal{L}} x \right) dx = 2 \left[ \frac{x\mathcal{L}}{n\pi} \sin \left( \frac{n\pi}{\mathcal{L}} x \right) + \frac{\mathcal{L}^2}{(n\pi)^2} \cos \left( \frac{n\pi}{\mathcal{L}} x \right) \right]_0^{\mathcal{L}}$$

$$= 2 \left[ \frac{\mathcal{L} \times \mathcal{L}}{n\pi} \sin \left( \frac{n\pi}{\mathcal{L}} \times \mathcal{L} \right) + \frac{\mathcal{L}^2}{(n\pi)^2} \cos \left( \frac{n\pi}{\mathcal{L}} \times \mathcal{L} \right) - 0 - \frac{\mathcal{L}^2}{(n\pi)^2} \cos(0) \right]$$

$$= 2 \left[ \frac{\mathcal{L}^2}{(n\pi)^2} \cos n\pi - \frac{\mathcal{L}^2}{(n\pi)^2} \right] \quad (1)$$

|                |       |                                                                                 |
|----------------|-------|---------------------------------------------------------------------------------|
|                | $x^2$ | $\cos \frac{n\pi}{\mathcal{L}} x$                                               |
| $\frac{d}{dx}$ | $2x$  | $\frac{\mathcal{L}}{n\pi} \sin \left( \frac{n\pi}{\mathcal{L}} \right)$         |
| $\frac{d}{dx}$ | $2$   | $\frac{\mathcal{L}^2}{(n\pi)^2} \cos \left( \frac{n\pi}{\mathcal{L}} x \right)$ |
|                |       | $-\frac{\mathcal{L}^3}{(n\pi)^3} \sin \left( \frac{n\pi}{\mathcal{L}} \right)$  |

$$I_2 = 2 \left[ \frac{x^2 \mathcal{L}}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{\mathcal{L}} x\right) + \frac{2x\mathcal{L}^2}{(n\pi)^2} \cos\left(\frac{n\pi}{\mathcal{L}} x\right) - \frac{\mathcal{L}^3}{(n\pi)^3} \sin\left(\frac{n\pi}{\mathcal{L}} x\right) \right]_0^1$$

$$I_2 = \frac{2}{\mathcal{L}} \left[ \frac{2\mathcal{L}^2}{(n\pi)^2} \cos n\pi \right] = \frac{4\mathcal{L}^2}{(n\pi)^2} \cos n\pi \quad (2)$$

حال به  $a_n$  باز می گردیم.

$$a_n = 2 \int_0^{\mathcal{L}} x \cos\left(\frac{n\pi}{\mathcal{L}} x\right) dx - \frac{2}{\mathcal{L}} \int_0^{\mathcal{L}} x^2 \cos \frac{n\pi}{\mathcal{L}} x dx$$

$$a_n = \underbrace{\frac{2\mathcal{L}^2}{(n\pi)^2} \cos \pi - \frac{2\mathcal{L}^2}{(n\pi)^2}}_{(1)} - \underbrace{\frac{4\mathcal{L}^2}{(n\pi)^2} \cos \pi}_{(2)}$$

(1)

(2)

اگر  $n$  ضریبی زوج باشد داریم:

$$a_n = \frac{-2\mathcal{L}^2}{(n\pi)^2} - \frac{2\mathcal{L}^2}{(n\pi)^2} \cos \pi$$

$$a_n = \frac{-2\mathcal{L}^2}{(n\pi)^2} - \frac{2\mathcal{L}^2}{(n\pi)^2} \times 1 = \frac{4\mathcal{L}^2}{(n\pi)^2}$$

اگر  $n$  ضریبی فرد باشد داریم:

$$a_n = \frac{-2\mathcal{L}^2}{(n\pi)^2} - \frac{2\mathcal{L}^2}{(n\pi)^2} \times 1 = 0$$

سپس  $a_n$  به ازای مقادیر زوج  $n$  برابر  $\frac{-4\mathcal{L}^2}{(n\pi)^2}$  می باشد.

و در نهایت با جای گذاری در فرمول اولیه داریم.

$$f(x) = \frac{a}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{\mathcal{L}} x$$

حال با جای گذاری  $2m$  به جای  $n$  (یعنی مقادیر زوج) به جواب گزینه ۳ می رسیم.

مسئله ی مهم جواب کوتاه برای حل مسئله است حالی بررسی می کنیم چگونه می توانیم از راه حل تستی و کوتاه تر برای حل تست استفاده کنیم.

با بدست آوردن  $\frac{\mathcal{L}^2}{3} = a_n$  و جای گذاری در فرمول  $\frac{a_0}{2}$  به جواب  $\frac{\mathcal{L}^2}{6}$  می رسیم که فقط در گزینه ۳ و ۴ موجود است.

حال به بررسی گزینه های ۳ و ۴ می پردازیم می دانیم که جواب سری اولیه با سری فوریه برابر است و با برابر قراردادن یک نقطه در تابع اصلی و تابع فوریه و برابر قراردادن آندو جواب درست تشخیص داده می شود.

مثلاً در نقطه  $x = 0$  تابع  $f(x)$  برابر صفر است پس سری فوریه در  $x = 0$  نیز باید برابر صفر شود. حال مقدار  $x = 0$  را در گزینه ۳ و ۴ قرار می دهیم و می بینیم کدام جواب صفر می شود.

$$\text{گزینه ۳} \quad x = 0 \Rightarrow \frac{\mathcal{L}^2}{6} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4\mathcal{L}^2}{4(m\pi)^2} \times 1 = \frac{\mathcal{L}^2}{6} - \frac{\mathcal{L}^2}{\pi^2} \sum \frac{1}{m^2} = \frac{\mathcal{L}^2}{6} - \frac{\mathcal{L}^2}{\pi^2} \times \frac{\pi^2}{6} = \frac{\mathcal{L}^2}{6} - \frac{\mathcal{L}^2}{6} = 0$$

نکته:  $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$  (پس جواب گزینه ۳ است).

$$\text{گزینه ۴} \quad x = 0 \Rightarrow \frac{\mathcal{L}^2}{6} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4\mathcal{L}^2}{4(2m-1)^2\pi^2} \cos\left(\frac{(p-m-1)\pi x}{\mathcal{L}}\right) = \frac{\mathcal{L}^2}{6} - \sum \frac{4\mathcal{L}^2}{4(2m-1)^2\pi^2}$$

$$\frac{\mathcal{L}^2}{6} - \frac{4\mathcal{L}^2}{\pi^2} \sum \frac{1}{(2m-1)^2} = \frac{\mathcal{L}^2}{6} - \frac{\mathcal{L}^2}{\pi^2} \times \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\mathcal{L}^2}{8} - \frac{1}{24} \neq 0$$

نکته:  $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

۴۹) جواب معادله ی انتگرال زیر کدام است؟

$$\int_0^L f(x) \cos(wx) dx = \begin{cases} 1-w & : 0 \leq w \leq 1 \\ w & : w > 1 \end{cases}$$

$$\frac{2(1-\cos x)}{\pi x^2} \quad (۴)$$

$$\frac{2(1+\cos x)}{\pi x^2} \quad (۳)$$

$$\frac{2(1-\cos x)}{\pi x} \quad (۲)$$

$$\frac{2(1+\cos x)}{\pi x} \quad (۱)$$

گزینه ۴ :  $\frac{2(1-\cos x)}{\pi x^2}$

کتاب ریاضیات مهندسی کریمی صفحه ۱۱۳

برای حل انتگرال می بایست عبارت انتگرالی را بر حسب  $w$  بدست می آوریم یعنی به جای  $dx$  بر حسب  $dw$  انتگرال را بنویسیم خب اینکار به راحتی امکان پذیر نیست و روشی که ما را در حل این سؤال کمک خواهد کرد، روش انتگرال فوریه است. خب از قبل به یاد داریم فرم انتگرال فوریه به صورت شکل زیر است:

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(w) \cos wx + B(w) \sin wx] dw$$

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos wx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos wx dx$$

$$B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin wx dx$$

حال با توجه به رابطه اگر دقت کنیم می بینیم صورت سؤال تقریباً  $A(w)$  را به ما داده است و عبارت  $f(x)$  را خواسته پس می دانیم در انتگرال فوریه کسینوسی است که  $B(w) = 0$  و  $A(w)$  موجود است پس در عمل در سؤال با دادن عبارت  $A(w)$  (البته ضریب  $\frac{2}{\pi}$  بازه انتگرال را کمی متفاوت از فرمول داده)  $f(x)$  انتگرال فوریه را خواسته است پس شروع به حل روش انتگرال فوریه کسینوسی می کنیم.

چرا  $\frac{2}{\pi}$  را به سؤال اضافه کردیم؟ (جواب انتهای حل)

$$A(w) = \frac{2}{\pi} \left( \int_0^{\infty} f(x) \cos(wx) dx \right)$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(w) \cos wx dw \Rightarrow f(x) = \int_0^{\infty} \times \left[ \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos wx dx \right] \cos wx dw$$

$$A(w) = \begin{cases} 1-w & : 0 \leq w < 1 \\ 0 & w > 1 \end{cases}$$

بنا به رابطه

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{در عمل} & A(w) = 1-w : 0 \leq w < 1 \\ \text{قسمت } 0 \leq w < 1 \text{ عبارت } f(x) \text{ را صفر نمی کند و معادله را حل می کند} \end{cases}$$

پس با جای انتگرال  $A(w)$  عبارت  $\begin{cases} 1-w & : 0 \leq w \leq 1 \\ 0 & w < 0 \end{cases}$  را در معادله انتگرال  $f(x)$  جایگزین می کنیم.

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(w) \cos wx \, dw \Rightarrow f(x) = \int_0^1 A(w) \cos wx \, dw + \int_1^{\infty} A(w) \cos wx \, dw$$

$$f(x) = \int_0^1 \frac{2}{\pi} (1-w) \cos wx \, dw = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (1-w) \cos wx \, dw$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \cos wx \, dw - \frac{2}{\pi} \int_0^1 w \cos wx \, dw$$

انتگرال جزء به جزء

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \times \frac{1}{x} [\sin wx]_0^1 - \frac{2}{\pi} \left[ \frac{w}{x} \sin wx + \frac{\cos wx}{x^2} \right]_0^1$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{x} \sin x \right) - \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\sin x}{x} + \frac{1 \times \cos x}{x^2} - 0 - \frac{\cos 0}{x^2} \right] = \frac{2}{\pi x^2} (1 - \cos x)$$

توجه کنیم در حل انتگرال  $w$  متغیر و  $x$  مقدار ثابت محسوب می شود.

حال به جواب سؤال مطرح شده که چرا  $\frac{2}{\pi}$  در عبارت داده شده اضافه کردیم می پردازیم. توجه کنید صورت سؤال از ما حل معادله انتگرالی را خواسته یعنی چه؟ یعنی به دست آوردن  $f(x)$  از معادله انتگرالی سپس با اضافه کردن  $\frac{2}{\pi}$  به معادله داده شده می توانیم  $f(x)$  را محاسبه کنیم سپس مجاز به اضافه کردن  $\frac{2}{\pi}$  هستیم.

۵۰. تبدیل فوریه تابع  $\frac{\sin t}{t}$ ، یعنی  $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  کدام است؟

$$\frac{1}{|w|+1} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{w^2+1} \quad (۱)$$

$$\begin{cases} 0, & w < -1 \\ \frac{\pi}{2}, & -1 < w < 1 \\ 0, & w > 1 \end{cases} \quad (۴)$$

$$\begin{cases} 0, & w < -1 \\ \pi, & -1 < w < 1 \\ 0, & w > 1 \end{cases} \quad (۳)$$

$$\begin{cases} 0, & w < -1 \\ \pi, & -1 < w < 1 \\ 0, & w > 1 \end{cases} \quad (\text{گزینه ۳:})$$

کتاب ریاضیات مهندسی کریمی صفحه ۱۳۳

همینطور که می بینیم سوال از ما تبدیل فوریه  $\frac{\sin t}{t}$  را خواسته و خوشبختانه فرمول تبدیل فوریه را نیز داده. پس کار ما محاسبه انتگرال است. حال ببینیم چطور به حل انتگرال می پردازیم.

برای حل انتگرال ابتدا لازم است عبارت  $e^{-iwt}$  که جمله ای مختلط است را به فرمی دیگر بنویسید همانطور که می دانیم

$\cos x + \sin x = e^{-ix}$  در اینجا به جای  $X$  عبارت  $-wt$  قرار گرفته است که با جای گذاری در رابطه خواهیم داشت:

$$e^{-iwt} = e^{i(-wt)} = \cos(-wt) + i \sin(-wt) \Rightarrow e^{-iwt} = \cos(wt) - i \sin(wt)$$

حال با جای گذاری این مقدار در انتگرال خواهیم داشت:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\cos(wt) - i \sin(wt)] \frac{\sin t}{t} dt \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \cos wt \times \frac{\sin t}{t} dt - i \int_{-\infty}^{\infty} \sin wt \times \frac{\sin t}{t} dt$$

حال با توجه به این نکته که انتگرال فرد در بازه ی متقارن برابر صفر است و چون عبارت  $\sin wt$  و  $\frac{\sin t}{t}$  (هم صورت فرد هم مخرج پس کسر

فرد است)، هر دو فرد هستند بنابراین انتگرال دوم برابر صفر است.

و توجه می کنیم برای حل انتگرال اول مقدار  $w = 0$  کار ما را بسیار راحت می کند و با جای گذاری و حل انتگرال در گزینه ها هم مقدار

$w = 0$  را قرار می دهیم و باید هر دو برابر شوند پس داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos 0 \times \frac{\sin t}{t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = 2 \frac{\pi}{2} = \pi$$

پس باید جواب در  $w = 0$  برابر  $\pi$  شود که فقط در گزینه ۳ این اتفاق می افتد.

| شماره تست | سطح   |
|-----------|-------|
| ۳۱        | آسان  |
| ۳۲        | سخت   |
| ۳۳        | سخت   |
| ۳۴        | آسان  |
| ۳۵        | متوسط |
| ۳۶        | متوسط |
| ۳۷        | متوسط |
| ۳۸        | سخت   |
| ۳۹        | متوسط |
| ۴۰        | متوسط |
| ۴۱        | متوسط |
| ۴۲        | متوسط |
| ۴۳        | سخت   |
| ۴۴        | متوسط |
| ۴۵        | متوسط |
| ۴۶        | متوسط |
| ۴۷        | متوسط |
| ۴۸        | سخت   |
| ۴۹        | سخت   |
| ۵۰        | متوسط |

## سطح سوالات ریاضی کنکور ارشد مکانیک ۹۲

